

УДК 531

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ,
С. В. ОЛЬШАНСКИЙ, аспирант НТУ „ХПИ”

О ВЛИЯНИИ РЕАКТИВНОЙ СИЛЫ НА СКОРОСТЬ ПАДЕНИЯ ШАРА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ УБЫВАНИЕМ РАДИУСА

В статті за допомогою циліндричних функцій побудовано аналітичний розв'язок нелінійної задачі Коші. Використовуючи його, досліджено вплив реактивної сили на швидкість падіння однорідної кулі, у якій маса та радіус зменшуються з часом за експоненціальних законів для двох варіантів відносної швидкості відділення часток від кулі.

In the paper the analytical solution of nonlinear Cauchy problem is built by cylinder functions. With this solution's use the influence of reactive force on rate of fall of homogeneous ball which mass and radius are decreasing in time on exponential laws is researched for two variants of relative speed of ball's particles separation.

Актуальность темы и цель исследования. Движение шара переменной массы моделируют при изучении полета горящих частиц топлив, мелкодисперсных отходов (выбросов) производств, падающих сгорающих метеоритов и пр. Поэтому исследование особенностей полета тел, у которых происходит изменение размеров и массы во времени, относится к актуальным научно-техническим задачам. Системное исследование полета шаровидных капель с учетом их испарения проводилось в работах [1, 2], но там не учитывалось действие реактивной силы. В работах [3, 4] записаны уравнения движения сферической капли с учетом реактивной силы при линейном

убывании радиуса капли во времени. Однако не построено точных аналитических решений этих уравнений. В связи с этим здесь поставлена цель построить точное аналитическое решение уравнения вертикального падения шара с учетом реактивной силы и квадратичного сопротивления внешней среды при экспоненциальных убываниях радиуса и массы тела, а также изучить влияние реактивной силы на скорость движения.

Первая постановка задачи и ее аналитическое решение. При постановке задачи вводим гипотезу К.Э. Циолковского [5], согласно которой относительная скорость отделения частиц от шара является постоянной величиной. Кроме того, предполагаем, что сила сопротивления воздуха пропорциональна площади миделевого сечения шара (квадрату радиуса) и квадрату скорости падения тела постоянной плотности. Таким образом, изменение радиуса шара $r = r(t)$ во времени t определяет и соответствующее изменение его массы. Убывание радиуса подчиняем показательному закону

$$r = r(t) = r_0 \exp(-\lambda t),$$

в котором $r_0 = r(0)$ – начальное значение радиуса, а параметр $\lambda > 0$ характеризует скорость его уменьшения.

Согласно принятым допущениям определение скорости падения шара как функции времени $v = v(t)$ сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{dt} \pm \frac{3}{r} \frac{dr}{dt} |v_r| + \frac{\alpha}{r} v^2 = g \quad (1)$$

при начальном условии

$$v(0) = v_0. \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2) $u_r = const$ – относительная скорость отделения частиц от шара; α – коэффициент аэродинамического сопротивления воздуха; g – ускорение свободного падения; v_0 – начальное значение скорости падения; знак “+” перед цифрой 3 соответствует случаю, когда реактивная сила ускоряет падение, а “-” – когда замедляет его.

Далее перейдем от t к новой переменной x по формулам $\xi = \exp(\lambda t)$;
 $\frac{d\xi}{dt} = \lambda \xi$; $\frac{dv}{dt} = \lambda \xi \frac{dv}{d\xi}$; $r = \frac{r_0}{\xi}$. Вместо выражений (1) и (2) получаем соответственно

$$\frac{dv}{d\xi} + \beta v^2 = \frac{g_1}{\xi}; v(1) = v_0. \quad (3)$$

Здесь $\beta = \frac{\alpha}{\lambda r_0}$; $g_1 = \frac{g}{\lambda} \pm 3|v_r|$.

В дальнейшем, в зависимости от значений g_1 будем различать три случая движения. Остановимся сначала на первом, когда $g_1 > 0$.

