

ства опорной секции и путем изменения геометрических размеров и конфигурации отдельных ее элементов добиваться повышения ее прочности и несущей способности.

Список литературы: 1. *Полищук Т.В., Пеклич М.М., Ткачук Н.Н.* Кинематический и силовой расчет механизма наклона плавильной печи // *Механiка та машинобудування.* – 2007.– № 1. – С.100-106. 2. *Полищук Т.В., Ткачук Н.Н.* К вопросу о кинематическом и силовом анализе механизма наклона плавильной печи // *Вестник НТУ „ХПИ“.* Тематический выпуск „Машиноведение и САПР“. – Харьков: НТУ „ХПИ“. – 2007. – Вып. 29. – С.122-131.

Поступила в редколлегию 21.12.07

УДК 539.3

А.Н. ТКАЧУК, НТУ „ХПИ“

ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕРМОУПРУГИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЕСС-ФОРМ ДЛЯ ЛИТЬЯ ПОД ДАВЛЕНИЕМ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ В ОТЛИВКЕ

Робота присвячена розробці методів дослідження термопружних контактних задач елементів прес-форм для литва під тиском з урахуванням фазових перетворень у виливку. Розглядається зв'язана термопружна постановка задачі у вигляді системи диференціальних рівнянь в частинних похідних і нерівностей. Пропонуються методи зведення диференціальної постановки задачі до варіаційних нерівностей і методи дискретизації отриманих варіаційних нерівностей.

This work is devoted development of methods of research of thermoelastic contact tasks of press mold elements for casting under pressure taking into account phase transformations in moulding. The connected thermoelastic target setting is examined as a system of differential equations in partials and inequalities. The methods of reduction of differential setting into variation inequalities and methods of digitization of got variation inequalities are offered.

Введение. Интенсификация режимов работы всех типов машин, в том числе технологических, привело к увеличению эксплуатационных нагрузок и температур, а также повышенному деформированию элементов этих машин. Наличие в конструкции большого числа сопряжений приводит к необходимости рассматривать задачу контактного взаимодействия элементов технологических машин. Действующие на элементы технологических машин нагрузки определяются происходящими в обрабатываемой детали физико-механическими процессами. Для деталей, формируемых из жидкого фазового состояния, ключевую роль играют явления кристаллизации и теплообмена. В свою очередь, интенсивность теплообмена между элементами машины зависят от состояния контакта (величина зазора или контактного давления). В связи с этим приходим к необходимости решения задачи контактного взаи-

модействия с учетом фазовых переходов и связанных механических и температурных полей.

В литературе в настоящий момент отсутствует систематическое и полное изложение постановок и методов решения этой задачи с учетом всех значимых факторов. Не исследовано также взаимное влияние этих факторов на результат моделирования, позволяющее выбирать рациональные технологические режимы и конструкцию машин. В связи с этим значительную актуальность приобретает разработка методов исследования связанных термомеханических контактных задач.

Цель данной работы – разработка математических и численных методов, алгоритмов и расчетных схем для исследования задачи контактного взаимодействия элементов технологических машин с учетом связанных механических и температурных полей фазовых переходов. Исследования проводятся на примере расчета пресс-форм для машин для литья под давлением (ЛПД). Для достижения поставленной цели исследования решены следующие задачи: анализа существующих расчетных схем исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) пресс-форм и машин для ЛПД; анализ существующих методов решения задач теплопроводности с фазовыми переходами; анализ методов решения связанных термоупругих контактных задач; разработка методов решения термоупругих контактных задач.

Состояние вопроса и постановка задачи. В СССР и странах СНГ вопросы расчета машин для литья под давлением и блоков пресс-форм освещены незначительно. Существующие монографии по этому вопросу ограничиваются простейшими моделями [1, 2]. Так, в монографии Ноговицина [1] предлагается расчетная схема жесткости и прочности массивных плит в рамках балочной теории. Для расчета разбрызгивания металла вследствие недостаточного запирания формы используется модель, не учитывающая деформацию плит. В работе [2] проводится приближенный расчет температурных деформаций по модели одноосного теплового контакта, не учитывающего реальных условий работы конструкций. Эти работы являются во многом основополагающими в области расчета и проектирования ЛПД, и приведенные в них методики отражают реальные теплофизические и механические процессы со значительной погрешностью.

В зарубежной литературе имеется ряд экспериментальных и теоретических работ, посвященных исследованию НДС и температурного режима пресс-форм [3]. В работе [4] рассмотрено деформирование плит и штанг машины для ЛПД и изучены основные причины

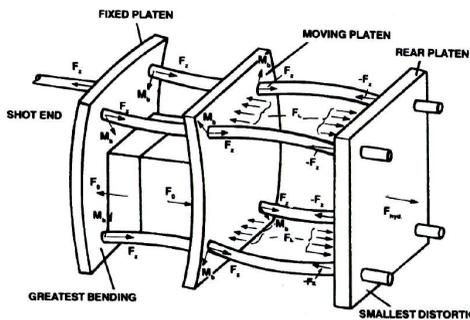


Рис. 1. Деформирование элементов машины литья под давлением [4]

образования облоя (рис. 1): неравномерное деформирование штанг и несовпадение центра приложения сил прессования и запираения, вызывающее перекося блока пресс-форм.

