боковые (тангенциальные) перемещения точек полуматриц (верхней и нижней), терпят разрывы вдоль плоскости разъема;

• наличие и размеры промежуточных опор (из рассмотренного диапазона) слабо влияют на характер деформирования полуматриц пресс-форм;

 по плоскости разъема полуматриц в средней части между боковыми опорами возникают зоны отрыва (происходит локальное раскрытие стыка),



что может приводить к образованию облоя.

Количественный анализ графиков измерений контролируемых параметров (см. рис. 6) дает основание утверждать, что вертикальные перемещения всех точек полуматриц ведут себя идентично: осадка вниз примерно на 300 мкм от действия усилий обжатия и закрытия ПФ, а затем только незначительные изменения вертикальных перемещений (до 50 мкм) от действия давления впрыска материала с образованием локальных зазоров (размер в разных местах различный, максимальный – на уровне 50 мкм). Заключение. Описанный в работе специализированный программно-модельный комплекс для исследования НЛС элементов пресс-форм с учетом контактного взаимодействия продемонстрировал работоспособность, эффективность, оперативность при проведении многочисленных расчетов. При этом никаких существенно упрощающих гипотез ни в конечно-элементную модель, ни в условия нагружения и сопряжения, ни в геометрию элементов пресс-форм внесено не было, т.е. задача решалась на том же уровне строгости, что и модельная [4,

8]. Эта особенность является достаточно важным качественным фактором, позволяющим использовать созданный программно-модельный комплекс как инструмент исследований, соединяющий одновременно высокую адекватность моделей и точность результатов с простотой применения и высокой скоростью моделирования.

В качестве направлений дальнейших исследований планируется проведение подробного сравнения результатов численных исследований с данными экспериментальных измерений.

Список литературы. 1. Храмиова И.Я., Ткачук А.Н., Ткачук Н.А., Бруль С.Т., Орлов Е.А., Чепурной А.Л. Специализированная система анализа и синтеза и расчетно-экспериментальное исследование элементов пресс-форм // Вісник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: "Машинознавство та САПР". - 2005. - № 60. – С.151-178. 2. Демина Н.А., Назарова О.П., Ткачук А.Н. Контактное взаимодействие в сопряжении "пуансон – матрица – заготовка" // Вісник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: "Машинознавство та САПР". – 2007. – № 23. – С.39-48. 3. Ткачук А.Н. Исследования термоупругих контактных задач элементов пресс-форм для литья под давлением с учетом фазовых превращений в отливке // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: "Машиноведение и САПР". – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2008. – Вып. 2. – С.144-158. 4. Ткачук А.Н. Численное решение тестовых термоупругих контактных задач для элементов пресс-форм // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: "Машиноведение и САПР". – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2008. – Вып. 9. – С.118-124. 5. Ткачук Н.А., Гриценко Г.Д., Ткачук А.Н., А.В. Бондаренко, Бруль С.Т. Расчетно-экспериментальное обоснование параметров численных моделей элементов механических систем // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: "Машиноведение и САПР". - Харьков: НТУ "ХПИ". – 2008. – Вып. 14. – С.117-125. **6.** Ткачук Н.А., Мовшович А.Я., Ткачук А.Н. Технологические системы холоднолистовой штамповки: к вопросу обоснования расчетных схем элементов разделительных штампов // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: "Машиноведение и САПР". - Харьков: НТУ "ХПИ". – 2008. – Вып. 14. – С.126-140. 7. Ткачук А. Н., Ткачук Н.А., Заболотских В.А., Капустин А.А. Методы, алгоритмы и модели для исследования физико-механических процессов при изготовлении деталей литьем // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: "Машиноведение и САПР". -Харьков: НТУ "ХПИ". – 2009. – Вып. 12. – С.129-148. 8. Ткачук Н.А., Мовшович И.Я., Ткачук А.Н. Элементы разделительных штампов: методы и модели для исследования напряженнодеформированного состояния // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. - 2009. - № 2. - С. 16-25.

Поступила в редколлегию 12.03.2009

УДК 534.1

Б.В. УСПЕНСКИЙ, асп. НТУ"ХПИ", *К.В. АВРАМОВ*, докт. техн. наук, ИПМаш НАН Украины, г. Харьков

КОЛЕБАНИЯ ОДНОДИСКОВОГО РОТОРА С ОДНОЙ УПРУГОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПОРОЙ

У статті отримано математичну модель коливань однодискового ротора на одній пружній опорі з урахуванням гіроскопічних моментів, що діють на диск. Проведено дослідження цієї моделі з застосуванням апарату асимптотичного аналізу. Виявлено нелінійний ефект в усталеному режимі коливань ротора.