Чтобы избавиться от v^2 в уравнении (3), выразим скорость через вспомогательную функцию $w = w(\xi)$ и ее производную по формуле

$$v = \frac{1}{\beta} \frac{dw}{d\xi} w^{-1}. \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), приходим к линейному уравнению типа Бесселя

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{\beta g_1}{\xi} w = 0$$

с общим решением

$$w(\eta) = \eta(c_1 I_1(\eta) + c_2 K_1(\eta)), \quad (5)$$

в котором $\eta = 2\sqrt{\beta g_1 \xi}$; c_1, c_2 – произвольные постоянные; $I_1(\eta)$, $K_1(\eta)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя и Макдональда индекса единица.

Продифференцировав решение (5) в соответствии с (4), получаем выражение скорости падения шара

$$v(\eta) = \frac{2g_1}{\eta} \frac{cI_0(\eta) - K_0(\eta)}{cI_1(\eta) + K_1(\eta)}. \quad (6)$$

В нем $c = c_1 c_2^{-1}$ – произвольная постоянная; $I_0(\eta)$, $K_0(\eta)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя и Макдональда нулевого индекса.

Аналитическое решение (6) удовлетворяет начальному условию (2), когда

$$c = \frac{2g_1 K_0(\eta_0) + v_0 \eta_0 K_1(\eta_0)}{2g_1 I_0(\eta_0) - v_0 \eta_0 I_1(\eta_0)}, \quad \eta_0 = 2\sqrt{\beta g_1}. \quad (7)$$

Таким образом, расчет скорости падения шара можно проводить с помощью таблиц цилиндрических функций [6,7].

Из уравнения (3) следует, что при $0 < v_0 < \sqrt{g_1/\beta}$ скорость падения не является монотонной функцией, а имеет максимум.

Несмотря на действия движущих реактивной силы и силы гравитации, скорость $v(\eta)$ при больших η аппроксимируется убывающей экспонентой

$$v(\eta) \sim v_a(\eta) = \frac{2g_1}{\eta} = \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{\beta}} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda t\right). \quad (8)$$

С течением времени скорость асимптотически стремится к нулю.

Второй случай движения имеем при $g_1 = 0$, когда сила гравитации уравновешивается тормозящей реактивной силой. Решением уравнения (1), которое удовлетворяет начальному условию (2), является

$$v(t) = \frac{\lambda r_0}{\alpha} \frac{1}{\exp(\lambda t) - b}, \quad (9)$$

где $b = 1 - \frac{\lambda r_0}{\alpha v_0} < 1$.

При больших t убывание скорости происходит по показательному закону

$$v_a(t) \sim \frac{\lambda r_0}{\alpha} \exp(-\lambda t),$$

причем быстрее, чем в первом случае.

Используя выражение (9), легко определить расстояние S , пролетаемое шаром при его падении

$$S = \int_0^t v(t) dt = \frac{r_0}{\alpha} \ln \frac{1 - b \exp(-\lambda t)}{1 - b}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что, невзирая на бесконечное время падения шара, при отсутствии неподвижных пространственных ограничений максимальная дальность (высота) падения будет ограниченной (конечной) величиной. Действительно, предельный переход $t \rightarrow \infty$ в (10) дает

$$\max S = \frac{r_0}{\alpha} \ln \frac{1}{1 - b} = \frac{r_0}{\alpha} \ln \frac{\alpha v_0}{\lambda r_0}. \quad (11)$$

Заметим, что в первом случае движения $\max S$ также является ограниченной величиной, но большей, чем (11). Таких особенностей нет при падении тела постоянных размеров и массы.

Третий случай движения характеризуется тем, что $g_1 < 0$, т.е. ускоряющая сила гравитации меньше тормозящей реактивной силы. Для него уравнение падения шара (3) принимает вид

$$\frac{dv}{d\xi} + \beta v^2 = -\frac{g_2}{\xi}, \quad (12)$$

где $g_2 = 3|v_r| - \frac{g}{\lambda} > 0$.

Подстановкой (4) нелинейное уравнение (12) сводится к линейному уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{\beta g_2}{\xi} w = 0$$

с общим решением

$$w(\tau) = \tau(c_3 J_1(\tau) + c_4 Y_1(\tau)). \quad (13)$$

Здесь $\tau = 2\sqrt{\beta g_2} \xi$; c_3, c_4 – произвольные постоянные; $J_1(\tau), Y_1(\tau)$ – функции Бесселя и Неймана индекса единица.

