

Вісс. Гр. КЛИМЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, НТУ “ХПІ”

### ДО ПОБУДОВИ ЗОНИ ВІДЧУЖЕННЯ ДЛЯ СИСТЕМИ ОБ’ЄКТІВ

В багатьох задачах конструкторського проектування, пов’язаних із розміщенням об’єктів (компактів), доводиться вже на стадії прийняття рішення, або ж на стадії формалізації цих задач враховувати, що ці об’єкти є джерелами ризиків (становлять загрозу суміжним об’єктам). Тобто в цих задачах фактичними об’єктами розміщення є їх зони відчуження, побудова яких виділяється в окрему задачу. В даній роботі пропонується (для деякого класу функцій ризиків) загальний підхід до побудови зони відчуження опуклих компактів та їх систем. В статті наведені конкретні ілюстративні приклади.

In many tasks of constructor’s design related to placing of objects (compacts), it is necessary to take into consideration already on the stage of decision-making or on the stage of formalization of these tasks that these objects are the sources of risks (make a threat to contiguous objects). That is in these tasks the actual objects of placing are their areas of alienation, the construction of which is selected to separate task. In this work the general approach is offered (for some class of risk functions) to the construction of area of alienation of convex compacts and their systems. In the paper concrete illustrative examples are exemplified.

Представлена робота тісно примикає до теоретичних досліджень, поданих в статті [1], фактично поповнює їх. Тож в подальшому викладі будемо послуговуватись термінами і позначеннями, вже введеними в згаданій статті.

Отже, нехай в евклідовому точково-векторному просторі  $R^n$  означено довільний опуклий компакт  $A$ , якому зіставлено довільний строго спадний шаблон (шаблон ризику)  $h(d) \in \mathbf{G}$  ( $\mathbf{G}$  є множина неперервних і не зростаючих, додатно визначених на  $R_+$  функцій). Зауважимо, що в силу опуклості компакта  $A$  для строго спадної функції  $h(d)$  існує неперервна редукція (функція ризику, див. [1]) суперпозиції функції  $h(d)$  і евклідової відстані –

$$\max_{Y \in A} h(d(X, Y)) = h\left(\min_{Y \in A} d(X, Y)\right) = h(d(X, p(X))) =$$

$$h(m(X, A)) \stackrel{\text{def}}{=} M(X, h, A): R^n \rightarrow R_+; M(X, h, A)|_{X \in A} = h(0) > 0.$$

Зауважимо, виходячи із того, що при  $\forall Y \in A$   $h(d(X, Y)) \leq M(X, h, A)$ , маємо включення:

$$\text{Hyp } h(d(X, Y)) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (X, I) \in R^{n+1} \mid h(d(X, Y)) \geq I \right\} \subset$$

$$\left\{ (X, I) \in R^{n+1} \mid M(X, h, A) \geq I \right\} = \text{Hyp } M(X, h, A), \quad (1)$$

причому  $\text{Fr Hyp } h(d(X, Y)) \cap \text{Fr Hyp } M(X, h, A) \neq \emptyset$ , то гіпограф функції ризику  $\text{Hyp } M(X, h, A)$  обгортає зверху сім’ю гіпографів локальних ризиків  $\text{Hyp } h(d(X, Y))|_{Y \in A}$  компакта  $A$ . Для зручності, а також з метою наближення термінології теоретичного дослідження даної статті до можливого його практичного використання, умовимось в подальшому викладі лебегову множини

$$L(M(X, h, A), I) = \left\{ X \in R^n \mid M(X, h, A) \geq I \right\} =$$

$$\left\{ X \in R^n \mid h(m(X, A)) \geq I \right\} = \left\{ X \in R^n \mid m(X, A) \leq h^{-1}(I) \right\} \quad (2)$$

іменувати також і зоною відчуження для компакта  $A$ , яка відповідає шаблону ризику  $h(d)$  і параметру ризику  $I > 0$ . Із рівності (2) випливає, що для побудови зон відчуження компакта  $A$  бажано мати нормальну функцію цього компакта. Метод побудови нормальних функцій для широкого класу компактів простору  $R^2$  наведений в роботі [3]. В цій статті ми обміркуємо загальний підхід до побудови нормальних функцій компактів евклідового простору, без обмеження їхньої розмірності.