Рис. 6. Примеры изменения контролируемых величин в процессе нагружения

Mathematical model of one-disc rotor vibrations accounting gyroscopic moment was constructed. The multiple scales method is used to analyze vibrations. Steady motions of the system were analyzed.

1. Постановка задачи и уравнения колебаний. Рассматривается двухопорный ротор с диском, расположенным посредине вала (рис. 1). Рассматриваемая система была частично исследована А.П.Филипповым; результаты его



исследований приведены в [1]. Однако исследования с применением методов асимптотического анализа им проведены не были.

Для описания динамики системы введем систему координат *Oxyz*. Левая опора системы предполагается жесткой. Правая опора имеет нелиней-

ную упругую характеристику:

$$P_{x} = k_{1}x_{2} + k_{2}x_{2}^{3}; P_{y} = k_{1}y_{2} + k_{2}y_{2}^{3},$$
(1)

где P_x, P_y – проекции упругой силы на оси неподвижной системы координат *Охуz*; x_2, y_2 – координаты правой цапфы вала, k_1, k_2 – параметры жесткости правой опоры.

Вращение ротора происходит с постоянной угловой скоростью Ω , эксцентриситет диска *е* предполагается малым. Плоскость диска перпендикулярна к недеформированной оси вала.

Целью работы является исследование периодических колебаний ротора при различных значениях угловой скорости вращения.

В качестве обобщенных координат выберем параметры x, y, a, b (см. рис.1), которые свяжем с линейными и угловыми перемещениями точки S. Уравнения движения системы в форме Лагранжа II рода получены в моно-графии [1]. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{\mathscr{B}} &= -\frac{p_1}{m} x + \frac{q_1}{m} a - \frac{r}{m} (Ex + Fa)^3 + e \,\Omega^2 \cos \Omega t - \frac{n_{11}}{m} \,\mathbf{\mathscr{B}} - c_3 \frac{n_{12}}{mr} \,\mathbf{\mathscr{B}}, \\ \mathbf{\mathscr{B}} &= -\frac{p_1}{m} y + \frac{q_1}{m} b - \frac{r}{m} (Ey + Fb)^3 + e \,\Omega^2 \sin \Omega t - \frac{n_{11}}{m} \,\mathbf{\mathscr{B}} - c_3 \frac{n_{12}}{mr} \,\mathbf{\mathscr{B}}, \\ \mathbf{\mathscr{B}} &= -\frac{I_p}{I_e} \Omega \mathbf{\mathscr{B}} - \frac{s_1}{I_e} a - \frac{G_2}{I_e} (Ex + Fa)^3 + \frac{r_1}{I_e} x - \frac{n_{12}}{I_e} \,\mathbf{\mathscr{B}} - c_3 \frac{n_{22}}{I_e} \,\mathbf{\mathscr{B}}, \end{aligned}$$
(2)
$$\mathbf{\mathscr{B}} &= -\frac{I_p}{I_e} \Omega \mathbf{\mathscr{B}} - \frac{s_1}{I_e} b - \frac{G_2}{I_e} (Ey + Fb)^3 + \frac{r_1}{I_e} y - \frac{n_{12}}{I_e} \,\mathbf{\mathscr{B}} - c_3 \frac{n_{22}}{I_e} \,\mathbf{\mathscr{B}}, \end{aligned}$$

Equation
$$G = k_1 + \frac{c_{22}}{l^2} + c_{11} \frac{1}{2l}; H = \frac{k_2}{G}; E = \frac{1}{G} \frac{c_{11}}{2}; F = \frac{1}{G} \frac{c_{22}}{l};$$

$$p_1 = c_{11} - \frac{1}{2} c_{11}E; q_1 = \frac{1}{2} c_{11}F; s_1 = c_{22} \left(1 - \frac{1}{l}F\right) r_1 = c_{11} + \frac{c_{22}}{l}E;$$

$$r = \frac{1}{2} c_{11}H; G_2 = \frac{c_{22}}{l}H; n_{11} = c_2E^2; n_{12} = c_2EF; n_{22} = c_2F^2; c_3 = 0.1;$$

 c_2 – малый коэффициент сопротивления линейным перемещениям диска; c_{11}, c_{22} – коэффициенты жесткости вала; l – длина вала; m – масса ротора, приведенная к диску; I_e, I_p – экваториальный и полярный моменты инерции диска.