Используя (2), (4), (13), для вычисления скорости полета получаем формулы

$$v(\tau) = \frac{2g_2}{\tau} \frac{c_5 J_0(\tau) + Y_0(\tau)}{c_5 J_1(\tau) + Y_1(\tau)}; \quad (14)$$

$$c_5 = c_3 c_4^{-1} = \frac{v_0 \tau_0 Y_1(\tau_0) - 2g_2 Y_0(\tau_0)}{2g_2 J_0(\tau_0) - v_0 \tau_0 J_1(\tau_0)},$$

где $\tau_0 = 2\sqrt{\beta g_2}$; $J_0(\tau), Y_0(\tau)$ – функции Бесселя и Неймана нулевого индекса.

В отличие от предыдущих случаев движения здесь $v(\tau)$ не только убывает с течением времени, а при некотором $\tau = \tau^*$ становится равной нулю. С этого момента времени шар начинает двигаться вверх, и решение (14) становится непригодным для расчета. Определение времени полета шара вниз (до реверсирования движения) связано с решением трансцендентного уравнения

$$c_5 J_0(\tau^*) + Y_0(\tau^*) = 0. \quad (15)$$

Его корень можно находить методом итераций по формуле

$$\tau_{n+1}^* = \tau_n^* + \frac{c_5 J_0(\tau_n^*) + Y_0(\tau_n^*)}{c_5 J_1(\tau_n^*) + Y_1(\tau_n^*)}; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (16)$$

приняв начальным приближением $\tau_0^* = \tau_0$.

Однако малые и большие корни уравнения (15) можно также вычислить с помощью приближенных формул. Так, в случае малых корней, используя аппроксимацию [6]

$$Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_0(x) + 0,36747 + 0,60559 \left(\frac{x}{3}\right)^2,$$

вместо (15) получаем приближенное уравнение

$$\frac{(\tau^*)^2}{2} \exp\left(\frac{(\tau^*)^2}{2}\right) = q, \quad (17)$$

в котором $q = \exp(-p(c_5 + 0,1469))$.

Приближенным решением уравнения (17) является

$$\tau^* = \left[(2+q) \left(\sqrt{1 + \frac{8q}{(2+q)^2}} - 1 \right) \right]^{1/2}. \quad (18)$$

При $0,216 \leq c < \infty$ или $0 < \tau^* \leq 0,7$ погрешность формулы (18) меньше 1%. Например, при $c = 0,338$ вычисленное по формуле (18) значение $\tau^* = 0,603$, вместо точного значения 0,600, к которому приводят таблицы специальных функций [6].

В случае больших корней уравнения (15) его можно приближенно заменить на

$$c_5 \cos\left(\tau^* - \frac{1}{8\tau^*} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\tau^* - \frac{1}{8\tau^*} - \frac{\pi}{4}\right) = 0. \quad (19)$$

К этому соотношению приводит представление функций Бесселя большого аргумента с помощью модуля и фазы [6].

Решением уравнения (19) является

$$\tau^* = \frac{p + \tau_0}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2(p + \tau_0)^2}} \right), \quad (20)$$

причем $p = \arctg \frac{c_5 \cos \omega + \sin \omega}{c_5 \sin \omega - \cos \omega}$; $\omega = \tau_0 - \frac{\pi}{4}$ (Погрешность формулы (20) меньше 1%, когда $3 \leq \tau_0 \leq \tau^*$).

Промежуточные между малыми и большими значения τ^* можно определить с помощью линейной интерполяции и табл. 1.

Из табл. 1 исключен интервал $c_5 \in (-7,820; 10,294)$ или $\tau^* \in (2,28; 2,50)$, куда попадает нуль функции $J_0(\tau^*)$. В этом промежутке корень уравнения (15) следует определять по формуле

