

PP.2187-2193. **26.** Atkinson A., Ramos T.M.G.M. Chemically-induced stresses in ceramic oxygen ion-conducting membranes. *Solid State Ionics*. – 2000. – 129. – PP.259-269. **27.** Hendriksen P. V., Larsen P. H., Mogensen M., Poulsen F. W., Wiik K. Prospects and problems of dense oxygen permeable membranes. – 2000. – *Catalysis Today*. – 56. – PP.283-295. **28.** Pei S., Kleesch M.S., Kobylinski T.P., Faber J., Udovich C.A., Zhang-McCoy V., Dabrowski B., Balachandran U., Mieville R. L., Poeppel R.B. Failure mechanisms of ceramic membrane reactors in partial oxidation of methane to synthesis gas. – *Catal. Lett.* – 1995. – 30. – PP.201-208. **29.** Mertins F.H.B. Perovskite-type ceramic membranes: Partial oxidation of methane in a catalytic membrane reactor. Ph.D Thesis, University of Twente, Enschede. – 2005. **30.** Roubort J.L., Goretta K.C., Cook R.E., Wolfenstine J. Deformation of perovskite electronic ceramics: A review. *Solid State Ionics*. – 2000. – 129. – PP.53-62. **31.** Majkic G., Wheeler L., Salama K. Creep of polycrystalline $\text{SrCo}_{0.8}\text{Fe}_{0.2}\text{O}_{3-\delta}$. *Acta mater.* – 2000. – 48. – PP.1907-1917. **32.** Majkic G., Wheeler L. T., Salama K. Stress-induced diffusion and defect chemistry of $\text{La}_{0.2}\text{Sr}_{0.8}\text{Fe}_{0.8}\text{Cr}_{0.2}\text{O}_{3-\delta}$. Part 1 – creep in controlled-oxygen atmosphere. *Solid State Ionics*. – 2003. – 164. – PP.137-148. **33.** Lein H. L. Mechanical properties and phase stability of oxygen permeable membranes $\text{La}_{0.5}\text{Sr}_{0.5}\text{Fe}_{1-x}\text{Co}_x\text{O}_{3-\delta}$. – Ph.D Thesis, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim. – 2005. **34.** Zolochevsky A., Hop J. G., Servant G., Foosnaes T., Øye H. A. Rapoport-Samoilenko test for cathode carbon materials- I. Experimental results and constitutive modelling. *Carbon*. – 2003. – 41. – PP.497-505. **35.** Zolochevsky A., Kühhorn A. Constitutive and numerical modeling of chemical and mechanical phenomena in solid oxide fuel cells and oxygen permeable membranes // *Вісник НТУ “ХПІ”*. Тем. Вип. “Машиноведення і САПР”. – 2007. – № 23. – С.128-139. **36.** Betten J., Sklepus S., Zolochevsky A. A microcrack description of creep damage in crystalline solids with different behaviour in tension and compression. *International Journal of Damage Mechanics*. – 1998. – 8. – PP.197-232. **37.** Akin F. T., Lin. Y. S. Oxygen permeation through oxygen ionic or mixed-conducting ceramic membranes with chemical reactions. *Journal of Membrane Science*. – 2004. – 231. – PP.133-146.

Надійшло до редакції 25.01.08

УДК 539.3

А.А.ЗОЛОЧЕВСКИЙ, докт. техн. наук, **Г.В. ГОНЧАРОВА**, НТУ „ХПІ”

ДИФФУЗИЯ НАТРИЯ И ХИМИЧЕСКИ НАВЕДЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ АППАРАТА ТЕСТА РАПОПОРТА-САМОЙЛЕНКО – II. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Числові дослідження даної роботи пов'язані з урахуванням впливу явища хімічного переносу натрію та хімічного розширення в катодному матеріалі при алюмінієвому електролізі в розрахунках залежних від часу розподілень хімічно наведених напружень в циліндрі з отвором для апарата тесту Рапопорта-Самойленка. Розглянуто два типи граничних умов для циліндра з отвором, а також для суцільного циліндра. Проаналізовані отримані чисельні результати.

In this paper, a comprehensive numerical investigation has been carried out with the main focus directed at the understanding on how sodium penetration and chemical expansion in the cathode material during aluminum electrolysis affect the time dependent and chemically induced stress distribution in the hollow cylinder of the Rapoport-Samoilenko apparatus. Two types of the boundary conditions have been considered for the hollow cylinder as well as for the solid cylinder. The obtained numerical results have been analyzed.