Нехай опуклий компакт  $A = \bigcup_{i=1}^{i=m} A_i$ , де  $A_i$  є неперетинні між собою мно-

говиди розмірності  $p_i = \dim A_i \leq n$ , і нехай

$$Y = \overline{U_i(S)} = (U_{i1}(S), \mathbf{K}, U_{in}(S)): T_i \rightarrow A_i,$$

де  $Y = (y_1, \mathbf{K}, y_n) \in R^n$  і  $S = (s_1, \mathbf{K}, s_{p_i}) \in T_i \subset R^{p_i}$  є параметричні

зображення цих многовидів. В силу опуклості компакта  $A$ , простір  $R^n$  розбивається на  $m$  неперетинних між собою областей Діріхле  $D_i = \left\{ X \in R^n \mid p(X) \in A_i \right\}$  відповідних многовидам  $A_i$ . Тобто таких  $m$  неперетинних між собою областей Діріхле  $D_i$ , що для  $\forall X \in D_i$  існує єдина точка (проекція)  $p_i(X) \in A_i$  і така, що  $d(X, p_i(X)) = \min_{Y \in A_i} d(X, Y)$ .

Позначасмо через  $m^b(X, A_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} d(X, p_i(X)) & X \in D_i \\ 0, & X \notin D_i \end{cases}$  звування нормальної функції

$m(X, A)$  на многовид  $A_i$ . Зрозуміло, що проєкції  $p_i(X) = (y_1, \mathbf{K}, y_n) \in A_i$  буде відповідати єдиний розв’язок системи

$$\left\{ \frac{\partial d(X, \overline{U_i(S)})}{\partial s_j} = 0, \quad j = \overline{1, p_i}. \right. \quad (3)$$

Нехай  $S^*(X) = (s_1^*(X), \mathbf{K}, s_{p_i}^*(X))$  і є цей розв'язок системи (3), і  $X_{D_i}(X)$  – характеристична функція області  $D_i$ , тоді, очевидно, що

$$m^b(X, A_i) = d\left(X, \overline{U_i(S^*(X))}\right) \cdot X_{D_i}(X). \quad \text{До речі, якщо}$$

$D_i = \{X \in R^n \mid F_i(X) \geq 0\}$ , то характеристичну функцію області  $D_i$  можна записати так:  $X_{D_i}(X) = 0.5 \cdot (1 + \text{signum}(F_i(X)))$ ; якщо

$D_i = \{X \in R^n \mid F_i(X) < 0\}$ , то  $X_{D_i}(X) = 0.5 \cdot (1 - \text{signum}(F_i(X)))$ . Тут  $\text{signum}(F_i(X)) = \begin{cases} 1, & F_i(X) \geq 0, \\ -1, & F_i(X) < 0 \end{cases}$ , як це прийнято в СКМ Maple 11.

Таким чином, якщо побудовані звуження  $m^b(X, A_i)$  нормальної функції  $m(X, A)$ , то саму нормальну функцію можна записати так:

$$m(X, A) = \bigvee_{i=1}^{i=m} m^b(X, A_i), \quad \text{або ж у вигляді: } m(X, A) = \sum_{i=1}^{i=m} m^b(X, A_i).$$

Тобто нормальну функцію  $m(X, A)$  можна „склеїти” із її звужень.

Звідси випливає, що зона відчуження для компакта  $A$ , яка відповідає шаблону ризику  $h(d)$  і параметру  $I > 0$ , може бути означена наступним чином:

$$L(M(X, h, A), I) = \left\{ X \in R^n \mid h\left(\sum_{i=1}^{i=m} m^b(X, A_i)\right) \geq I \right\}, \quad (4)$$

або ж так:

$$L(M(X, h, A), I) = \left\{ X \in R^n \mid h\left(\bigvee_{i=1}^{i=m} m^b(X, A_i)\right) \geq I \right\}. \quad (5)$$

Межа зони відчуження  $Fr L(M(X, h, A), I)$  буде визначатися одним із рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{i=m} m^b(X, A_i) = h^{-1}(I), \quad \text{або} \quad \bigvee_{i=1}^{i=m} m^b(X, A_i) = h^{-1}(I).$$