$$\tau^* = 2,4048 + \frac{0,5099}{0,5191 \cdot c_5 - 0,1027}.$$

Таблица 1

Корни уравнения (15), которые находятся на промежутке $\eta^* \in [0,7; 3]$

η^*	c_5	η^*	c_5	η^*	c_5	η^*	c_5
0,70	0,216	1,45	-0,700	2,08	-2,905	2,58	5,554
0,75	0,159	1,50	-0,747	2,10	-3,111	2,60	4,972
0,80	0,103	1,55	-0,831	2,12	-3,344	2,62	4,498
0,85	0,047	1,60	-0,923	2,14	-3,612	2,64	4,102
0,90	-0,007	1,65	-1,024	2,16	-3,922	2,66	3,768
0,95	-0,061	1,70	-1,136	2,18	-4,285	2,68	3,482
1,00	-0,115	1,75	-1,261	2,20	-4,719	2,70	3,233
1,05	-0,170	1,80	-1,404	2,22	-5,245	2,75	2,733
1,10	-0,225	1,85	-1,569	2,24	-5,896	2,80	2,356
1,15	-0,282	1,90	-1,763	2,26	-6,726	2,85	2,059
1,20	-0,340	1,95	-1,995	2,28	-7,820	2,90	1,819
1,25	-0,400	2,00	-2,280	2,50	10,294	2,95	1,619
1,30	-0,462	2,02	-2,413	2,52	8,495	3,00	1,449
1,35	-0,527	2,04	-2,560	2,54	7,227		
1,40	-0,596	2,06	-2,723	2,56	6,283		

Вычисленные упрощенным способом значения τ^* можно уточнить итерациями по формуле (16).

Зная τ^* , далее несложно определить время падения шара

$$t^* = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{(\tau^*)^2}{4\beta g_2},$$

а также оценить максимальную дальность его полета вниз до реверсирования

$$\max S = \int_0^{t^*} v(t) dt = \frac{2}{\lambda} \int_{\tau_0}^{\tau^*} v(\tau) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (21)$$

С этой целью выделим асимптотику скорости (14) при малых τ , используя соответствующие аппроксимации функций Бесселя [6]. В области малых аргументов

$$v_a(\tau) = v_0 - 2g_2 \ln \frac{\tau}{\tau_0}.$$

Интеграл от $v_a(\tau)$ выражается с помощью элементарных функций. Поэтому

$$\max S = \frac{2}{\lambda} \left[(v_0 + 2g_2 \ln \tau_0) \ln \frac{\tau^*}{\tau_0} - g_2 (\ln^2 \tau^* - \ln^2 \tau_0) \right] + \Delta H. \quad (22)$$

Невязку $\Delta H = \frac{2}{\lambda} \int_{\tau_0}^{\tau^*} [v(\tau) - v_a(\tau)] \frac{d\tau}{\tau}$ удобно оценивать по формуле Симпсона

$$\Delta H \approx \frac{\tau^* - \tau_0}{3\lambda} \left\{ \frac{8}{\tau_0 + \tau^*} \left[v\left(\frac{\tau_0 + \tau^*}{2}\right) - v_a\left(\frac{\tau_0 + \tau^*}{2}\right) \right] - \frac{1}{\tau^*} v_a(\tau^*) \right\}. \quad (23)$$

Кроме изложенного способа, для оценки $\max S$ также может быть полезна формула [8]

$$\max S \approx \frac{1}{4\alpha} \left\{ [r^*(3 + \lambda t^*) - r_0] \ln \left(1 + \frac{1}{\Omega} \right) + \frac{r_0 - r^*(1 + \lambda t^*)}{1 + \Omega} \right\}, \quad (24)$$

в которой $\Omega = \frac{(3\lambda v_r - g)r^*}{\alpha v_0^2}$; $r^* = \frac{r_0}{\lambda t^*} [1 - \exp(-\lambda t^*)]$.

К ней приводит идея усреднения радиуса шара на интервале движения.

Результаты расчета и их анализ. Проведем расчет при $r_0 = 10^{-3}$ м;

$\alpha = 10^{-4}$ с⁻¹; $\lambda = 0,5$ м/с;

$v_r = 4$ м/с и различных значениях v_0 . Для таких данных $g_1 > 0$. Результаты расчета представлены на рис. 1.

На рис. 1 цифрами 1, 2, 3 отмечены рассчитанные по формулам (6) и (7) кривые, соответствующие значениям $v_0 = 3; 6,173; 9$ м/с. Для первого значения начальной скорости график $v(t)$ имеет максимум.