Введение. Как известно [1-4], в процессе алюминиевого электролиза жидкий алюминий реагирует с электролитом, и металлический натрий мигрирует в углеродный катод, что ведет к химическому расширению углеродного катода и, очевидно, к уменьшению времени его функционирования. М.Б. Рапопорт и В.Н. Самойленко опубликовали в 1957 году [1] простой метод измерения химического расширения

лабораторного углеродного катода. В дальнейшем были предложены различные модификации аппарата теста Раппопорта-Самойленко [2], основной элемент которого (катод) представляет собой длинный полый или сплошной цилиндр.

В работе [4] была предложена математическая модель, описывающая связь между напряжениями, возникающими в цилиндрическом полом катоде аппарата теста Раппопорта-Самойленко вследствие диффузии натрия в условиях алюминиевого электролиза, и временем. Целью данного исследования является численный анализ обсуждаемых диффузионных напряжений. С этой целью будут рассмотрены два различных граничных условия на внешней поверхности цилиндра, а также проанализированы варианты изготовления лабораторного катода в виде полого и сплошного цилиндров.

1. Математическая модель. Рассмотрим длинный полый цилиндр, моделирующий катод аппарата теста Раппопорта-Самойленко [4]. Диффузия натрия начинается с внешней поверхности цилиндра и завершается по достижению натрием его внутренней поверхности. Начальное состояние катода – ненапряженное. Деформация цилиндра анализируется в цилиндрической системе координат (r, θ, z) в условиях плоской деформации и симметрии вокруг оси z . Здесь r – радиальная координата, θ – соответствует окружному направлению, а z – осевая координата. Сжимающее усилие, приводящее к давлению p , приложено на торцах углеродного цилиндра. Концентрация натрия в цилиндре C – функция, зависящая только от радиальной координаты r и времени t , которая удовлетворяет дифференциальному уравнению Фика второго рода [5]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где D – коэффициент диффузии натрия.

Пусть C_0 – концентрация натрия в углеродном катоде после полного насыщения. Начальное содержание натрия в катоде равно нулю. Далее приведем основные зависимости, относящиеся к математической модели, ранее рассмотренной в [4]. При этом будут рассмотрены полый цилиндр, а также сплошной цилиндр как предельный случай.

1.1. Цилиндр с отверстием. Рассмотрим два варианта граничных условий для цилиндра с отверстием ($a \leq r \leq b$), а также начальное условие.

a) На внешней поверхности цилиндра $r = b$ концентрация натрия постоянна, а на внутренней поверхности $r = a$ диффузионный флукс равен нулю:

$$\begin{aligned} C &= C_0, & r &= b, & t &\geq 0, \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= 0, & r &= a, & t &\geq 0, \\ C &= 0, & r &\in (a, b), & t &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение уравнения (1) с учетом (2) имеет вид:

$$C = C_0 \left\{ 1 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-D \alpha_n^2 t) \frac{J_0(b \alpha_n) J_1(a \alpha_n)}{J_1^2(a \alpha_n) - J_0^2(b \alpha_n)} [J_0(r \alpha_n) Y_1(a \alpha_n) - J_1(a \alpha_n) Y_0(r \alpha_n)] \right\}. \quad (3)$$

Здесь $J_0(x)$ и $J_1(y)$ – функции Бесселя первого рода нулевого порядка и функции Бесселя первого рода первого порядка, соответственно, $Y_0(x)$ и $Y_1(y)$ – функции Бесселя второго рода нулевого порядка и функции Бесселя второго рода первого порядка, соответственно, и α_n ($n=1,2,\dots,\infty$) – действительные корни уравнения:

$$Y_1(a \alpha_n) J_0(b \alpha_n) - J_1(a \alpha_n) Y_0(b \alpha_n) = 0. \quad (4)$$

Выражения для химического расширения цилиндра ε_s и химически наведенных напряжений σ_r , σ_θ , σ_z имеют вид:

$$\varepsilon_s = AC_0 \left\{ 1 - 2\pi \frac{b}{b^2 - a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{\alpha_n} [Y_1(a \alpha_n) J_1(b \alpha_n) - Y_1(b \alpha_n) J_1(a \alpha_n)] \right\}; \quad (5)$$