Приведем систему (2) к безразмерным переменным:

$$x = 0.1 \sqrt{\frac{I_p}{m}} \tilde{x}; y = 0.1 \sqrt{\frac{I_p}{m}} \tilde{y}; t = \sqrt{\frac{m}{p_1}} t .$$
(3)

Опуская знак тильды в обозначениях, динамическую систему (2) относительно безразмерных переменных и параметров представим так:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = -Ax + mBa - Nm(x + Qa)^{3} + \Omega^{2} cm\cos\Omega t - mh_{11}\mathbf{a} - mh_{12}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = -Ay + mBb - Nm(y + Qb)^{3} + \Omega^{2} cm\sin\Omega t - mh_{11}\mathbf{a} - mh_{12}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = -I\Omega\mathbf{a}\mathbf{a} - n^{2}a + Mx - m(x + Qa)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{a} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{b} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{a} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{b} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{b} - mh_{22}\mathbf{a} \\ \mathbf{b} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{b} - mh_{22}\mathbf{b} \\ \mathbf{b} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{b} - mh_{22}\mathbf{b} \\ \mathbf{b} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{b} - mh_{22}\mathbf{b} \\ \mathbf{b} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{b} - mh_{22}\mathbf{b} \\ \mathbf{b} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{b} - mh_{22}\mathbf{b} \\ \mathbf{b} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{b} - mh_{22}\mathbf{b} \\ \mathbf{b} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{b} - mh_{22}\mathbf{b} \\ \mathbf{b} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + My - m(y + Qb)^{3} - mh_{21}\mathbf{b} - mh_{22}\mathbf{b} \\ \mathbf{b} = I\Omega\mathbf{a} - n^{2}b + mh_{$$

2. Асимптотический анализ динамики системы. Для исследования динамики системы (4) воспользуемся методом многих масштабов, описанным в [2]. Решения (4) представим в следующем виде:

$$t_0 = t; t_1 = mt; x = x_0 + mx_1 + ...; y = y_0 + my_1 + ...; a = a_0 + ma_1 + ...; b = b_0 + mb_1 + ...$$
(5)

Решение (5) введем в систему (4) и произведем асимптотический анализ. Выделение слагаемых при m^0 приводит к следующей системе:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial t_0^2} + A x_0 = 0; \frac{\partial^2 y_0}{\partial t_0^2} + A y_0 = 0;$$

$$\frac{\partial^2 a_0}{\partial t_0^2} + I \Omega \frac{\partial b_0}{\partial t_0} + n^2 a_0 = M x_0; \frac{\partial^2 b_0}{\partial t_0^2} - I \Omega \frac{\partial a_0}{\partial t_0} + n^2 b_0 = M y_0.$$
(6)

Первые два уравнения системы (6) имеют решения:

$$x_0 = C_1(t_1)e^{i\sqrt{A}t_0} + \overline{C}_1(t_1)e^{-i\sqrt{A}t_0}; y_0 = C_2(t_1)e^{i\sqrt{A}t_0} + \overline{C}_2(t_1)e^{-i\sqrt{A}t_0},$$

где $C_1(t_1), C_2(t_1)$ – комплексные модуляционные переменные, зависящие от t_1 . Решения однородной части второй пары уравнений представим так:

$$a_{0} = x_{1}(t_{1})e^{iwt_{0}} + \overline{x_{1}}(t_{1})e^{-wt_{0}}; b_{0} = z_{1}(t_{1})e^{iwt_{0}} + \overline{z_{1}}(t_{1})e^{-wt_{0}},$$
(7)

где $x_1(t_1), \overline{x_1}(t_1), V_1(t_1), V_1(t_1) -$ комплексные модуляционные переменные.

Подставив (7) в (6) из условия существования нетривиального решения получим значения собственных частот W_1, W_2 в следующем виде: $w_{1,2}^2 = n^2 + I^2 \Omega^2 d_{1,2}$, где $d_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4n^2}{I^2 \Omega^2}} \right)$ Переменные z_1, z_2 связаны с

 $x_{1,x_{2}}$ через соотношения: $z_{1,2} = -ig_{1,2}x_{1}$, где $g_{1,2} = -\frac{I\Omega w_{1,2}}{n^{2} - w_{1,2}^{2}}$.