В работе [5] проводилось исследование температурного режима пресс-формы. Результаты моделирования с помощью метода конечных элементов (МКЭ) хорошо согласуются с результатами, полученными экспериментально. В работах [3, 6] рассмотрена возможность применения МКЭ и метода граничных элементов (МГЭ) к решению этих задач, а также разработаны рекомендации к расчетным схемам и выделены основные факторы, влияющие на распределение контактных давлений по плоскости разъема. Впоследствии были проведены параметрические исследования влияния конфигурации и размеров плит на деформацию формообразующих поверхностей и раскрытия стыка. Важные исследования были проведены для установления наиболее адекватных моделей нагружения и граничных условий [7].

Существенным недостатком перечисленных теоретических исследований является то, что термоупругая контактная задача рассматривается в последовательной постановке (сначала решается задача теплопроводности с фиксированной зоной контакта, а затем решается задача контактного взаимодействия с учетом температурных деформаций – рис. 2, а). В работах [8, 9] указывается на то, что температурная контактная проводимость между отливкой и формой, элементами формы между собой могут изменяться на порядки в зависимости от действующих контактных давлений и зазоров. Поэтому рассмотрение связанной постановки является существенным уточнением существующих моделей (рис 2, б).

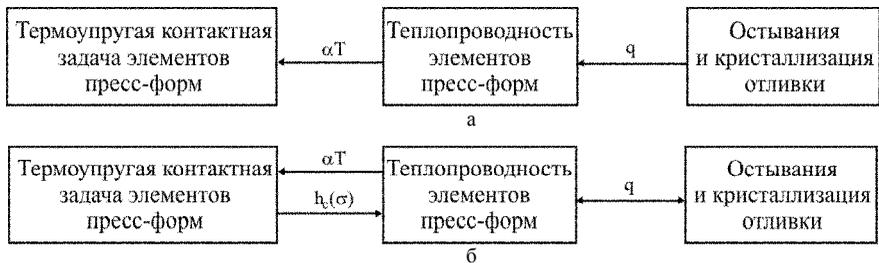


Рис. 2. Схема взаимосвязи подзадач

Проведенный обзор публикаций показал, что поставленная в качестве цели работы задача исследований разработана недостаточно, а расчет термоупругих контактных задач применительно к классу конструкций пресс-форм практически отсутствует в полной связанной постановке.

Методы решения контактных задач. Под контактной задачей подразумевается задача определения давления на части поверхности соприкасающихся тел, определение этой части поверхности, а также нахождение напряженно-деформированного состояние этих тел. Сложность решения контактных задач

заключается в том, что даже для линейно-упругих сред задача является нелинейной. Нелинейность определяется граничными условиями на части поверхности, которая может входить в контакт. Эти условия – непроникновение и положительность контактных давлений – записываются в виде неравенств. Еще более сложными являются задачи динамики с учетом контакта, и такие задачи и методы их решения в данной работе не рассматриваются.

Особенностью термоупругих контактных задач является тот факт, что если температуры поверхностей контактирующих тел не совпадает, то кроме усилий, через область контакта передается тепло. С одной стороны, контактные задачи чувствительны даже к небольшим изменениям контактной поверхности, поэтому малые изменения профилей поверхностей контактирующих тел вследствие температурных деформаций приводит к существенному изменению напряжено-деформированного состояния обоих тел. С другой стороны, зазор между телами выступает в качестве изолятора, а температурное контактное сопротивление поверхности сильно зависит от контактного давления. Это в свою очередь может существенно влиять на распределение температур в телах. Поэтому необходимо рассматривать термоупругую контактную задачу в связанной постановке, что значительно усложняет задачу.

Вариационные методы позволяют решать физически, геометрически и структурно нелинейные задачи, а также учитывать температурные и начальные деформации. Особые преимущества вариационные методы имеют в задачах пластичности и в контактных задачах. Применение в этих задачах дифференциальных постановок сопряжено с большими трудностями, потому что заранее неизвестна область контакта (пластичности), а граничные условия (дифференциальное уравнение состояния) для этих областей различны.

Особое значение вариационные методы приобрели с появлением метода конечных элементов. Применение МКЭ к вариационным неравенствам приводит к задачам нелинейной оптимизации. Контактные задачи для линейно-упругих сред приводят к хорошо изученным задачам квадратичного программирования – минимизация квадратичного функционала на выпуклом множестве, заданном неравенствами.

Задачи теплопроводности с фазовыми переходами. Температурные деформации оказывают существенное влияние на НДС пресс-форм, поэтому необходимо определить действующие на поверхность формы температурные нагрузки. Для этого проводится температурный анализ остывания отливки [10], обзор методов решения которых можно найти в книге [11]. Данная задача является нелинейной задачей теплообмена с учетом фазовых превращений. Нелинейность задач с фазовыми переходами обусловлена, прежде всего, наличием неизвестной границы фазового перехода. Кроме того, как и в обычных задачах теплопроводности, нелинейность связана с зависимостью теплофизических параметров от температуры.