Подібні, наведеним вище, міркування проводимо і у випадку, коли опуклому компакт  $A$  зіставляється довільний строго зростаючий шаблон ризику  $g(d) \in \mathbf{F}$  ( $\mathbf{F}$  – множина неперервних і не спадних, додатно визначених на  $R_+$  функцій). У цьому випадку зоною відчуження для компакта  $A$ , яка відповідає шаблону ризику  $g(d)$  і параметру ризику  $I > 0$ , буде множина

$$\begin{aligned} S(m(X, g, A), I) &\stackrel{def}{=} \{X \in R^n \mid m(X, g, A) \leq I\} = \\ &= \{X \in R^n \mid g(m(X, A)) \leq I\} = \{X \in R^n \mid m(X, A) \leq g^{-1}(I)\} = \\ &= \left\{ X \in R^n \mid \sum_{i=1}^{i=m} m^b(X, A_i) \leq g^{-1}(I) \right\}, \quad \text{або ж} \\ S(m(X, g, A), I) &= \left\{ X \in R^n \mid \bigvee_{i=1}^{i=m} m^b(X, A_i) \leq g^{-1}(I) \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Зауважимо, що у випадку, коли при деякому  $i^*$  буде  $A_{i^*} = \text{Int}A \neq \emptyset$ , то

$$m^b(X, A_{i^*}) \equiv 0 \quad \text{і тоді (напр., при } i^* = m) \quad m(X, A) = \bigvee_{i=1}^{i=m-1} m^b(X, A_i),$$

або ж  $m(X, A) = \sum_{i=1}^{i=m-1} m^b(X, A_i)$ . Певна річ, що загальний підхід до побудови нормальної функції опуклого компакта не виключає і не заперечує використання при цьому структурних властивостей цього компакта.

Нехай тепер задано систему компактів  $\mathbf{C} = \{C_1, \mathbf{K}, C_k\}$  (необов'язково неперетинних і опуклих), яким зіставлено, відповідно: довільні строго спадні шаблони ризику  $h_i(d) \in \mathbf{G}$ , нормальні функції  $m(X, C_i)$  і параметри  $I_i > 0$ . Зрозуміло, що об'єднання зон відчуження цих компактів є зоною відчуження всієї системи, позначаємо її символом  $\mathbf{B}(\mathbf{C})$ . Згідно теореми 1.1 із [2] маємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{C}) &= \bigcap_{i=1}^{i=k} L(M(X, h_i, C_i), I_i) = \bigcap_{i=1}^{i=k} L(M(X, h_i, C_i) - I_i, 0) = \\ &= L\left(\bigvee_{i=1}^{i=k} (h_i(m(X, C_i)) - I_i), 0\right), \end{aligned}$$

а отже, межа  $Fr \mathbf{B}(\mathbf{C})$  зони відчуження визначається рівнянням

$$\bigvee_{i=1}^{i=k} (h_i(\mathbf{m}(X, C_i)) - I_i) = 0. \quad (7)$$

Рівняння (7) можна записати і так:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{C}) &= \bigcup_{i=1}^{i=k} L(M(X, h_i, C_i), I_i) = \\ &= \bigcup_{i=1}^{i=k} L(h_i(\mathbf{m}(X, C_i)), I_i) = \bigcup_{i=1}^{i=k} \{X \in R^n \mid h_i(\mathbf{m}(X, C_i)) \geq I_i\} = \\ &= \bigcup_{i=1}^{i=k} \{X \in R^n \mid \mathbf{m}(X, C_i) - h_i^{-1}(I_i) \leq 0\} = \bigcup_{i=1}^{i=k} S(\mathbf{m}(X, C_i) - h_i^{-1}(I_i), 0) = \\ &= S\left(\bigwedge_{i=1}^{i=k} (\mathbf{m}(X, C_i) - h_i^{-1}(I_i)), 0\right) \Rightarrow Fr\mathbf{B}(\mathbf{C}): \bigwedge_{i=1}^{i=k} (\mathbf{m}(X, C_i) - h_i^{-1}(I_i)) = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

У випадку, коли компактам системи  $\mathbf{C}$  зіставлено строго зростаючі шаблони ризику  $g_i(d) \in \mathbf{F}$ , то

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{C}) &= \bigcup_{i=1}^{i=k} S(\mathbf{m}(X, g_i, C_i), I_i) = \bigcup_{i=1}^{i=k} \{X \in R^n \mid g_i(\mathbf{m}(X, C_i)) - I_i \leq 0\} = \\ &= S\left(\bigwedge_{i=1}^{i=k} \Lambda(g_i(\mathbf{m}(X, C_i)) - I_i), 0\right), \end{aligned}$$

а отже,  $Fr\mathbf{B}(\mathbf{C})$  визначається рівнянням  $\bigwedge_{i=1}^{i=k} (g_i(\mathbf{m}(X, C_i)) - I_i) = 0$ , або ж і так:

$$\bigwedge_{i=1}^{i=k} (\mathbf{m}(X, C_i)) - g_i^{-1}(I_i) = 0. \quad (9)$$

Розглянемо конкретні приклади побудови нормальної функції за наведеною вище схемою.