$$S_n = \frac{J_1(a \alpha_n) J_0(b \alpha_n)}{J_1^2(a \alpha_n) - J_0^2(b \alpha_n)} \exp(-D \alpha_n^2 t); \quad (6)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{2(1-\nu)} \left\{ \frac{r^2 - a^2}{r^2} \varepsilon_s - \frac{r^2 - a^2}{r^2} AC_0 + \frac{2AC_0}{r} \pi \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{\alpha_n} [Y_1(a \alpha_n) J_1(r \alpha_n) - J_1(a \alpha_n) Y_1(r \alpha_n)] \right\};$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{2(1-\nu)} \left\{ \frac{r^2 + a^2}{r^2} \varepsilon_s - \frac{r^2 + a^2}{r^2} AC_0 + 2AC_0 \pi \sum_{n=1}^{\infty} S_n \left\{ Y_1(a \alpha_n) \times \left[-\frac{1}{\alpha_n r} J_1(r \alpha_n) + J_0(r \alpha_n) \right] + J_1(a \alpha_n) \left[\frac{1}{\alpha_n r} Y_1(r \alpha_n) - Y_0(r \alpha_n) \right] \right\} \right\}; \quad (7)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu} \left\{ \varepsilon_s - AC_0 + AC_0 \pi \sum_{n=1}^{\infty} S_n [Y_1(a \alpha_n) J_0(r \alpha_n) - J_1(a \alpha_n) Y_0(r \alpha_n)] \right\} - p.$$

b) На внешней поверхности цилиндра $r = b$ концентрация натрия изменяется с течением времени от 0 до C_0 в соответствии с условием обмена между электролитом и катодом, а на внутренней поверхности $r = a$ диффузионный флукс равен нулю:

$$\begin{aligned} -D \frac{\partial C}{\partial r} &= \beta(C - C_0), & r = b, & t \geq 0, \\ \frac{\partial C}{\partial r} &= 0, & r = a, & t \geq 0, \\ C &= 0, & r \in (a, b), & t = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь β – коэффициент поверхностного проникновения натрия в катод.

Решение уравнения (1) с учетом (8) имеет вид:

$$C = C_0 \left\{ 1 - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta J_0(b\alpha_n) - D\alpha_n J_1(b\alpha_n)}{[\beta J_0(b\alpha_n) - D\alpha_n J_1(b\alpha_n)]^2 - (\alpha_n^2 D^2 + \beta^2) J_1^2(a\alpha_n)} \times \right. \\ \left. \times \exp(-D\alpha_n^2 t) [Y_0(r\alpha_n) J_1(a\alpha_n) - Y_1(a\alpha_n) J_0(r\alpha_n)] \beta J_1(a\alpha_n) \right\}, \quad (9)$$

где α_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$) – положительные корни уравнения:

$$J_1(a\alpha_n) [D\alpha_n Y_1(b\alpha_n) - \beta Y_0(b\alpha_n)] - Y_1(a\alpha_n) \times \\ \times [D\alpha_n J_1(b\alpha_n) - \beta J_0(b\alpha_n)] = 0. \quad (10)$$

Выражение для химического расширения в данном случае может быть представлено таким образом:

$$\varepsilon_s = AC_0 \left\{ 1 - 2\pi \frac{b}{b^2 - a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{\alpha_n} [Y_1(b\alpha_n) J_1(a\alpha_n) - Y_1(a\alpha_n) J_1(b\alpha_n)] \right\}, \quad (11)$$

где

$$L_n = \frac{\beta J_1(a\alpha_n) [\beta J_0(b\alpha_n) - D\alpha_n J_1(b\alpha_n)] \exp(-D\alpha_n^2 t)}{[\beta J_0(b\alpha_n) - D\alpha_n J_1(b\alpha_n)]^2 - (\alpha_n^2 D^2 + \beta^2) J_1^2(a\alpha_n)}. \quad (12)$$

Химически наведенные напряжения σ_r , σ_θ , σ_z имеют вид:

$$\sigma_r = \frac{E}{2(1-\nu)} \left\{ \frac{r^2 - a^2}{r^2} \varepsilon_s - \frac{r^2 - a^2}{r^2} AC_0 + \frac{2AC_0}{r} \pi \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{\alpha_n} [-Y_1(a\alpha_n) J_1(r\alpha_n) + J_1(a\alpha_n) Y_1(r\alpha_n)] \right\};$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{2(1-\nu)} \left\{ \frac{r^2 + a^2}{r^2} \varepsilon_s - \frac{r^2 + a^2}{r^2} AC_0 - 2AC_0\pi \sum_{n=1}^{\infty} L_n \times \right. \\ \left. \times \left[Y_1(a\alpha_n) \left[-\frac{1}{\alpha_n r} J_1(r\alpha_n) + J_0(r\alpha_n) \right] + J_1(a\alpha_n) \left[\frac{1}{\alpha_n r} Y_1(r\alpha_n) - Y_0(r\alpha_n) \right] \right] \right\}; \quad (13)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu} \left\{ \varepsilon_s - AC_0 + AC_0\pi \sum_{n=1}^{\infty} L_n \left[-Y_1(a\alpha_n) J_0(r\alpha_n) + \right. \right. \\ \left. \left. + J_1(a\alpha_n) Y_0(r\alpha_n) \right] \right\} - p.$$