Решение второй пары уравнений (6) с учетом неоднородной правой части имеет вид:

$$a_{0} = x_{1}e^{iw_{1}t_{0}} + \overline{x_{1}}e^{-w_{1}t_{0}} + x_{2}e^{iw_{2}t_{0}} + \overline{x_{2}}e^{-w_{2}t_{0}} + x_{n}e^{i\sqrt{A}t_{0}} + \overline{x_{n}}e^{-\sqrt{A}t_{0}};$$

$$b_{0} = z_{1}e^{iw_{1}t_{0}} + \overline{z_{1}}e^{-w_{1}t_{0}} + z_{2}e^{iw_{2}t_{0}} + \overline{z_{2}}e^{-w_{2}t_{0}} + z_{n}e^{i\sqrt{A}t_{0}} + \overline{z_{n}}e^{-\sqrt{A}t_{0}},$$
(8)

где

$$\mathbf{x}_{\mu} = g_1 C_1(t_1) - ig_2 C_2(t_1); \mathbf{z}_{\mu} = g_1 C_2(t_1) + ig_2 C_1(t_1);$$

$$g_1 = \frac{M(\mathbf{n}^2 - A)}{(\mathbf{n}^2 - A)^2 + I^2 \Omega^2 A}; g_2 = \frac{MI \Omega \sqrt{A}}{(\mathbf{n}^2 - A)^2 + I^2 \Omega^2 A}.$$

Для получения зависимости модуляционных переменных от t_1 рассмотрим систему первого приближения, которая принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^{2} x_{1}}{\partial t_{0}^{2}} + 2 \frac{\partial^{2} x_{0}}{\partial t_{0} \partial t_{1}} + Ax_{1} = Ba_{0} - N(x_{0} + Qa_{0}) + \Omega^{2} c \cos \Omega t_{0} - h_{11} \frac{\partial x_{0}}{\partial t_{0}} - h_{12} \frac{\partial a_{0}}{\partial t_{0}};$$

$$\frac{\partial^{2} y_{1}}{\partial t_{0}^{2}} + 2 \frac{\partial^{2} y_{0}}{\partial t_{0} \partial t_{1}} + Ay_{1} = Bb_{0} - N(y_{0} + Qb_{0}) + \Omega^{2} c \sin \Omega t_{0} - h_{11} \frac{\partial y_{0}}{\partial t_{0}} - h_{12} \frac{\partial b_{0}}{\partial t_{0}};$$

$$\frac{\partial^{2} a_{1}}{\partial t_{0}^{2}} + 2 \frac{\partial^{2} a_{0}}{\partial t_{0} \partial t_{1}} + n^{2} a_{1} + I\Omega \left(\frac{\partial b_{0}}{\partial t_{1}} + \frac{\partial b_{1}}{\partial t_{0}}\right) = M x_{1} - (x_{0} + Qa_{0}) +$$

$$+ \Omega^{2} c \cos \Omega t_{0} - h_{21} \frac{\partial x_{0}}{\partial t_{0}} - h_{22} \frac{\partial a_{0}}{\partial t_{0}};$$

$$\frac{\partial^{2} b_{1}}{\partial t_{0}^{2}} + 2 \frac{\partial^{2} b_{0}}{\partial t_{0} \partial t_{1}} + n^{2} b_{1} - I\Omega \left(\frac{\partial a_{0}}{\partial t_{1}} + \frac{\partial a_{1}}{\partial t_{0}}\right) = My_{1} - (y_{0} + Qb_{0}) +$$

$$+ \Omega^{2} c \cos \Omega t_{0} - h_{21} \frac{\partial y_{0}}{\partial t_{0}} - h_{22} \frac{\partial b_{0}}{\partial t_{0}}.$$

Рассмотрим колебания ротора в случае выполнения условий основного резонанса, которое принимает следующий вид: $\Omega = \sqrt{A} + ms_1$. Предположим, что частоты системы удовлетворяют условию внутреннего резонанса:

$$2\sqrt{A} = W_1 - W_2 + ms_2.$$

С учетом выражений для w_1, w_2 в практически важном случае I = 2, связь между s_1 и s_2 устанавливается из резонансных условий так: $2s_1 = -s_2$. Тогда основной и внутренний резонансы записываются через параметр расстройки *s* следующим образом:

$$\Omega = \sqrt{A} - m \frac{s}{2}; 2\sqrt{A} + w_2 = w_2 + ms .$$
 (10)