**Приклад 1.** Побудуємо нормальну функцію відрізка  $W = [A, B]$ , де  $A = (x_{1a}, \mathbf{K}, x_{na})$  і  $B = (x_{1b}, \mathbf{K}, x_{nb})$ . Отже,  $W = \{A\} \cup ]A, B[ \cup \{B\}$ . Зрозуміло, що

$$\mathbf{m}(X, A) = d(X, A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - x_{ia})^2},$$

а  $\mathbf{m}(X, B) = d(X, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - x_{ib})^2}$ ; тут  $X = (x_1, \mathbf{K}, x_n)$  є плинна

точка простору  $R^n$ . Побудуємо тепер нормальну функцію прямої  $(AB)$ . Виходимо із параметричного представлення прямої

$$(A, B) : \{y_i = x_{i\alpha} + (x_{i\beta} - x_{i\alpha}) \cdot s, i = \overline{1, n}\}.$$

Значення параметра  $s$ , яке відповідає точці  $p(X) \in (AB)$  знайдемо із умови

$$\frac{\partial (d^2(X, (AB)))}{\partial s} \equiv 2 \cdot \sum_{j=1}^{j=n} (x_j - x_{ja} + (x_{ja} - x_{jb}) \cdot s)(x_{ja} - x_{jb}) = 0.$$

$$\text{Розв'язуючи це рівняння, отримуємо: } s(X) = \frac{\sum_{j=1}^{j=n} (x_j - x_{ja})(x_{jb} - x_{ja})}{\sum_{j=1}^{j=n} (x_{ja} - x_{jb})^2}.$$

Таким чином,  $\mathbf{m}(X, (AB)) = \sqrt{\sum_{i=1, n} (x_i - x_{ia} + (x_{ia} - x_{ib}) \cdot s(X))^2}$ . Неважко

встановити, що областю Діріхле для точки  $A$  буде замкнений півпростір

$$D_a = \{X \in R^n \mid \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BA} \geq 0\}: \sum_{j=1}^{j=n} (x_j - x_{ja})(x_{ja} - x_{jb}) \geq 0.$$

Для точки  $B$  – замкнений півпростір  $D_b = \{X \in R^n \mid \overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{AB} \geq 0\}$ :

$\sum_{j=1}^{j=n} (x_j - x_{jb})(x_{j\beta} - x_{j\alpha}) \geq 0$ , а для інтервалу  $]A, B[$  відкритий гіпершар (гіперсмуга)

$$D_{ab} = \{X \in R^n \mid (\overrightarrow{BX} \cdot \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BA}) > 0\}:$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} (x_j - x_{ja})(x_{ja} - x_{jb}) \cdot \sum_{j=1}^{j=n} (x_j - x_{jb})(x_{jb} - x_{ja}) > 0.$$

Далі неважко зрозуміти, що характеристичні функції цих областей запишуться так:

$$X_{D_a}(X) = 0.5 \left( 1 + \text{signum} \left( \sum_{j=1}^{j=n} (x_j - x_{ja})(x_{ja} - x_{jb}) \right) \right),$$

$$X_{D_b}(X) = 0.5 \left( 1 + \text{signum} \left( \sum_{j=1}^{j=n} (x_j - x_{jb})(x_{jb} - x_{ja}) \right) \right),$$

$$X_{D_{ab}}(X) = 1 - X_{D_a}(X) \vee X_{D_b}(X).$$

Звідси маємо:  $m^b(X, A) = m(X, A) \cdot X_{D_a}(X)$ ,  $m^b(X, B) = m(X, B) \cdot X_{D_b}(X)$ ,

$m^b(X, [A, B]) = m(X, (AB)) \cdot X_{D_{ab}}(X)$ . Отже, нормальну функцію відрізка