1.2. Рассмотрим два варианта граничных условий для *сплошного цилиндра* $0 \leq r \leq b$, приняв $a = 0$ для соответствующих формул, представленных в части 1.1:

а) На внешней поверхности цилиндра $r = b$ концентрация натрия постоянна:

$$\begin{aligned} C &= C_0, & r &= b, & t &\geq 0, \\ C &= 0, & r &\in (0, b), & t &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда решение уравнения (1) с учетом (14) может быть представлено следующим образом:

$$C = C_0 \left[1 - \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \frac{J_0(r\alpha_n)}{J_1(b\alpha_n)} \exp(-D\alpha_n^2 t) \right], \quad (15)$$

где α_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$) – положительные корни уравнения

$$J_0(b\alpha_n) = 0. \quad (16)$$

Выражения для химического расширения катода и диффузионных напряжений в данном случае имеют следующий вид:

$$\varepsilon_s = AC_0 \left[1 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-D\alpha_n^2 t)}{(\alpha_n b)^2} \right]; \quad (17)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{2(1-\nu)} \left[\varepsilon_s - AC_0 + \frac{4AC_0}{br} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \frac{J_1(r\alpha_n)}{J_1(b\alpha_n)} \exp(-D\alpha_n^2 t) \right];$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{2(1-\nu)} \left\{ \varepsilon_s - AC_0 - \frac{4AC_0}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \frac{\exp(-D\alpha_n^2 t)}{J_1(b\alpha_n)} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{J_1(r\alpha_n)}{\alpha_n r} - J_0(r\alpha_n) \right] \right\}; \quad (18)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu} \left[\varepsilon_s - AC_0 + \frac{2AC_0}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \frac{J_0(r\alpha_n)}{J_1(b\alpha_n)} \exp(-D\alpha_n^2 t) \right] - p.$$

b) На внешней поверхности цилиндра $r = b$ концентрация натрия изменяется с течением времени от 0 до C_0 в соответствии с условием обмена между электролитом и катодом:

$$\begin{aligned} -D \frac{\partial C}{\partial r} &= \beta(C - C_0), & r = b, & t \geq 0, \\ C &= 0, & r \in (0, b), & t = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение уравнения (1) с учетом (19) записывается следующим образом:

$$C = C_0 \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L J_0(r\alpha_n/b)}{(\alpha_n^2 + L^2) J_0(\alpha_n)} \exp(-D\alpha_n^2 t/b^2) \right], \quad (20)$$

где $L = b\beta/D$, α_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$) – положительные корни уравнения:

$$\beta J_1(\alpha_n) - L J_0(\alpha_n) = 0. \quad (21)$$

Химическое расширение катода в данном случае имеет вид:

$$\varepsilon_s = AC_0 \left[1 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} K_n \frac{J_1(\alpha_n)}{\alpha_n} \right], \quad (22)$$

где

$$K_n = \frac{L \exp(-D\alpha_n^2 t/b)}{(\alpha_n^2 + L^2) J_0(\alpha_n)}. \quad (23)$$

Химически наведенные напряжения в рассматриваемом сплошном цилиндре вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{2(1-\nu)} \left[\varepsilon_s - AC_0 + \frac{4AC_0 b}{r} \sum_{n=1}^{\infty} K_n \frac{J_1(r\alpha_n/b)}{\alpha_n} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{2(1-\nu)} \left\{ \varepsilon_s - AC_0 - 4AC_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n \left[\frac{b J_1(r\alpha_n/b)}{\alpha_n r} - J_0(r\alpha_n/b) \right] \right\}, \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\nu} \left[\varepsilon_s - AC_0 + 2AC_0 \sum_{n=1}^{\infty} K_n J_0(r\alpha_n/b) \right] - p. \end{aligned} \quad (24)$$

2. Результаты расчетов. Перейдем к численным исследованиям химического расширения катода, а также диффузионных напряжений в катоде (полый цилиндр и сплошной цилиндр) для двух типов граничных условий, рассмотренных выше. Исходные численные данные представлены в табл. 1.