Оставляя наиболее важные слагаемые в системе (10), представим ее так:

$$\frac{\partial^{2} x_{1}}{\partial t_{1}^{2}} + A x_{1} = S_{1} e^{i\sqrt{A}t_{0}} + \overline{S}_{1} e^{-i\sqrt{A}t_{0}} + \dots; \\ \frac{\partial^{2} a_{1}}{\partial t_{1}^{2}} + A y_{1} = S_{2} e^{i\sqrt{A}t_{0}} + \overline{S}_{2} e^{-i\sqrt{A}t_{0}} + \dots; \\ \frac{\partial^{2} a_{1}}{\partial t_{1}^{2}} + I\Omega \left(\frac{\partial b_{1}}{\partial t_{1}}\right) + n^{2} a_{1} = R_{11} e^{iw_{1}t_{1}} + R_{12} e^{iw_{2}t_{1}} + \overline{R}_{11} e^{-iw_{1}t_{1}} + \overline{R}_{12} e^{-iw_{2}t_{1}};$$
(11)
$$\frac{\partial^{2} b_{1}}{\partial t_{1}^{2}} - I\Omega \left(\frac{\partial a_{1}}{\partial t_{1}}\right) + n^{2} b_{1} = R_{21} e^{iw_{1}t_{1}} + R_{22} e^{iw_{2}t_{1}} + \overline{R}_{21} e^{-iw_{1}t_{1}} + \overline{R}_{22} e^{-iw_{2}t_{1}},$$

где $S_1, S_2, R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$ – полиномы относительно модуляционных переменных и их производных по t_1 . Эти полиномы получаются как коэффициенты при экспонентах $\exp(\pm i\sqrt{A}t_0)$ в первых двух уравнениях и $\exp(\pm iw_1t_0)$, $\exp(\pm iw_2t_0)$ в третьем и четвертом уравнениях. При их построении учитывается взаимосвязь между переменными в системе (9) и резонансные соотношения (10). Для исключения секулярных членов в первом и втором уравнениях достаточно приравнять нулю соответствующие коэффициенты при экспонентах $\exp(\sqrt{At_0})$ и $\exp(-\sqrt{At_0})$. Для решения третьего и четвертого уравнения системы (11) будем разыскивать колебания в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{1} &= Q_{11} e^{i w_{i} t_{0}} + \overline{Q}_{11} e^{-w_{i} t_{0}} + Q_{12} e^{i w_{2} t_{0}} + \overline{Q}_{12} e^{-w_{2} t_{0}} ; \\ \mathbf{b}_{1} &= Q_{21} e^{i w_{i} t_{0}} + \overline{Q}_{21} e^{-w_{i} t_{0}} + Q_{22} e^{i w_{2} t_{0}} + \overline{Q}_{22} e^{-w_{2} t_{0}} . \end{aligned}$$

Подставив эти решения во вторую пару уравнений системы (11) и приравняв слагаемые при соответствующих экспонентах, получим линейную систему четырех алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными:

$$Q_{11}(\mathbf{p}^{2} - \mathbf{w}_{1}^{2}) + I\Omega w_{1}iQ_{21} = R_{11} :- I\Omega w_{1}iQ_{11} + Q_{21}(\mathbf{p}^{2} - \mathbf{w}_{1}^{2}) = R_{21} ;$$

$$Q_{12}(\mathbf{p}^{2} - \mathbf{w}_{2}^{2}) + I\Omega w_{2}iQ_{22} = R_{12} :- I\Omega w_{2}iQ_{12} + Q_{22}(\mathbf{p}^{2} - \mathbf{w}_{2}^{2}) = R_{22}$$

Эта система разделяется на две независимые системы с нулевыми определителями. Из условия разрешимости таких систем, следуют соотношения связи для правых частей $R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$:

$$R_{11}(n^{2} - w_{1}^{2}) - I\Omega w_{1}i R_{21} = 0; I\Omega w_{1}i R_{11} + R_{21}(n^{2} - w_{1}^{2}) = 0;$$

$$R_{12}(n^{2} - w_{2}^{2}) - I\Omega w_{2}i R_{22} = 0; I\Omega w_{2}i R_{12} + R_{22}(n^{2} - w_{2}^{2}) = 0.$$