$[A, B]$  можемо записати так:

$$m(X, [A, B]) = m^b(X, A) + m^b(X, B) + m^b(X, [A, B]),$$

або ж і так:

$$m(X, [A, B]) = m^b(X, A) \vee m^b(X, B) \vee m^b(X, [A, B]). \quad (10)$$

**Приклад 2.** Знайдемо нормальну функцію для дуги  $\cup ABC$  кола  $\Omega$  в просторі  $R^3$ . Отже, нехай в прямокутній системі координат  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  задані три різні точки:  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ ,  $C(x_3, y_3, z_3)$ , які розміщені в просторі  $R^3$  довільним чином. Умовимось, що  $A$  і  $C$  є кінцеві точки дуги  $\cup ABC$ , і, звісно ж, що  $\vec{AB} \times \vec{AC} \neq \vec{0}$ . Спочатку сформуємо в просторі  $R^3$  нову прямокутну координатну систему  $(O1; \vec{i}1, \vec{j}1, \vec{k}1)$  і таку, щоб центр кола  $\Omega$  був її початком, а саме коло лежало б в одній із координатних площин цієї системи. Очевидно, що це можливо. Розглядаємо загальний випадок: точка  $O$  не є центром кола  $\Omega$  і саме коло не лежить ні в одній із координатних площин. Відшукаємо центр  $O1(x_0, y_0, z_0)$  і радіус  $r$  кола  $\Omega$ . Зрозуміло, що центр  $O1$  є перетином трьох площин: двох площин, які проходять перпендикулярно через середини відрізків (хорд)  $[A, B]$ ,  $[A, C]$  і площини  $(ABC)$ . Тобто центр  $O1(x_0, y_0, z_0)$  є єдиний розв'язок лінійної системи:

$$\begin{cases} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)(x_1 - x_2) + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)(y_1 - y_2) + \left(z - \frac{z_1 + z_2}{2}\right)(z_1 - z_2) = 0, \\ \left(x - \frac{x_1 + x_3}{2}\right)(x_1 - x_3) + \left(y - \frac{y_1 + y_3}{2}\right)(y_1 - y_3) + \left(z - \frac{z_1 + z_3}{2}\right)(z_1 - z_3) = 0, \\ (x - x_1) \begin{vmatrix} y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \end{vmatrix} - (y - y_1) \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & z_1 - z_3 \end{vmatrix} + (z - z_1) \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix} = 0, \end{cases}$$

а радіус кола  $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$ . Формуємо тепер нову прямокутну систему координат  $(O1; \vec{i}1, \vec{j}1, \vec{k}1)$ , де покладаємо:  $\vec{i}1 = \frac{O1A}{|O1A|}$ ,

$$\vec{k}1 = \frac{AB \times AC}{|AB \times AC|}, \quad \vec{j}1 = \vec{k}1 \times \vec{i}1.$$

Звідси, після відповідних спрощень, можемо записати:

$$\begin{pmatrix} \vec{i}1 \\ \vec{j}1 \\ \vec{k}1 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

де через  $E$  позначаємо матрицю переходу від базису  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  до базису  $(\vec{i}1, \vec{j}1, \vec{k}1)$ . Нехай  $M(x, y, z)$  є плинна точка простору  $R^3(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , координати якої в координатній системі  $(O1; \vec{i}1, \vec{j}1, \vec{k}1)$  позначаємо через  $(u, v, w)$ . В силу формули (11) і рівності  $\vec{O1M} = \vec{OM} - \vec{OO1}$  нові координати точки  $M$  виражаються через старі за формулою

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Зауважуємо, що у випадку, коли коло  $\Omega$  лежить в одній із координатних площин системи  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , наприклад, в площині  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , то нові координати точки  $M$  будуть виражатися через старі за формулами:

$$\begin{cases} u = x - x_0, \\ v = y - y_0, \\ w = z - z_0. \end{cases} \quad (13)$$

Отже, нехай в системі  $(O1; \vec{i}1, \vec{j}1, \vec{k}1)$  маємо:  $A(u_1, v_1, 0)$ ,  $B(u_2, v_2, 0)$ ,  $C(u_3, v_3, 0)$ ; площина  $(ABC)$  є координатною в координатній системі  $(O1; \vec{i}1, \vec{j}1, \vec{k}1)$ . Знайдемо тепер, за наведеною вище схемою, нормальну функцію дуги  $\cup ABC$  відносно простору  $R^3(O1; \vec{i}1, \vec{j}1, \vec{k}1)$ . Зрозуміло, що  $\cup ABC = \{A, C\} \cup ABC$  і, що

$$m(M, A \cup C) = m(M, A) \wedge m(M, C) =$$

$$= \sqrt{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2 + w^2} \wedge \sqrt{(u - u_3)^2 + (v - v_3)^2 + w^2}.$$