Для моделирования процессов плавления или кристаллизации чистых веществ используется классическая модель Стефана, которая характеризуется заданием постоянной температуры на границе фазового перехода. Более об-

шие модели допускают образование пространственной зоны кристаллизации, в которой температура равна температуре кристаллизации, используются также модели с непостоянной температурой фазового перехода.

Для численного решения задач с фазовыми переходами используются два основных подхода. Первый класс методов использует выделение границы раздела фаз. Эти методы иногда называют *variable domain methods*. Второй класс образуют методы без выделения этой границы, или методы сквозного счета (*fixed domain methods*).

Проведенный литературный обзор показал, что связанная термоупругая контактная задача элементов технологических машин, особенно пресс-форм для ЛПД, является актуальной проблемой. За последнее время исследованию НДС и температурному режиму пресс-форм было посвящено большое количество экспериментальных и численных исследований. К недостаткам перечисленных работ можно отнести отсутствие связанной математической постановки. Кроме того, для термоупругой контактной задачи и задачи теплопроводности с фазовыми превращениями были определены наиболее эффективные методы решения и показана необходимость решать такие задачи в связанной постановке. В результате была сформулирована постановка задачи, позволяющей учесть связанность процессов деформирования, кристаллизации и теплообмена, которая в литературе на данный момент отсутствует.

1. Постановка задачи. Исследуется трехмерная нестационарная задача связанного термоупругого контактного взаимодействия системы n твердых тел, занимающих объемы V_i ($i = \overline{1, n}$), сопряженная по части поверхности с тепловой задачей теплопроводности с фазовыми переходами в жидком/твердом теле V_c . Влияние поля температуры на механическое поле определена через температурные деформации; обратное влияние рассматривается через зависимость температурной контактной проводимости от величины контактного зазора и контактных давлений. Задачей теплопроводности с фазовыми переходами в жидком/твердом теле V_c рассматривается в постановке Стефана для двухкомпонентного расплава с промежуточной фазой. Тогда данная задача в локальной постановке описывается системой дифференциальных уравнений упругости и теплопроводности, дополненных граничными и начальными условиями, условиями контакта и сопряжения:

$$L^e(u, T) = 0, \mathbf{r} \in V_i, i = \overline{1, n}; \quad (1)$$

$$\Phi_1(u, \sigma)|_{S_i} = 0, i = \overline{1, n}; \Phi_2(T, q)|_{S_i} = 0, i = \overline{1, n};$$

$$V_i \cap V_j = S_{\sigma_{ij}}, i, j = \overline{1, n}, i \neq j;$$

$$\Phi_3(u, \sigma, T, q)|_{S_{\sigma_{ij}}} = 0, i, j = \overline{1, n}, i \neq j; S_{st} = V_c \cap V_i, i = \overline{1, n}; \quad (2)$$

$$\Phi_4(u, \sigma, T, q)|_{S_i} = 0;$$

$$L^s(T) = 0, \mathbf{r} \in V_c, \quad (3)$$

где $L^e, L^s, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ – операторы задачи термоупругости, теплопроводности с фазовыми переходами, граничных условий и условий сопряжения соответственно.

Требуется определить поля перемещений u , напряжений σ и температур T в каждом из тел, а также области контакта $S_{\sigma ij}$ и распределение контактных давлений и тепловых потоков q через контакт твердых тел и контакт с отливкой S_{si} . Приходим в общем случае к связанной системе дифференциальных и алгебраических уравнений, которая является термоупругой задачей Синьорини, сопряженной с задачей Стефана. Для разработки методов решения поставленной задачи привлекается теория вариационных неравенств.

2. Соотношения и методы решения связанной термоупругой контактной задачи. В данной работе рассматривается локальная лагранжева постановка связанной термоупругой контактной задачи и вариационная постановка термоупругой контактной задачи. Приведены вариационные принципы для термоупругого тела, исследовано вариационное неравенство в несвязанной термоупругой контактной задаче, показана эквивалентность вариационной постановки дифференциальной, а также даны ссылки на литературу, где доказана существование и единственность решения. Кроме того, рассмотрена постановка задачи с множителями Лагранжа, приводящая к семейству алгоритмов решения контактных задач. Во всех постановках задача решается в перемещениях, потому что этот подход допускает эффективную реализацию для метода конечных элементов, а также в силу того, что ограничения в контактных задачах задаются относительно перемещений.

Затем приводятся основные соотношения моделей температурного контактного сопротивления. Эти модели основаны на представлении реальной поверхности набором случайных гребешков и впадин, вступающих в контакт лишь на малой доли площади, и включают описания механизма контакта на микро- и макроуровне. На основе полученных зависимостей и экспериментальных данных делается вывод о необходимости рассматривать связанные температурные и механические поля и о способах их учета в расчетной схеме.

Рассматриваются методы решения теплопроводности с фазовыми переходами. Приведена постановка задачи с промежуточной фазой и ее энтальпийная модификация. На основе энтальпийной постановки приведен метод сквозного счета. Рассмотрены методы дискретизации и численные процедуры интегрирования по времени. Также приводятся условия сопряжения, позволяющие связать эту задачу с термоупругой задачей.

В конце раздела приведены матричные уравнения связанной задачи для МКЭ и процедуры их решения.