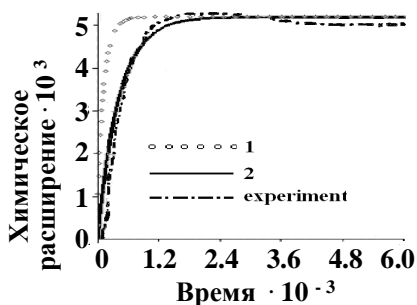


Рис. 1. Изменение химического расширения катода во времени. Цифра 1 соответствует уравнению (5), 2 – уравнению (11)

на основе (8), приводит к лучшей аппроксимации экспериментальных данных по сравнению с зависимостью (5), основанной на условиях (2). Данный численный результат является ожидаемым, поскольку условия (8) привлекают дополнительную константу материала по сравнению с условиями (2).

Рис. 1 иллюстрирует изменение химического расширения лабораторного углеродного катода в условиях алюминиевого электролиза во времени. Здесь также дано сопоставление экспериментальных результатов [3] для полого цилиндрического катода с результатами расчетов на основе зависимости (5), а также зависимости (11), с привлечением численных значений исходных данных, приведенных в табл.1. На рис. 1 заметно, что использование в расчетах зависимости (11), полученной

Таблица 1

Исходные данные к расчетам катодов

Обозначение	Название	Размерность	Значение
E	модуль упругости	ГПа	4.2
ν	коэффициент Пуассона	-	0.25
p	осевое давление	МПа	2.3
t_*	время полного насыщения катода натрием	с	$7.68 \cdot 10^3$
D	коэффициент диффузии	$\text{м}^2/\text{с}$	$16.5 \cdot 10^{-8}$
β	поверхностный коэффициент проникновения натрия	$\text{м}/\text{с}$	$14.5 \cdot 10^{-6}$
A	константа материала, описывающая химическое расширение	-	0.26
C_0	концентрация натрия в катоде после насыщения	-	0.02
T	температура	К	1253
a	радиус внутренней поверхности полого цилиндра	м	$3.5 \cdot 10^{-3}$
b	радиус внешней поверхности цилиндра	м	$1.5 \cdot 10^{-2}$

Найдем погрешность аппроксимации, используя формулу:

$$\delta = \sum_{i=0}^{i_{\max}} \frac{|e_i - x_i|}{e_i} 100\% , \quad (25)$$

где e_i – значение химического расширения, полученного из эксперимента, x_i – соответствующее теоретическое значение для того же момента времени, i – номер, определяющий текущее значение времени испытаний соответствующими шагами, $i \in [0, i_{\max}]$. Численные расчеты показали, что в случае зависимости (5) погрешность аппроксимации составляет $\delta = 9.47\%$, а с привлечением уравнения (11) – $\delta = 0.85\%$.

На рис. 2 показано перераспределение концентрации натрия во времени согласно уравнениям (3), (9) для цилиндра с отверстием и согласно уравнениям (15), (20) для сплошного цилиндра. Численные результаты получены для двух типов граничных условий, обсуждавшихся выше, и отмеченных на рис. 2 цифрами 1 и 2. Можно заметить, что концентрация натрия возрастает в каждой точке цилиндра с течением времени и по достижению времени насыщения $t = t_*$ всюду принимает значение C_0 . Обратим внимание, что концентрация натрия в цилиндре для граничных условий 1 принимает значения от 0 до C_0 при $t < 0.01t_*$, а при граничных условиях 2 значение концентрации изменяется в диапазоне от 0 до $0.3 C_0$ для тех же ограничений во времени. Таким образом, кривые концентрации натрия, описываемые граничными условиями 2, имеет более пологий характер. Качественно графики проникновения натрия для полого и сплошного цилиндра совпадают.

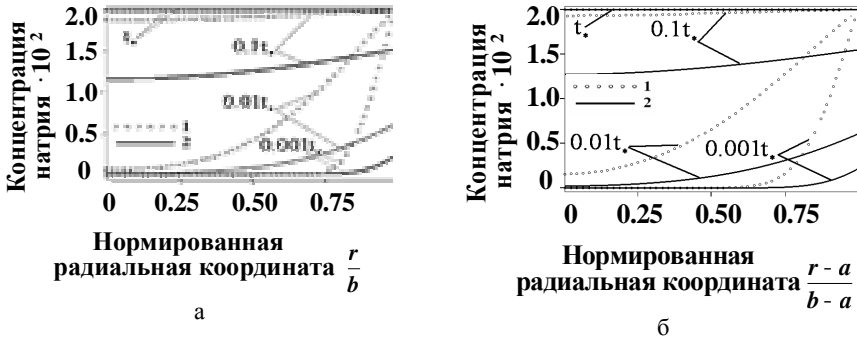


Рис. 2. Распределение концентрации натрия для различных моментов времени в радиальном направлении сплошного (а) и полого (б) цилиндров. Обозначение 1 соответствует уравнениям (15) и (3) (а и б, соответственно), 2 – уравнениям (20) и (9) (а и б, соответственно)