Таким образом, получено четыре модуляционных уравнения относительно комплексных переменных C_1, C_2, x_1, x_2 .

$$R_{11}(n^{2} - w_{1}^{2}) - R_{21}(I\Omega w_{1}i) = 0; \quad R_{12}(n^{2} - w_{1}^{2}) - R_{22}(I\Omega w_{1}i) = 0; \quad S_{1} = 0; \quad S_{2} = 0. \quad (12)$$

Полученные модуляционные уравнения могут быть приведены к следующей форме:

$$\frac{dC_1}{dt_1} = P_{C_1}(C_1, C_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, e^{-ist_1}); \frac{dC_2}{dt_1} = P_{C_2}(C_1, C_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, e^{-ist_1});$$

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dt_1} = P_{\mathbf{x}_1}(C_1, C_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, e^{-ist_1}); \frac{d\mathbf{x}_2}{dt_1} = P_{\mathbf{x}_2}(C_1, C_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, e^{-ist_1}).$$
(13)

где $P_{C_1}, P_{C_2}, P_{x_1}, P_{x_2}$ – полиномы третьего порядка относительно своих аргументов. Итак, выведена система модуляционных уравнений в комплексных переменных. Они представляют собой нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения первого порядка, решить которые аналитически не представляется возможным.

Для анализа решений этой системы введем следующую замену переменных:

$$C_{1} = (x_{1} + iy_{1})e^{-i\frac{s}{2}t_{1}}; C_{2} = (x_{2} + iy_{2})e^{-i\frac{s}{2}t_{1}}; X_{1} = x_{3} + iy_{3}; X_{2} = x_{4} + iy_{4}, \quad (14)$$

где $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$ – действительные переменные. Такая замена приводит (13) к системе нелинейных уравнений первого порядка в действительных переменных. После разделения действительной и мнимой частей эти уравнения представляются в следующей форме:

$$z' = F(z), \tag{15}$$

где $z = \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{r} \\ x, y \end{bmatrix}^T$; $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}^T$; F – векторфункция, элементы которой являются полиномами третьего порядка относительно аргументов.

Исходя из решений (7), (8) и резонансных соотношений (10), обобщенные координаты ротора x, y, a, b и переменные модуляционных уравнений связаны между собой так:

$$x = A_{1} \cos(y_{1} - \Omega t) + O(\mathbf{m}); y = A_{2} \cos(y_{2} - \Omega t) + O(\mathbf{m});$$

$$a = A_{3} \cos(y_{3} - \Omega t) + O(\mathbf{m}); b = A_{4} \cos(y_{4} - \Omega t) + O(\mathbf{m}),$$
(16)

где $A_1 = 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2};$ $A_2 = 2\sqrt{x_2^2 + y_2^2};$ $A_3 = 2\sqrt{(g_1x_1 + g_2y_2)^2 + (g_1y_1 - g_2x_2)^2};$ $A_4 = 2\sqrt{(g_1x_2 - g_2y_1)^2 + (g_1y_2 + g_2x_1)^2}.$

Таким образом, ротор совершает установившиеся колебания с частотой, равной угловой скорости его вращения.

3. Численный анализ периодических колебаний. Поскольку целью данного исследования является изучение периодических движений ротора, в дальнейшем рассматриваются состояния равновесия модуляционных уравнений как наиболее простой случай движений. Для получения такого решения исследуем неподвижные точки системы (14). Для этого решим систему нелинейных алгебраических уравнений, которая получается из (16), и она принимает следующий вид:

$$F(z) = 0. \tag{17}$$

Вследствие сложности системы (17), поиск ее решения производится численно. Для численного анализа был использован математический пакет Maple 11. Исследовались колебания ротора со следующими значениями параметров [3]: m = 15.3 кг; $I_p = 0.441 \text{ кг} \cdot \text{m}^2$; $I_e = 0.22 \text{ кг} \cdot \text{m}^2$; $k_1 = 9.8 \cdot 10^5 \text{ H/m}$; $k_2 = 11.6 \cdot 10^{11} \text{ H/m}^3$; l = 0.9 м; e = 0.0001 м; $c_{11} = 108543 \text{ H/m}$; $c_{22} = 21980 \text{ H} \cdot \text{м}$. Параметр затухания принимался $c_2 = \frac{0.01 \cdot Am}{E^2 T}$, а малый параметр m = 0.01896.