Локальная постановка связанной термоупругой контактной задачи. Без потери общности можно рассмотреть только одну контактную пару $i = 1, j = 2$. Рассмотрим два термоупругих линейных тела [12], занимающее в про-

странстве область V_1 и V_2 , вся поверхность которых разбита на три части: S_u, S_F, S_c – области закрепления, нагрузки и возможного контакта соответственно. Уравнение области возможного контакта обозначим:

$$\Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (4)$$

так что неравенство $\Psi(\mathbf{r}) > 0$ задает внешние точки. Предположим, что поверхность тела достаточно гладкая, т.е. $|\text{grad}\Psi(X_i)| < \infty$, нормаль к поверхности везде существует и изменяется непрерывно. Для произвольной точки поверхности \mathbf{r}_0 введем единичный вектор нормали $\mathbf{n}(\mathbf{r}_0)$, ответную точку поверхности \mathbf{r}_{00} и начальный зазор δ [13, 14]:

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) = \frac{\nabla\Psi(\mathbf{r}_0)}{|\nabla\Psi(\mathbf{r}_0)|}; \quad \mathbf{r}_{00} = \arg \min_{\mathbf{r} \in S_{c,2}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}(\mathbf{r}_0)); \quad \delta = \min_{\mathbf{r} \in S_{c,2}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}(\mathbf{r}_0)). \quad (5)$$

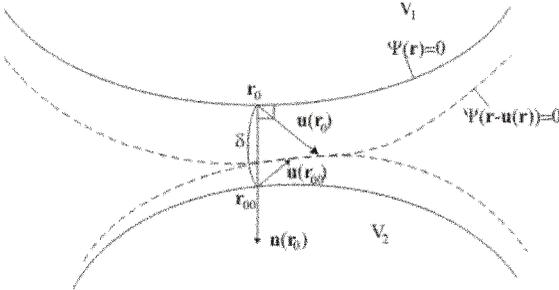


Рис. 3. Геометрия контакта двух тел

Обозначим через σ_N и σ_T нормальную и касательную составляющую контактного давления:

$$\sigma_N = \sigma_{ij} n_i n_j,$$

$$\sigma_{Ti} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_N n_i.$$

Обозначим реальную область контакта $V_1 \cap V_2 = S_\sigma$ и линеаризуем его:

$$S_\sigma = \{r_0 \in V_1 : (u(r_0) - u(r_{00}), n(r_0)) = \delta\}; \quad S'_\sigma = \{r_{00} \in V_2 : (u(r_0) - u(r_{00}), n(r_0)) = \delta\}.$$

Далее приводим полную систему соотношений термоупругой контактной задачи. Геометрические соотношения (Коши):

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}. \quad (6)$$

Физические соотношения:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} (T - T_{ref})), \quad q_i = \lambda(T) T_{,i}. \quad (7)$$

Уравнения движения, баланса энергии:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \quad q_{i,i} + w = \text{ср} T + 3K\alpha T \dot{\theta}. \quad (8)$$

Граничные условия:

$$u|_{S_u} = u^*; \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_F} = X_{vi}; \quad (9) \quad T|_{S_T} = T^*; \quad q_i n_i|_{S_q} = q^*; \quad (T - T_{bulk})|_{S_{conv}} = \beta q_i n_i. \quad (10)$$

Начальные условия:

$$u_i|_{t=0} = u_{i0}; \quad \dot{u}_i|_{t=0} = \dot{u}_{i0}; \quad T|_{t=0} = T_0. \quad (11)$$

Геометрические и силовые условия контакта:

$$(u(r_0) - u(r_{00}), n(r_0)) \leq \delta, \quad r_0 \in S_c; \quad (u(r_0) - u(r_{00}), n(r_0)) \leq 0, \quad r_0 \in S_\sigma; \quad (12)$$

$$\sigma_N = \sigma'_N, \quad r_0 \in S_\sigma; \quad \sigma_N \leq 0, \quad ((u(r_0) + u(r_{00}), n(r_0)) - \delta) \sigma_N = 0, \quad r_0 \in S_c; \quad (13)$$

$$\sigma_{Ti} = 0, \quad r_0 \in S_\sigma; \quad \sigma'_{Ti} = 0, \quad r_0 \in S_\sigma,$$

и условия неидеального температурного контакта:

$$\begin{cases} (T(r_0) - T'(r_{00})) = h_c q_i n_i, \quad q_i n_i = q'_i n'_i, \quad r_0 \in S_\sigma; \\ q_i n_i = 0, \quad q'_i n'_i = 0, \quad r_0 \in S_c / S_\sigma. \end{cases} \quad (14)$$

Система соотношений (6)-(14) задают полную систему уравнений, начальных и граничных условий, контактных ограничений для нестационарной связанной термоупругой контактной задачи.

Вариационные принципы термоупругости. Рассмотрим то же упругое тело (см. рис.4) под действием силовых и температурных нагрузок. Известно, что для задач стационарной теплопроводности влияние поля деформаций на поле температур $T(x_i)$ отсутствует. Таким образом, задача теплообмена может быть решена отдельно, а температура может рассматриваться как один из видов нагрузки.