Рис. 3-5 демонстрируют перераспределение во времени химически введенных напряжений в цилиндрах для двух типов граничных условий, обсуждавшихся ранее. На рис. 3 видно, что радиальные напряжения σ_r всегда положитель-

ны для всех моментов времени $t < t_*$, кроме точек цилиндра, где согласно граничным условиям $\sigma_r = 0$. Также отметим, что в случае сплошного цилиндра радиальные напряжения σ_r достигают максимального значения на оси цилиндра, а для полого цилиндра – вблизи к его срединной поверхности. При этом процесс перераспределения радиальных напряжений можно разделить на два диффузионных периода. В течение первого периода во всех точках цилиндра, за исключением граничных контуров с $\sigma_r = 0$, радиальные напряжения возрастают со временем. Второй период диффузии начинается, когда имеет место процесс релаксации рассматриваемых диффузионных напряжений. При полном насыщении катода натрием химически наведенные радиальные напряжения равны нулю. Заметим также, что для времени $t \leq 0.01t_*$ максимальное значение σ_r в сплошном цилиндре в случае граничных условий 1 более чем в 4 раза превышает аналогичное значение σ_r , вычисленное в предположении, что справедливо граничное условие 2. Еще большее различие в радиальных напряжениях для двух типов граничных условий на внешней поверхности наблюдается для полого цилиндра (рис. 3, б).

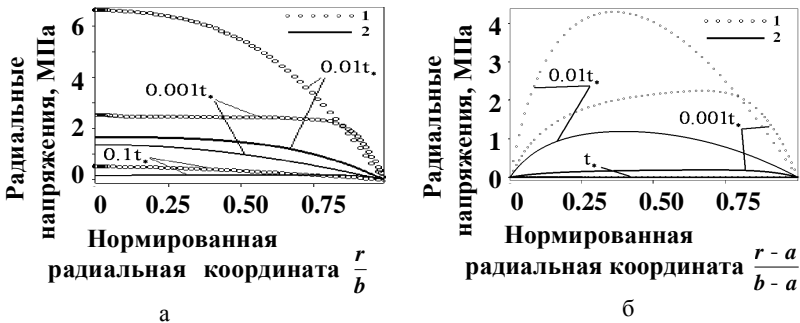


Рис. 3. Перераспределение радиальных напряжений в сплошном (а) и полом (б) цилиндрах. Обозначение 1 относится к уравнениям (18) и (7) (а и б, соответственно), 2 – к уравнениям (24) и (13) (а и б, соответственно)

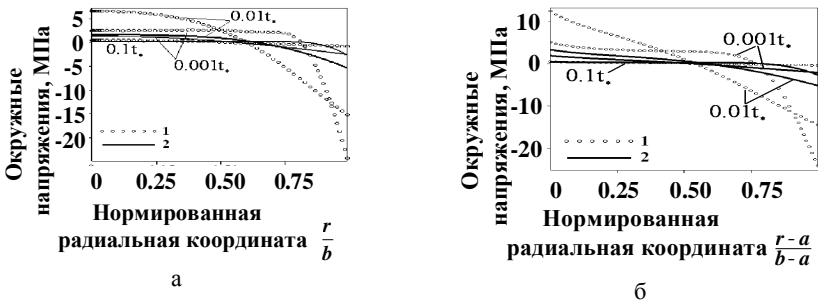


Рис. 4. Перераспределение окружных напряжений в сплошном (а) и полом (б) цилиндрах. Обозначение 1 относится к уравнениям (18) и (7) (а и б, соответственно), 2 – к уравнениям (24) и (13) (а и б, соответственно)

Рис. 4 иллюстрирует изменение окружных напряжений σ_θ во времени в радиальном направлении цилиндра для двух типов граничных условий (1 и 2), обсуждавшихся ранее, для сплошного (а) и полого (б) цилиндров. Видно, что в моменты времени $t < t_*$ окружные напряжения вблизи поверхности $r = b$ – сжимающие и имеют схожий характер изменения в полom и сплошном цилиндрах, причем значения напряжений не отличаются более чем на 3 %. Более того, максимальные по абсолютной величине значения сжимающих напряжений при $t = 0.01t_*$ достигаются на внешней поверхности цилиндрических катодов, а именно, 25 МПа в случае 1 и 5 МПа в случае 2. Около поверхности $r = a$ имеют место растягивающие напряжения, причем для времени $t \leq 0.01t_*$ окружное напряжение при $r = a$ в полom цилиндре приблизительно в 2 раза превышает аналогичное значение на оси сплошного цилиндра для обоих граничных условий на внешней поверхности. Так, в момент времени $t = 0.01t_*$ окружное напряжение на внутренней поверхности полого цилиндра равняется 13 МПа для случая 1 и 3 МПа для случая 2. Таким образом, влияние граничного условия на внешней поверхности цилиндрического катода проявляется в данном случае в более чем четырехкратном отличии для диффузионного напряжения. Заметим также, что с момента полного насыщения катода натрием химически наведенные окружные напряжения равняются нулю.