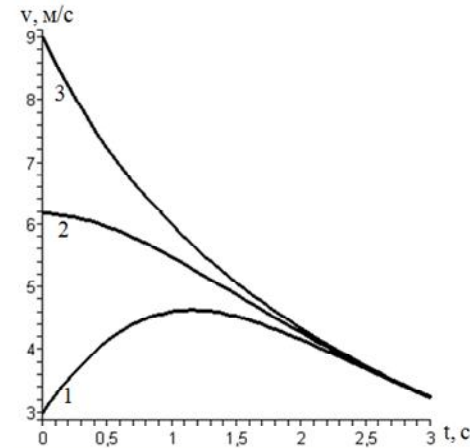


Рис. 1. Зависимости скорости от времени для различных v_0 при $g_1 > 0$

График, отмеченный цифрой 2, соответствует граничному случаю, когда $v_0 = \sqrt{\frac{g_1}{\beta}} \approx 6,173$ м/с. Для третьего значения начальной скорости график $v(t)$

является монотонным.

Проводя расчет для второго случая движения, когда $g_1 = 0$, принимаем следующие исходные данные: $r_0 = 10^{-3}$ м; $\alpha = 10^{-4}$ с $^{-1}$; $I = 2/3$ м/с; $u_r = 5$ м/с и различные значения u_0 . Результаты расчета приведены на рис. 2. Цифрами 1,2,3 отмечены кривые, полученные с помощью (9), при начальных скоростях $u_0 = 3, 6, 9$ м/с. Как видно из рис. 2, экстремумов у скорости падения нет.

Для третьего случая движения, когда $g_1 < 0$, используем такие исходные данные: $r_0 = 10^{-3}$ м; $a = 10^{-4}$ с $^{-1}$; $I = 0,5$ м/с; $u_r = 10$ м/с и различные значения u_0 .

Графики, отмеченные цифрами 1,2,3, соответствуют начальным скоростям $v_0 = 3, 6, 9$ м/с. Как видно из рис. 3, в некоторый момент времени t^* скорость становится равной нулю.

Проверим эффективность итерационной формулы (11), используя указанные выше исходные данные и $v_0 = 6$ м/с. Вычислив для них $\tau_0 = 2,882$, дальше по формуле (16) получаем:

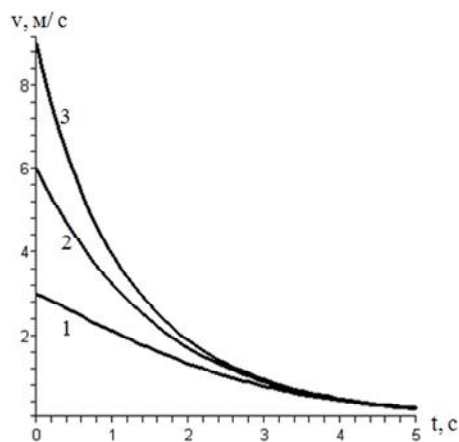


Рис. 2. Зависимости скорости от времени для различных u_0 при $g_1 = 0$

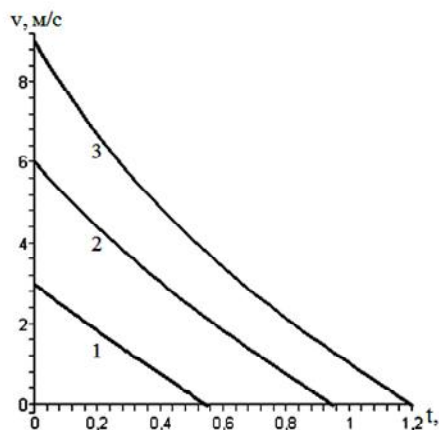


Рис. 3. Зависимости скорости от времени для различных u_0 при $g_1 < 0$

$\tau_1^* = 3,715$, $\tau_2^* = 3,649$, $\tau_3^* = 3,650$, $\tau_4^* = 3,650$. Проведя четыре итерации, с принятой точностью нашли искомое значение $\tau^* = 3,650$. По формуле (20) также получаем $\tau^* = 3,651$, что подтверждает эффективность этой формулы в области больших τ^* . Далее, используя найденное τ^* , определим время остановки тела $t^* = 0,946$ с, что подтверждает рис. 3.