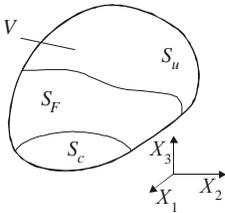
Возьмем за основу физическое соотношение Дюамеля-Неймана [15, с.251-253; 16, с.31-45]

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \alpha_{kl} (T - T_{ref})) \quad (15)$$

для общего случая упругого тела. В случае изотропного тела

$$E_{ijkl} = 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad \alpha_{kl} = \delta_{kl} \alpha, \quad (16)$$

Рис. 4. Упругое тело с областью контакта



где μ, λ – постоянные Ляме, α – коэффициент температурного расширения (в случае небольшого изменения диапазона μ, λ и α не зависят от T).

Таким образом, можно дополнить основные уравнения теории упругости таким физическим законом и решить поставленную задачу.

По аналогии запишем вариационный принцип Лагранжа для перемещений для термоупругой задачи [15, с.135-138]. Предварительно введем потенциал внешних объемных ϕ и поверхностных сил ϕ_v :

$$\delta\phi = X_i \delta u_i|_{X_i \in V}; \quad \delta\phi_v = X_i \delta u_i|_{X_i \in S_F}, \quad (17)$$

а также удельную энергию деформации с учетом температуры

$$A(u_i, T) = \frac{3E}{2(1-2\nu)} \theta^2 + G e_{ij} e_{ij} - \frac{3E}{1-2\nu} \theta \alpha T, \quad (18)$$

где $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3 \delta_{ij} \theta$ – девиатор тензора деформаций.

Тогда вариационный принцип минимума потенциальной энергии на множестве кинематически допустимых решений имеет вид:

$$L^T(u) = \iiint_V (A - \Phi) dV - \iint_{S_F} \Phi_v dS \rightarrow \min; \quad (19)$$

$u|_{S_u} = u^*$ – граничные условия; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ – соотношения Коши;

$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ – закон Гука.

Получим уравнение Эйлера для функционала $L^T = \iiint_V \left[W(\varepsilon_{ij}) - \frac{3E}{1-2\nu} \varepsilon_{ii} \alpha T - X_i u_i \right] dV - \iint_{S_F} X_{v_i} u_i dS$ и естественные граничные условия на части поверхности S_F , которые потребуются в дальнейшем для доказательства эквивалентности вариационной и дифференциальной постановок.

Покажем, что стационарная задача (6)-(9), (12)-(13) при заданном распределении температур и абсолютно жестком теле V_1 эквивалентна некоторой вариационной:

$$\begin{cases} \left(2\mu \varepsilon_{ij} \right)_{,j} + (\lambda \theta)_{,i} - \left[\alpha T \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \right]_{,i} + X_i = 0; \\ u|_{S_u} = u^*; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & 2\mu \varepsilon_{ij} n_j + \lambda \theta n_i - \alpha T \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) n_i = X_{v_i}, \quad X_i \in S_F; \\ \sigma'_T = 0; & \begin{cases} \Psi(X) + u \operatorname{grad} \Psi(X) = 0; \\ \sigma'_{N'} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \Psi(X) + u \operatorname{grad} \Psi(X) > 0; \\ \sigma'_{N'} = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

Ведем пространство Соболева V функций, обладающих обобщенными производными, суммируемыми с квадратом, и обращающихся в нуль на S_u , и подмножество K в этом пространстве, причем

$$\|v\| = \left(\int_V v_i v_i dV + \int_V v_{i,k} v_{i,k} dV \right)^{\frac{1}{2}}; \quad K = \{v \in V; \Psi(X) + \operatorname{grad} \Psi(X) v(X) \geq 0 \quad \forall X \in S_c\} \quad (22)$$

Подмножество K – замкнутое и выпуклое [17].

Введем в рассмотрение билинейный функционал $A(u, v)$:

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \int_V \left[2\mu \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) + \lambda \theta(u) \theta(v) \right] dV; \\ L(v) &= \int_V \left[X_i v_i + \alpha T \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon_{ii}(v) \right] dV + \int_{S_f} X_{v_i} v_i dS, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\varepsilon_{ij}(u)$, $\theta(u)$ – деформации, вычисленные по перемещениям u .

Приведем две теоремы без доказательства.

Теорема 1. Решение задачи (22)-(23) эквивалентно вариационному неравенству:

$$A(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \forall v \in K, u \in K. \quad (24)$$

Теорема 2. Неравенство (24) эквивалентно задаче минимизации функционала:

$$J(u) = \frac{1}{2} A(u, u) - L(u), u \in K. \quad (25)$$

Доказательство существования решения проводится методом дискретизации – аппроксимации конечномерной задачей с последующим переходом к пределу при стремлении размерности пространства к бесконечности [17]. Доказательство единственности опирается на строгую выпуклость (v -эллиптичность функционала), которая доказывается с помощью неравенства Корна [2, 12, 16].

Метод неопределенных множителей Лагранжа. Покажем, что минимизация функционала (25) на множестве заданном (22) эквивалентна минимизации функционала:

$$\Lambda(u, \lambda) = \frac{1}{2} A(u, u) - L(u) + P(u, \lambda), u \in K, \quad (26)$$

где $P(u, \lambda) = \int_{S_c} \lambda (\Psi(X) + u \operatorname{grad} \Psi(X)) dS$ (λ определена и неотрицательна на

$\Psi(X)$), при этом вариация $\delta \lambda$ только неположительная).