Виходячи із параметричного представлення кола  $\Omega: \{u = r \cdot \cos j, v = r \cdot \sin j, w = 0\}$  в координатній системі  $(O1; \vec{i}1, \vec{j}1, \vec{k}1)$ , па-

раметр  $j$ , який буде відповідати  $p(M) \in \Omega$ , знайдемо із умови:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(d^2(M, \Omega))}{\partial j} &= \left( (u - r \cdot \cos j)^2 + (v - r \cdot \sin j)^2 + w^2 \right)' = 0 \Rightarrow \\ 2(u - r \cos j) r \sin j - 2(v - r \sin j) r \cos j &= 0 \Rightarrow \operatorname{tg} j = \frac{v}{u}. \text{ Звідси} \\ m^2(M, \Omega) &= \left( u - \frac{r}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 j}} \right)^2 + \left( v - \frac{r \cdot \operatorname{tg} j}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 j}} \right)^2 + w^2 = \\ \left( u - \frac{ru}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)^2 + \left( v - \frac{rv}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)^2 + w^2 &= \left( \sqrt{u^2 + v^2} - r \right)^2 + w^2 \Rightarrow \\ m(M, \Omega) &= \sqrt{\left( \sqrt{u^2 + v^2} - r \right)^2 + w^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Означимо півпростори:

$$\begin{aligned} K_A^+ &= \left\{ (u, v, w) \in R^3 \mid \begin{vmatrix} u & v \\ u1 & v1 \end{vmatrix} > 0 \quad i \quad \begin{vmatrix} u3 & v3 \\ u1 & v1 \end{vmatrix} > 0 \right\}, \\ K_C^+ &= \left\{ (u, v, w) \in R^3 \mid \begin{vmatrix} u3 & v3 \\ u & v \end{vmatrix} > 0 \right\}, \\ K_A^- &= \left\{ (u, v, w) \in R^3 \mid \begin{vmatrix} u & v \\ u1 & v1 \end{vmatrix} \leq 0 \right\}, \quad K_C^- = \left\{ (u, v, w) \in R^3 \mid \begin{vmatrix} u3 & v3 \\ u & v \end{vmatrix} \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Неважко зрозуміти, що коли точка  $B \in K_A^+ \cap K_C^+$ , тобто

$$\begin{vmatrix} u2 & v2 \\ u1 & v1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u3 & v3 \\ u2 & v2 \end{vmatrix} > 0,$$

то множина  $K_A^+ \cap K_C^+$  є областю Діріхле для відкритої дуги  $] \cup ABC[$ , характеристична функція якої є  $X_{] \cup ABC[} = 0.5 \cdot \left( 1 + \operatorname{signum} \left( \begin{vmatrix} u & v \\ u1 & v1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u3 & v3 \\ u & v \end{vmatrix} \right) \right)$ . Область Діріхле для кінцевих точок  $A$  і  $C$ , в цьому випадку, буде множина  $K_A^+ \cap K_C^+ = K_A^- \cup K_C^-$ , характеристичною функцією для якої є

$$X_{\{A, C\}} = 0.5 \cdot \left( 1 - \operatorname{signum} \left( \begin{vmatrix} u & v \\ u1 & v1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u3 & v3 \\ u & v \end{vmatrix} \right) \right).$$

Отже, в цьому випадку

$$\begin{aligned} \mu(M, \cup ABC) &= \mu^b(M, \{A, C\}) + \mu^b(M, ] \cup ABC[) = \\ &= 0.5 \cdot \left( 1 - \operatorname{signum} \left( \begin{vmatrix} u & v \\ u1 & v1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u3 & v3 \\ u & v \end{vmatrix} \right) \right) \times \\ &\times \left( \sqrt{(u - u1)^2 + (v - v1)^2 + w^2} \wedge \sqrt{(u - u3)^2 + (v - v3)^2 + w^2} \right) + \\ &+ 0.5 \cdot \left( 1 + \operatorname{signum} \left( \begin{vmatrix} u & v \\ u1 & v1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u3 & v3 \\ u & v \end{vmatrix} \right) \right) \cdot \sqrt{\left( \sqrt{u^2 + v^2} - r \right)^2 + w^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Якщо ж  $B \in K_A^- \cup K_C^-$ , тобто  $\begin{vmatrix} u2 & v2 \\ u1 & v1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u3 & v3 \\ u2 & v2 \end{vmatrix} \leq 0$ , то зрозуміло, що в цьому випадку маємо:

$$\begin{aligned} m(M, \cup ABC) &= 0.5 \cdot \left( 1 + \operatorname{signum} \left( \begin{vmatrix} u & v \\ u1 & v1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u3 & v3 \\ u & v \end{vmatrix} \right) \right) \cdot \\ &\cdot \left( \sqrt{(u - u1)^2 + (v - v1)^2 + w^2} \wedge \sqrt{(u - u3)^2 + (v - v3)^2 + w^2} \right) + \\ &0.5 \cdot \left( 1 - \operatorname{signum} \left( \begin{vmatrix} u & v \\ u1 & v1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} u3 & v3 \\ u & v \end{vmatrix} \right) \right) \cdot \sqrt{\left( \sqrt{u^2 + v^2} - r \right)^2 + w^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Зробивши заміну в формулах (15), (16), згідно рівностей (12), (13), отримаємо нормальні функції дуги  $\cup ABC$  в просторі  $R^3(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Наприклад, у випадку належності  $\cup ABC$  координатній площині  $(XOY)$  формула (16) (після заміни) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \mu(M, \cup ABC) &= 0.5 \cdot \left( 1 + \operatorname{signum} \left( \begin{vmatrix} x - x0 & y - y0 \\ x1 - x0 & y1 - y0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x3 - x0 & y3 - y0 \\ x - x0 & y - y0 \end{vmatrix} \right) \right) \times \\ &\times \left( \sqrt{(x - x1)^2 + (y - y1)^2 + z^2} \wedge \sqrt{(x - x3)^2 + (y - y3)^2 + z^2} \right) + \\ &+ 0.5 \cdot \left( 1 - \operatorname{signum} \left( \begin{vmatrix} x - x0 & y - y0 \\ x1 - x0 & y1 - y0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x3 - x0 & y3 - y0 \\ x - x0 & y - y0 \end{vmatrix} \right) \right) \times \\ &\times \sqrt{\left( \sqrt{(x - x0)^2 + (y - y0)^2} - r \right)^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Встановленими вище формулами нормальних функцій скористаємося в наступному ілюстративному прикладі побудови і візуалізації зони відчуження для конкретної системи об'єктів.

**Приклад 3.** Будемо і візуалізуємо засобами СКМ Maple 11 зону відчуження системи об'єктів (елемент теплопроводу)  $C = \{[A, B], \cup BCD, [D, E]\}$ , де  $A = (0, 0, -2)$ ,  $B = (1, 0, 0)$ ,  $C = (0, 1, 0)$ ,  $D = (0, -1, 0)$ ,  $E = (0, 0, 2)$ . При умові: відрізкам  $[A, B]$  і  $[D, E]$  зіставляється шаблон ризику  $e^{-d^2}$  і параметр  $I = e^{-0.1}$ , дузі  $\cup BCD$  – шаблон  $e^{-2d^2}$  і параметр  $I = e^{-0.5}$ .

Згідно формул (10), (17), знаходимо подвоєнні квадрати нормальних функцій відрізків  $[A, B]$ ,  $[D, E]$  та дуги  $\cup BCD$ ; позначаємо їх, відповідно, через  $f_1, f_3, f_2$ . Згідно формули (8), рівняння межі зони відчуження елемента теплопроводу  $C$  запишеться так:

$$FrB(C): \min(f_1 - 0.1, f_2 - 0.25, f_3 - 0.1) = 0.$$

Відповідний цьому рівнянню графік межі відчуження показаний в кінці наведеного нижче документа.

$$f_3 := (1 - \text{signum}(y + 2z + 1)) \cdot (x^2 + (y + 1)^2 + z^2) + (1 - \text{signum}(-y - 2z + 4)) \cdot (x^2 + y^2 + (z - 2)^2) + (1 + \text{signum}(y + 2z + 1) \cdot (-y - 2z + 4)) \cdot (x^2 + (y + 1 - 0.2(y + 2z + 1))^2 + (z - 0.4 \cdot (y + 2z + 1))^2) :$$

$$f_2 := (1 - \text{signum}(\min(-y, x))) \cdot ((\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + z^2) + (1 + \text{signum}(\min(-y, x))) \cdot \min((x - 1)^2 + y^2 + z^2, (x^2 + (y + 1)^2 + z^2)) :$$