Далее проверим точность предложенных формул (22), (24) для оценки максимальной дальности полета тела. Используем исходные данные, принятые для случая $g_1 < 0$. Результаты расчетов представлены в табл. 2. Они свидетельствуют о том, что для оценки максимальной дальности полета корректнее использовать формулу (24), погрешность которой не превышает 3%.

Таблица 2

Максимальная дальность полета $\max S$ и время t^* при различных u_0

v_0 , м/с	2	5	7	10	15
Числ. инт. (21), м	0,371	1,936	3,226	5,101	7,750
По форм. (22), м	0,371	1,940	2,978	4,350	6,287
По форм. (24), м	0,371	1,930	3,2031	5,153	7,924
t^* , с	0,375	0,831	1,043	1,255	1,452

Вторая постановка задачи падения шара и ее аналитическое решение. Она отличается от предыдущей только тем, что вместо гипотезы К.Э. Циолковского принимаем $v_r = v(t)$, т.е. абсолютную скорость частиц, отделившихся от шара, берем равной нулю. Таким считали v_r в работах [3, 4]. В рамках принятого предположения дифференциальное уравнение падения шара имеет вид

$$\frac{dv}{d\xi} \mathbf{m} \frac{3}{\xi} v + \beta v^2 = \frac{g}{\lambda \xi}$$

При знаке “-” перед $(3/\xi)$ реактивная сила является движущей, а при знаке “+” – тормозящей.

Подставив в него выражение (4), приходим к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} \mathbf{m} \frac{3}{\xi} \frac{dw}{d\xi} - \frac{\beta g}{\lambda \xi} w = 0. \quad (25)$$

Рассмотрим сначала случай движущей реактивной силы. При знаке “-”

перед (3/ξ) общее решение данного уравнения с точностью до постоянных c_1 и c_2 выражается через цилиндрические функции

$$w = \eta^4 [c_1 I_4(\eta) + c_2 K_4(\eta)].$$

Здесь $\eta = 2\sqrt{\frac{\beta g}{\lambda}} \xi$; $I_4(\eta)$, $K_4(\eta)$ – модифицированные функции Бесселя и Макдональда индекса четыре.

Продифференцировав полученное решение в соответствии с (4), приходим к формуле скорости падения шара

$$v(\eta) = \frac{2g}{\lambda \eta} \frac{AI_3(\eta) - K_3(\eta)}{AI_4(\eta) + K_4(\eta)}, \quad (26)$$

в которой $A = c_1 c_2^{-1}$ – произвольная постоянная; $I_3(\eta)$, $K_3(\eta)$ – модифицированные функции Бесселя и Макдональда индекса три.

Константу A определяем с помощью начального условия (2). Она принимает значение

$$A = \frac{2gK_3(\eta_0) + \lambda \eta_0 v_0 K_4(\eta_0)}{2gI_3(\eta_0) - \lambda \eta_0 v_0 I_4(\eta_0)}, \quad (27)$$

где $\eta_0 = 2\sqrt{\frac{\beta g}{\lambda}}$.

Используя рекуррентные соотношения и таблицы цилиндрических функций [6, 7], по формулам (26) и (27) несложно рассчитать зависимость $v(t)$.

Рассмотрим поведение скорости падения при больших t или η . Учитывая, что при $v > 0$ [6]

$$I_\nu(\eta) \sim \frac{\exp(\eta)}{\sqrt{2\pi\eta}}; \quad K_\nu(\eta) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\eta}} \exp(-\eta),$$

из (26) получаем

$$v(\eta) \sim \frac{2g}{\lambda \eta} = \sqrt{\frac{g}{\beta \lambda}} \exp\left(-\frac{1}{2} \lambda t\right). \quad (28)$$

Этот результат совпадает с (8), когда там положить $|v_r| = 0$, т.е. не учитывать реактивную силу.

При тормозящей реактивной силе, когда знак “+” перед (3/ξ) в уравнении (25), общим его решением есть

$$w = \eta^{-2} (c_3 I_2(\eta) + c_4 K_2(\eta)). \quad (29)$$

Здесь c_3, c_4 – произвольные постоянные; $I_2(\eta), K_2(\eta)$ – модифицированные функции Бесселя и Макдональда индекса два.