Для этого возьмем первую вариацию от выражения (25) и возьмем интеграл по частям:

$$\begin{aligned} \delta \Lambda &= \iiint_V \left[-\sigma_{ij,j} + \left(\frac{E}{1-2\nu} \alpha T \right)_{,i} - X_i \right] \delta u_i dV - \iint_{S_f} \left[\sigma_{ij} n_j - X_{v_i} - \frac{E}{1-2\nu} \alpha T n_j \right] \delta u_i dS - \\ &\quad - \iint_{S_c} \left[\sigma_{ij} n_j - \frac{E}{1-2\nu} \alpha T n_j \right] \delta u_i + \int_{S_c} \delta \lambda (\Psi(X) + u_i \operatorname{grad} \Psi(X)) dS + \\ &\quad + \int_{S_c} \lambda \delta u_i \operatorname{grad} \Psi(X) dS = \iiint_V \left[-\sigma_{ij,j} + \left(\frac{E}{1-2\nu} \alpha T \right)_{,i} - X_i \right] \delta u_i dV - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \iint_{S_f} \left[\sigma_{ij} n_j - X_{v_i} - \frac{E}{1-2\nu} \alpha T n_j \right] \delta u_i dS + \int_{S_c} \delta \lambda (\Psi(X) + u_i \text{grad} \Psi(X)) dS - \\
& - \int_{S_c} \left[\sigma_{ij} n_j - \frac{E}{1-2\nu} \alpha T n_j - \lambda \text{grad} \Psi(X) \right] \delta u_i dS \geq 0,
\end{aligned}$$

откуда получаем полную систему (23) с условиями (22), которая эквивалентна задаче минимизации.

Температурный контакт. В приведенной выше математической постановке термоупругой задачи не конкретизировался вид зависимости температурной контактной проводимости (ТКП) h_c от нормального контактного давления σ_N и температур поверхностей T_1 и T_2 . Не было дано и физическое объяснение этой зависимости. Далее, следуя классическим работам в этой области [18, 19], будет изложены физическая модель температурного контакта и основные зависимости.

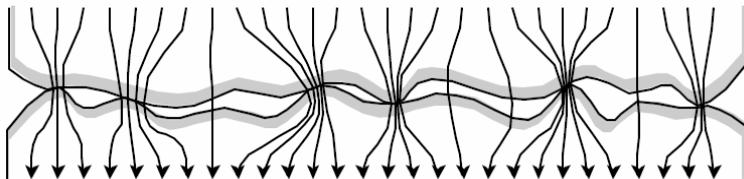


Рис. 5. Теплопередача через поверхность [19]

Для температурного контакта без смазки теплопередача осуществляется с помощью трех механизмов: теплообмен через вершины микронеровностей, тепловое излучение и через газ (воздушную прослойку) между телами. Предполагая, что механизмы теплопередачи слабо влияют друг на друга, строят модели каждого из них, а затем вклады ТКП от каждого суммируют.

Рассмотрим теплопередачу через вершины микронеровностей. Поверхности всех реальных тел обладают шероховатостью (рис. 5). В контакт входят лишь вершины микронеровностей (гребешков), и реальная площадь контакта составляет проценты номинальной. Под воздействием контактных давлений микронеровности деформируются, поэтому реальная площадь контакта и количество вошедших в контакт микронеровностей сильно зависят от контактных давлений. Кроме того, механические свойства материала неровностей и непосредственно под поверхностью отличаются от свойств сердцевины.

Поэтому модель термического контакта, основывающаяся на реальной площади контакта, должна описывать микрогеометрию поверхности, деформирование гребешков и их реальные механические свойства. ТКП через гребешки определяется по формуле [19]:

$$h_c = \frac{1.25 \lambda m}{\sigma} \left(\frac{\sigma_N}{H} \right)^{0.95}, \quad (27)$$

где $\sigma = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L z^2(x) dx}$, $m = \frac{1}{L} \int_0^L \left| \frac{dz(x)}{dx} \right| dx$ – параметры поверхности, вычисляемые по профилю поверхности $z(x)$, λ – теплопроводность, H – твердость, σ_N – нормальные напряжения.

Таким образом, основной вклад в ТКП реальных поверхностей вносит теплопередача через гребешки микронеровностей, которая может достаточно точно быть определена по формуле (27). Теплопередача через газ и излучения на порядок меньше.

Задача теплообмена с фазовыми превращениями. Рассматривается теплофизический аспект кристаллизации отливки, а именно задача теплообмена с учетом фазового превращения твердое тело – жидкость. Соответствующая математическая модель характеризуется наличием подвижных заранее неизвестных границ фазового перехода (рис. 6), что относит ее к более широкому классу задач со свободными границами [11].