$$f_1 := (1 + \text{signum}(-x - 2z - 4)) \cdot (x^2 + y^2 + (z + 2)^2) + (1 + \text{signum}(x + 2z - 1)) \cdot ((x - 1)^2 + y^2 + z^2) + (1 - \text{signum}(x + 2z + 4) \cdot (x + 2z - 1)) \cdot ((x - 0.2 \cdot (x + 2z + 4))^2 + y^2 + (z + 2 - 0.4 \cdot (x + 2z + 4))^2) :$$

with(plots) :

$$a := \text{textplot3d}([0.3, 0, -2.3, "A", color = black, font = [TIMES, ROMAN, 18]]) :$$

$$b := \text{textplot3d}([1.6, 0, 0.3, "B", color = black, font = [TIMES, ROMAN, 18]]) :$$

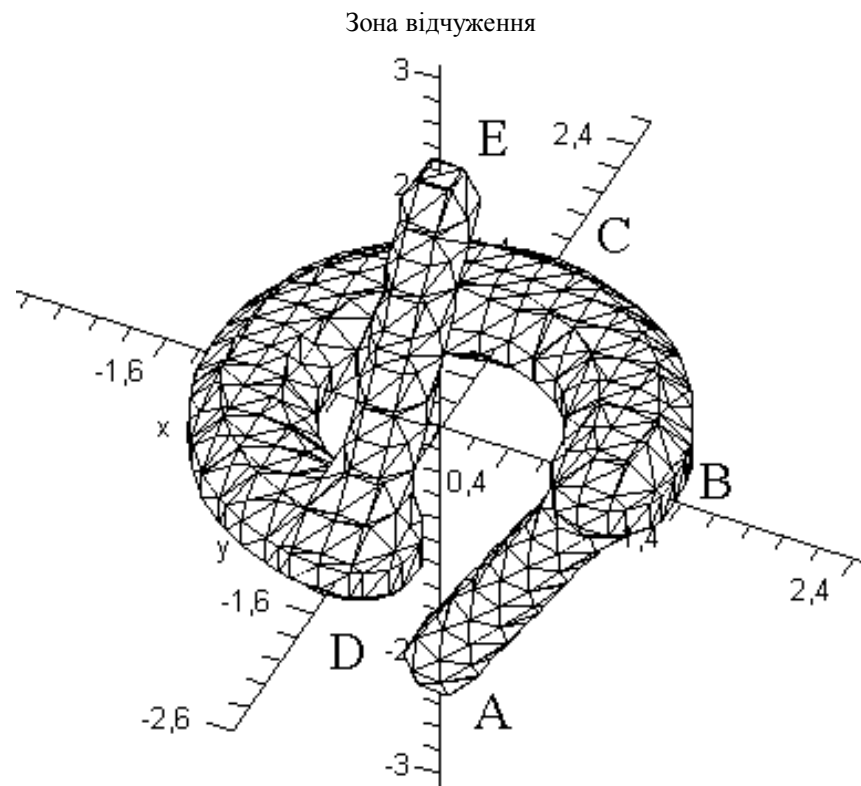
$$c := \text{textplot3d}([0.3, 1.5, 0.3, "C", color = black, font = [TIMES, ROMAN, 18]]) :$$

$$d := \text{textplot3d}([0.2, -1.6, -0.2, "D", color = black, font = [TIMES, ROMAN, 18]]) :$$

$$e := \text{textplot3d}([0.2, 0.2, 2.4, "E", color = black, font = [TIMES, ROMAN, 18]]) :$$

$$g := \text{implicitplot3d}(\min(f_1 - 0.1, f_2 - 0.25, f_3 - 0.1) = 0., x = -2.5 .. 2.5, y = -2.5 .. 2.5, z = -3 .. 3, grid = [30, 30, 30]) :$$

$$\text{display3d}(\{a, b, c, d, e, g\}, axes = NORMAL, title = "Зона відчуження", titlefont = [TIMES, ROMAN, 16], color = white);$$



**Список літератури. 1.** Клименко Вісс. Гр. Про побудову перегородок для систем опуклих компактів Вісник НТУ ХПТ Тем. вип.: Машинознавство та САПР. – Харків: – 2007– № 29– С. 72–88.  
**2.** Клименко Вісс. Гр. Багатокритеріальні формалізації. – Харків: СПДФО Яковлева Г.Г., 2004. – 308 с.  
**3.** Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. – К.: Техніка, 1967. – 212 с.

Надійшло до редакції 07.04.08