Продифференцировав решение (29) согласно (4) и удовлетворив начальному условию (2), получаем

$$v(\eta) = \frac{2g}{\lambda \eta} \frac{BI_3(\eta) - K_3(\eta)}{BI_2(\eta) + K_2(\eta)}; \quad (30)$$

$$B = c_3 c_4^{-1} = \frac{2gK_3(\eta_0) + \lambda \eta_0 v_0 K_2(\eta_0)}{2gI_3(\eta_0) - \lambda \eta_0 v_0 I_2(\eta_0)}.$$

Как и в предыдущем случае, расчет скорости сводится к использованию таблиц цилиндрических функций.

При больших t или η асимптотика скорости совпадает с (8). Скорость асимптотически стремится к нулю с течением времени. При этом невозможен эффект реверсирования движения шара тормозящей реактивной силой, о котором шла речь выше при использовании гипотезы К.Э.Циолковского.

Таким образом, при $v_r = v(t)$, реактивная сила не влияет на асимптотическое поведение скорости падения шара при больших t . Это легко объяснить с помощью физических соображений. Действительно, скорость $v(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, а следовательно к нулю стремятся v_r и реактивная сила, что нивелирует влияние последней на

скорость падения шара в области больших t .

Результаты расчета и их анализ. Проведем расчет при $r_0 = 10^{-3}$ м; $\alpha = 10^{-4}$ с⁻¹; $\lambda = 0,5$ м/с; $v_0 = 2$ м/с. Рассмотрим случаи, когда реактивная сила является тормозящей, а также движущей. Цифрой 1 на рис. 4 представлена кривая, полученная при движущей реактивной силе, а цифрой 2 – тормозящей. Кривая 3 соответствует зависимости (28), которая при больших t

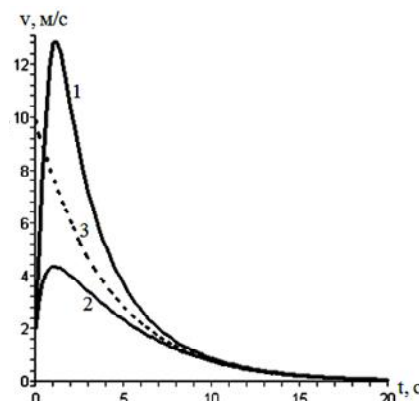


Рис. 4. Зависимости скорости от времени для различных направлений действия реактивной силы

является асимптотикой функции скорости независимо от знака ψ_r .

Расчеты показали, что для принятых исходных данных, независимо от направления действия реактивной силы, скорость падения шара имеет максимум.

Выводы. Введением новой переменной в дифференциальное уравнение падения шара, радиус которого убывает по его показательному закону, удалось свести к специальному уравнению Риккати, решение которого выражается в функциях Бесселя. Такое преобразование проводилось как при моделировании реактивной силы с применением гипотезы К.Э.Циолковского, так и без ее использования. С помощью асимптотических выражений функций Бесселя удалось построить приближенные формулы для оценки вертикального перемещения сферического тела. Скорость падающего шара убывающей массы имеет максимум, если тело брошено вниз с начальной скоростью, меньшей некоторого значения.

Список литературы: 1. Кучеренко С.І., Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тищенко Л.М. Моделювання польоту крапель, які випаровуються при русі в газі. – Харків: Едена, 2006. – 203с. 2. Кучеренко С.І., Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тищенко Л.М. Балістика крапель, які випаровуються при польоті. – Харків: ХНТУСГ, 2007. – 304с. 3. Севриков В.В., Карпенко В.А., Севриков І.В. Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты. – Севастополь: Сев ГТУ, 1996. – 260 с. 4. Абрамов Ю.А., Росоха В.Е., Шаповалова Е.А. Моделирование процессов в пожарных стволах. – Харьков: Фолио, 2001 – 195с. 5. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2, 3-е изд., М.: Просвещение, 1966. – 398 с. 6. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832с. 7. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977.-344с. 8. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. К расчету максимальной высоты выброса капель, испаряющихся при полете// Коммунальное хозяйство городов. Вып. 76. – К.: Техника, 2007. – С. 412 – 417.

Поступила в редакцию 25.06.08