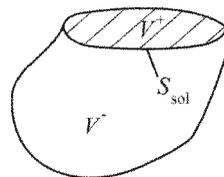


Рис. 6. Граница фазового перехода

Кристаллизация без перераспределения примеси. Рассмотрим простейшую модель кристаллизации бинарного сплава, основанную на следующем предположении. Предположим, что за время кристаллизации примесь не успевает сколько-нибудь существенно перераспределиться по веществу. В рамках равновесной модели это предположение будет соответствовать тому, что фазовый переход происходит в интервале температур (T_{liq}, T_{sol}) , где T_{sol} – равновесная температура солидуса (начала затвердевания) и T_{liq} – температура ликвидуса (начала плавления, конца затвердевания). Выделение теплоты кристаллизации учитывается заданием эффективной теплоемкости $\tilde{c}(T)$ по формуле

$$\tilde{c}(T) = c(T) - L \frac{\partial \Psi}{\partial T}, \quad (28)$$

где Ψ – объемная доля твердой фазы, определяемая по равновесной диаграмме конкретного сплава. Тепловое поле при фазовых превращениях бинарного сплава в нашем приближении будет описываться обычным уравнением теплопроводности

$$\tilde{c}(T) \rho \frac{\partial T}{\partial t} + v \text{grad} T = \text{div}(\lambda(T) \text{grad} T) + w, \quad (29)$$

особенность которого проявляется в задании эффективного коэффициента теплоемкости.

Приближенное решение задачи для уравнения (29) может основываться на использовании стандартных температурных конечных элементов с под-

счетом эффективной теплоемкости $\tilde{c}(T)$ в каждой точке интегрирования внутри элемента. При этом ошибка определения границы фаз сравнима с размерами самого конечного элемента, что вызывает погрешность вычисления эффективной матрицы теплоемкости и матрицы теплопроводности. Определяющие уравнения тогда принимают вид [11]:

$$[C]u + [K]u = F, \quad (30)$$

где $[C], [K]$ – эффективной матрицы теплоемкости и матрицы теплопроводности; u, \dot{u} – векторы узловых температур и скоростей изменения температуры; F – вектор внешних узловых тепловых потоков.

Для интегрирования полученной системы уравнения эффективно использовать семейство разностных схем обобщенных трапеций [11]

$$u^{n+1} = u^n + \theta \dot{u}^{n+1} + (1-\theta) \dot{u}^n, \quad (31)$$

где u^i – вектор узловых температур на i -ом шаге интегрирования; θ – параметр метода интегрирования.

При $\theta = 1$ получаем чисто неявную схему интегрирования, при $\theta = 0.5$ – симметричную схему, $\theta = 0$ – явную схему. Из (30)-(31) получаем разностное соотношение:

$$\left(\frac{1}{\theta \Delta t} [C] + [K] \right) u^{n+1} = F + [C] \left(\frac{1}{\theta \Delta t} u^n + \frac{1-\theta}{\theta} \dot{u}^n \right). \quad (32)$$

Учитывая, что коэффициенты матриц $[C]$ и $[K]$ зависят от температуры, для получения u^{n+1} необходимо решить систему нелинейных уравнений. Для этого можно использовать процедуру Ньютона-Рафсона. Для получения точных результатов численного интегрирования необходимо обеспечить абсолютную и асимптотическую устойчивость. Применение схем с параметром $\theta \in [0.5, 1]$ обеспечивает абсолютную устойчивость. Применение θ , близких к 1, дает большую погрешность в затухании высоких мод и приводит к плохой асимптотической устойчивости, что, в свою очередь, приводит к уменьшению шага интегрирования и повышению вычислительных затрат [20]. Расчетная практика показывает, что $\theta \in [0.5, 0.75]$ дает наилучшие результаты.

Соотношения (6)-(14), (27)-(29) задают полную систему уравнений поставленной задачи. Предлагается свести систему соотношений (6)-(14) к эквивалентной задаче отыскания седловой точки функционала (23), а дифференциальные уравнения (28)-(29) – к уравнениям (32). Для приближенного решения задачи поиска седловой точки (25) и уравнений (28)-(29) используется МКЭ.

Заключение. В статье предложена математическая модель связанного термоупругого контактного взаимодействия системы твердых тел между собой и с телом, в котором происходят фазовые переходы. В модели учитываются температурные деформации в твердых телах, изменение условий теплообмена между

телями в зависимости от условий контакта и выделение скрытой теплоты кристаллизации. При описании процессов в телах используется лагранжев подход. Локальная постановка задачи представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных с дополнительными ограничениями в виде неравенств на части границы тел и подвижной поверхности раздела фаз. Решение задачи в локальной постановке сопряжено с большими трудностями, поэтому исходная задача путем эквивалентных преобразований и замен переменных была сведена к более приемлемой вариационной постановке.

Термоупругая контактная задача была исследована с позиций теории вариационных неравенств. В работе приведены теоремы об эквивалентности дифференциальной постановки задачи без учета теплообмена через контакт некоторому вариационному неравенству. В свою очередь, вариационное неравенство может быть сведено к задаче минимизации функционала на множестве, заданном ограничениями, или поиску седловой точки модифицированного функционала. На основе изложенных вариационных постановок создаются семейства контактных элементов, которые могут быть встроены в существующие пакеты конечно-элементных расчетов.