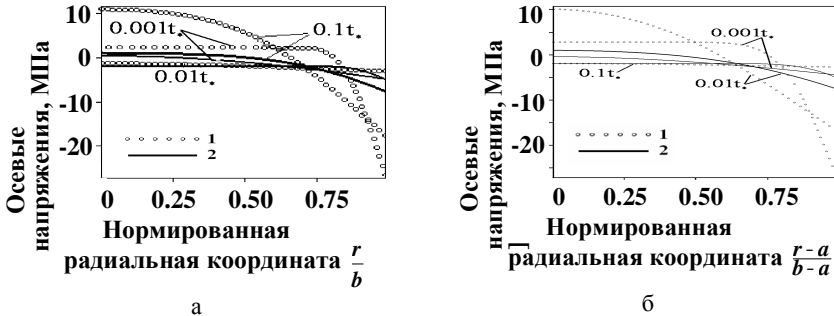


Рис. 5. Перераспределение осевых напряжений в сплошном (а) и полom (б) цилиндрах. Обозначение 1 относится к уравнениям (18) и (7) (а и б, соответственно), 2 – к уравнениям (24) и (13) (а и б, соответственно)

Картина перераспределения во времени осевых напряжений σ_z в радиальном направлении цилиндрического катода представлена на рис. 5 для сплошного (а) и полого (б) цилиндров для случаев 1 и 2, относящихся к двум разным типам граничных условий на внешней поверхности катодов. Изменение напряжений имеет качественно схожий характер для сплошного и полого цилиндров. Максимальные по абсолютной величине значения напряжений достигаются в полom цилиндре при $t = 0.01t_*$, причем максимальные сжимающие напряжения равняются 27 МПа (1) и 7 МПа (2), а максимальные рас-

тягивающие напряжения – 10 МПа (1) и 2 МПа (2). Начиная с момента времени $t = t_*$ осевые напряжения становятся равными по абсолютной величине приложенному давлению p .

Рис. 6 иллюстрирует перераспределение во времени в сплошном (а) и полом (б) цилиндрах интенсивности напряжений, вычисляемой по следующей формуле:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2}. \quad (26)$$

Максимальные значения интенсивности напряжений равняются 27 МПа (1) и 7 МПа (2).

На рис. 7 дано изменение во времени интенсивности напряжений на внешней поверхности цилиндрического катода. Видно схожий характер изменения интенсивности напряжений для сплошного и полого цилиндров при одном и том же граничном условии для концентрации натрия.

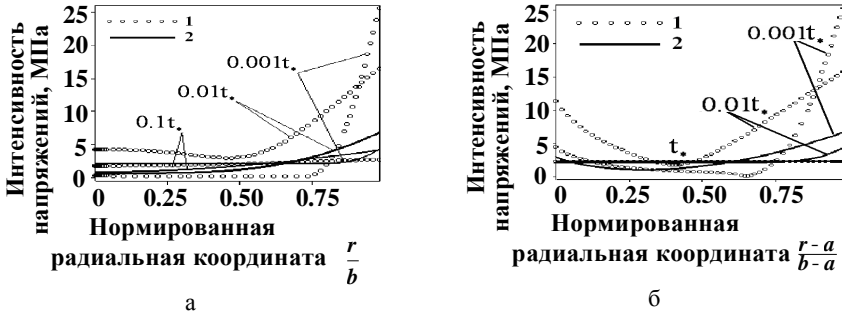


Рис. 6. Перераспределение интенсивности напряжений во времени в сплошном (а) и полом (б) цилиндрах. Обозначение 1 соответствует граничным условиям, описываемых уравнениями (14) и (2) (а и б, соответственно), 2 – (19) и (8) (а и б, соответственно)