Исследовалась зависимость решений системы (17) от параметра расстройки *s*. В соответствии с формой решения (16) строились значения амплитуды при варьировании параметра расстройки. Результаты исследования представлены на ампли-



Рис. 2. Зависимость амплитуды обобщенной координаты у от параметра расстройки

тудно-частотной характеристике (рис. 2).

Заключение. Численные исследования показали, что угловые обобщенные координаты системы совершают колебания в одночастотном режиме, а не в трехчастотном, как можно было ожидать по виду решения (8). Был произведен анализ устойчивости периодических движений по критерию Лагранжа. В левой полуплоскости существуют области, в которых наблюдаются два устойчивых режима движения. Таким образом, при малой диссипации и при удалении частоты возбуждения от резонанса может существовать несколько возможных установившихся режимов колебаний. Их реализация зависит от начальных условий.

Было проведено сравнение асимптотических решений с результатами их численного интегрирования. Параметры выбирались следующими: $c_2 = \frac{0.1Am}{E^2T}$; s = 0.1. Результаты сравнения показали, что в рассматриваемом

примере максимальное отклонение аналитического решения от результатов численного моделирования является величиной порядка *m*, что соответствует теории метода многих масштабов.

Список литературы: 1. Филиппов А.П. Колебания механических систем. – К.: Наукова думка. – 1965. – 716 с. 2. Найфэ А. Введение в методы возмущений: Пер. с англ. – М.: Мир. – 1984. – 535 с. 3. Гробов В. А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 166 с

Поступила в редколлегию 17.08.09.

УДК 621.01: 539.3

А.Д. ЧЕПУРНОЙ, докт. техн. наук, гл. инженер ОАО "Азовмаш", г. Мариуполь,

Г.П. ГЛИНИН, зам. ген. директора ОАО "Головной специализированный конструкторско-технологический институт", г. Мариуполь, *Н.А. ТКАЧУК*, докт. техн. наук, зав. каф. ТММиСАПР НТУ "ХПИ"

БАЗОВЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ СИНТЕЗА ГИБРИДНЫХ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЫСОКООТВЕТСТВЕННЫХ МАШИН

У статті наведені основні результати експериментального дослідження статичних і динамічних міцнісних характеристик напівпричепа-цистерни. Вони є базовими для створення гібридних розрахункових моделей досліджуваного класу машин (на прикладі паливозаправників).

In the paper the basic results of experimental research of static and dynamic strength descriptions of cistern's semitrailer are presented. They are base for creation of hybrid computational models of the probed class of machines (on the example of fuellers).

Введение. В процессе проектирования высокоответственных машин требуется расчет их основных параметров при отсутствии полной и достоверной информации о величине нагрузок, действующих в процессе будущей эксплуатации на создаваемую машину. В связи с этим актуальной и важной задачей является расчетное или экспериментальное вычисление комплекса эксплуатационных нагрузок. Для решения данной проблемы в работе [1] был предложен новый подход, сочетающий расчетно-экспериментальные исследования машинаналогов и вновь проектируемых машин. В частности, комплекс экспериментальных исследований машин-аналогов является основой при создании так называемых "гибридных" расчетных моделей вновь проектируемых машин. В данной статье приведены результаты этих базовых экспериментальных исследований на примере топливозаправщика АТЗ-40 конструкции и производства ОАО "Азовмаш".

В связи с тем, что автотопливозаправщик представляет собой сложную транспортно-технологическую машину, смонтированную на базе серийного шасси, то основное внимание уделено оригинальному элементу машины – автоцистерне. Именно этот элемент является определяющим для кинематики и динамики автопоезда в целом, а также для расчета эксплуатационных нагрузок и прочности машины в целом и автоцистерны в частности.

1. Объект экспериментальных испытаний. Автотопливозаправщик АТЗ-35(40)-6443 относится к среднему типу АТЗ по ГОСТ 235246-87, изготовлен в ОАО "Азовмаш" в соответствии с 9010.00.000 ТУ и комплектом технической документации 9010.00.000 и представляет собой автопоезд, состоящий из полуприцепа (цистерна на двухосном шасси), тягача КрАЗ-6443 и предназначен для выполнения следующих операций [2-4]: наполнение цистерны топливом собственным или сторонним насосом (нижним или верхнимналивом); за-