Кроме того, учтен реальный механизм передачи тепла в контактных парах и зависимость контактного сопротивления от контактного давления.

Задача теплообмена с учетом фазовых переходов также допускает вариационную постановку (с помощью преобразования Байокки). Однако в работе была использована энтальпийная постановка, позволяющая свести задачу к дифференциальному уравнению в частных производных с переменными коэффициентами. При этом явно граница фаз в процессе решения не выделяется. Для решения дифференциального уравнения была использована конечно-элементная реализация метода сквозного счета.

Полученные конечно-элементные постановки для задачи теплообмена с учетом фазовых переходов и термоупругой контактной задачи могут быть затем решены совместно или последовательно.

К достоинствам предложенной математической модели, численных методов и алгоритмов решения можно отнести то, что рассматривается термоупругая задача в комплексе с задачей кристаллизации и обеспечивается вариативность при выборе методов решения, средств построения и степени дискретизации. Это позволяет адекватно моделировать с заданной точностью физические процессы в технологических машинах.

Разработанная математическая модель, численные алгоритмы и методы позволили непосредственно перейти к исследованию термоупругих контактных задач технологических машин. Были создана расчетная схема деформирования и температурного режима технологических машин на примере прессформ для литья под давлением.

Таким образом, в статье была предложена математическая модель связанного термоупругого контактного взаимодействия системы твердых тел между собой и телом с фазовым переходом, исходная дифференциальная постановка задачи была сведена к вариационному неравенству, исследована

корректность этой модели в рамках некоторых предположений.

В данной работе не было освящено ряд важных вопросов, на которые необходимо обратить внимание: процессы, связанные с заполнением жидким металлом формы и деформированием твердой части отливки; оценка прочности и износостойкости элементов пресс-форм по критериям температурной и механической усталости и ползучести; повышение эффективности численных методов; экспериментальная проверка полученных результатов. Данные вопросы послужат темой дальнейших исследований.

Список литературы: 1. 1. *Ноговицин Б.Ф.* Основы расчета и проектирования машин для литья под давлением. – Иркутск: Изд-во Иркутского университета, 1987. – 127с. 2. *Горюнов И.И.* Пресс-формы для литья под давлением. Справочное пособие. – Л.: Машиностроение. 1973 – 256 с. 3. *Ahuett-Garza H., Hegde K., Padiyar G., Miller R. A.* NADCA-Sponsored Research: FEM Analysis of Die Casting Die Deflections: Part II – Results // Transactions, 18th NADCA International Die Casting Congress and Exposition, Indianapolis, IN, 1995. – PP.25–31. 4. *Martin R. Barone, David A. Caulk* Analysis of thermo-mechanical distortion in die casting // Transactions of the 20th International Die Casting Congress and Exposition Cleveland, Ohio, November 1–4, 1999. 5. *Miller R. Allen* Modeling the Mechanical Performance of Die Casting Dies // Final Report DOE Project, The Ohio State University. 6. *Dedhia S., Ahuett-Garza H., Miller R. A., Choudhury A. K.* NADCA-Sponsored Research: Analysis of Proud Inserts on Die Deflections and Slide Blowback in Die Casting Dies // Transactions, 19th NADCA International Die Casting Congress and Exposition, Minneapolis, MN, 1997. – PP. 35–40. 7. *Ahuett-Garza H.* Characterization of loads in die casting and prediction of die deflections // Ph.D. Dissertation, The Ohio State University. 8. *Martin R. Barone, David A. Caulk* Analysis of thermo-mechanical distortion in die casting // Transactions of the 20th International Die Casting Congress and Exposition Cleveland, Ohio, November 1–4, 1999. 9. *Barbera J.R., Ciavarella M.* Contact mechanics // International Journal of Solids and Structures 37 (2000). – PP.29–43. 10. *Miller R. Allen* Modeling the Mechanical Performance of Die Casting Dies // Final Report DOE Project. – The Ohio State University. 11. *Martin R. Barone, David A. Caulk* Analysis of thermo-mechanical distortion in die casting // Transactions of the 20th International Die Casting Congress and Exposition Cleveland, Ohio, November 1–4, 1999. 12. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 510 с. 13. *Barber J.R.* Indentation of semi-infinite solid by a hot sphere. – Internat. J. Mech. Sci., 1973. – 15. – PP.813. 14. *Dundurs J.* Distortion of a body caused by thermal expansion. – Mech. Res. Comm., 1974. – 1. – PP. 121. 15. *Yogesh S. Kulkarni* Study of the effect of structural variables of die and die casting machine on die deflections // The Ohio State University, 2001. 16. *Григолюк Э.И., Толкачев* Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с. 17. *Развитие* теории контактных задач в СССР. – М.: Наука, 1976. – 494 с. 18. *Краснюк П.П.* Исследование отрыва контактирующих поверхностей при термоупругом контактным взаимодействием с нестационарным фрикционным тепловыделением // Прикладная механика и техническая физика. – 2004. – Т. 45. – №5. – С.127–130. 19. *Гловински Р., Лионс Ж.Л., Трёмольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. Перев. с фр. А.С. Кравчука под ред. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1979 – 574с. 20. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 616 с.

Поступила в редколлегию 23.12.2007