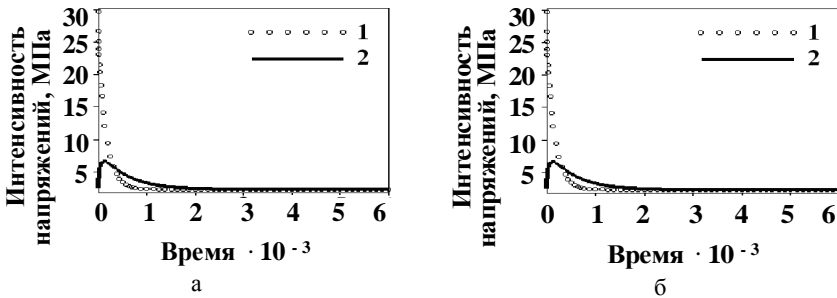


Рис. 7. Перераспределение во времени интенсивности напряжений на внешней поверхности в сплошном (а) и полом (б) цилиндрах. Обозначение 1 соответствует граничным условиям, описываемых уравнениями (14) и (2) (а и б, соответственно), 2 – (19) и (8) (а и б, соответственно)

В качестве общего замечания отметим, что численные расчеты, основанные на предположении постоянной концентрации натрия на внешней поверхности катода, приводят к неправдоподобно высоким напряжениям (рис. 2-7, обозначение 1), которые, если воспользоваться одним из критериев кратковременной прочности [3], должны вызывать разрушение катода в лабораторных условиях. Однако, этого разрушения ни для сплошного, ни для полого цилиндра не наблюдалось. Следовательно, можно предположить, что граничное условие, связанное с описанием обмена натрием с течением времени между электролитом и катодом на его внешней поверхности и приводящее к умеренным значениям диффузионных напряжений, дает более реалистичную картину численных исследований.

Выводы. Численными исследованиями установлены количественные и качественные особенности перераспределения во времени концентрации натрия, химически наведенных напряжений и интенсивности диффузионных напряжений в полом и сплошном цилиндрических катодах аппарата теста Рапопорта-Самойленко. Установлено, что граничное условие, связанное с описанием обмена натрием с течением времени между электролитом и катодом на его внешней поверхности и приводящее к умеренным значениям химически наведенных напряжений, дает более реалистичную картину диффузионных напряжений в углеродном катоде по сравнению с граничным условием о постоянстве концентрации натрия.

Список литературы: 1. *Rapoport M. B., Samoilenko V. N.* Deformation of cathode blocks in aluminium baths during process of electrolysis. *Tsvet Met.* – 1957. – 30. – PP.44-51. 2. *Sørliø M., Øye H. A.* Cathodes in Aluminium Electrolysis. Second Edition. - Düsseldorf: Aluminium-Verlag, 1994. 3. *Zolochovsky A., Hop J. G., Servant G., Foosnaes T., Øye H.A.* Rapoport-Samoilenko test for cathode carbon materials- I. Experimental results and constitutive modelling. *Carbon.* – 2003. – 41. – PP.497-505. 4. *Zolochovsky A.A., Goncharova G.V.*, Sodium penetration and chemically induced stresses in the hollow cylinder of Rapoport-Samoilenko apparatus - I. Constitutive modelling //Вісник НТУ «ХПИ». Тем. вип.: «Машинознавство та САПР». – 2007. – № 29. – С.139-149. 5. *Crank J.* The Mathematics of Diffusion. Second Edition // Oxford: Oxford University Press, 1999.

Поступила в редколлегию 28.01.08

УДК 621.833.6

С.Н. КАВЕЦКИЙ, НТУ “ХПИ”, **Т.В. ГЕРЕШ**, Харьковский аэрокосмический университет им. Жуковского “ХАИ”

ЗАВИСИМОСТЬ УГЛОВ ЗАЦЕПЛЕНИЯ ЗУБЧАТЫХ ПАР ПЛАНЕТАРНЫХ МЕХАНИЗМОВ СО СВЯЗАННЫМИ И НЕСВЯЗАННЫМИ КОЛЕСАМИ

У статті показана можливість проведення синтезу планетарних механізмів із зв'язаними і незв'язаними парами зубчастих коліс з урахуванням можливих значень кутів зацеплення на етапі проектування. Отримані залежності кутів зацеплення для пар зв'язаних і незв'язаних зубчастих коліс.

A possibility of realization of synthesis of planetary mechanisms with connected and unconnected pairs of cog-wheels is displayed in the paper taking into account the possible values of angles of action on the stage of design. Dependences of angles of action for the pairs of connected and unconnected cog-wheels.

Введение. При изготовлении зубчатых колес планетарного механизма немаловажное значение имеет выбор коэффициентов смещения режущего инструмента. При этом следует учитывать тот факт, что они влияют на значение угла передачи и качественные показатели каждой зубчатой пары. Поэтому при их выборе огромное значение имеет зависимость углов передачи в