технике. В качестве примеров можно привести цистерны для перевозки жидкостей, емкости для хранения нефтепродуктов, резервуары, используемые на атомных электростанциях, и т. д. В работах [5], [6] авторами предложен подход, основанный на использовании метода граничных интегральных уравнений (МГИУ), применительно к решению задач о собственных колебаниях оболочек вращения, заполненных жидкостью, и о собственных колебаниях жидкости в жестком сосуде. Данный подход имеет определенные преимущества: основные уравнения содержат значения искомых функций и их производных только на границе области, занятой жидкостью, что позволяет уменьшить на единицу размерность задачи. В настоящей работе предлагаемая методика развита применительно к исследованию процессов деформирования оболочек вращения, содержащих жидкость, при их динамическом нагружении.

1. Постановка задачи. Рассмотрим тонкую упругую оболочку вращения, частично заполненную идеальной несжимаемой жидкостью. Обозначим смачиваемую поверхность оболочки через S_1. Введем связанную с оболочкой систему координат $0xyz$, в которой свободная поверхность жидкости S_0 в невозмущенном состоянии совпадает с плоскостью $x0y$.

Колебания оболочки и жидкости относительно невозмущенного состояния считаем малыми и безотрывными. Они описываются вектором перемещений срединной поверхности оболочки $\boldsymbol{U}$ и вектором скоростей жидкости $\boldsymbol{V}$.

Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, и ее возмущенное движение является потенциальным с потенциалом $\varphi(x,y,z,t)$. Давление жидкости определим в соответствии с интегралом Коши-Лагранжа в предположении, что собственная скорость жидкости равна нулю

$$P_l = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{1}$$

где P_l – приращение давления в жидкости в возмущенном движении, ρ – плотность жидкости.

Уравнение колебаний упругой оболочки с жидкостью запишем в векторном виде

$$\boldsymbol{LU} + \mathrm{M}\ddot{\boldsymbol{U}} = P_l + Q, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$ – операторы упругих и массовых сил в оболочке; $\boldsymbol{U} = (u_1, u_2, w)$ – вектор перемещений; $Q(t)$ – вектор внешней поверхностной нагрузки.

Кинематическое граничное условие безотрывного движения жидкости на смачиваемой поверхности оболочки S_1:

$$\boldsymbol{Vn} = \dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{n} = \dot{w}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{n}$ – внешняя единичная нормаль к смоченной поверхности оболочки, w – нормальное перемещение оболочки.

Пусть $z = H$ – координата невозмущенной свободной поверхности жидкости. Граничное условие на свободной поверхности жидкости S_0 отвечает условию отсутствия давления на свободной поверхности и имеет вид

$$P_l = 0. \tag{4}$$

Гидродинамическую задачу (1)–(4) можно свести к одной неизвестной функции $\varphi(x, y, z, t)$. Для потенциала скоростей приходим к следующей краевой задаче:

$$\boldsymbol{LU} + \mathrm{M}\ddot{\boldsymbol{U}} + \rho\varphi = Q, \tag{5}$$

$$\nabla^2 \varphi = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \dot{w}, \quad P \in S_1, \tag{7}$$

$$\varphi = 0, \quad P \in S_0. \tag{8}$$

Здесь предполагается, что $S = S_1 \cup S_0$; точка P принадлежит поверхности S.

2. Система граничных интегральных уравнений для определения давления жидкости. Решение связанной задачи гидроупругости требует определения давления жидкости на смоченные поверхности оболочки. Эта задача сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений, при этом предполагается, что скорость движения упругой поверхности задана. Определение давления на смоченные поверхности оболочки приводит к смешанной краевой задаче для уравнения Лапласа (5) – (8).

Будем искать ее решение в виде разложения по собственным формам колебаний оболочки в вакууме

$$U(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(x, y, z) c_k(t), \tag{9}$$

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x, y, z) \dot{c}_k(t), \tag{10}$$

где $u_k(x, y, z)$ – собственные формы колебаний, $c_k(t)$ – неизвестные коэффициенты. Для определения функций φ_k формулируются следующие краевые задачи:

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = w_k, \quad P_0 \in S_1, \varphi_k = 0, \quad P_0 \in S_0. \tag{11}$$

Будем искать гармонические функции φ_k в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев [7], т. е. используем прямую формулировку метода граничных интегральных уравнений. Опуская индекс k, имеем

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS. \tag{12}$$

Для смешанной задачи (5) – (8) это интегральное представление приводит к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$2\pi\varphi(P_0) + \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P - P_0|} dS_0 = \iint_{S_1} w \frac{1}{|P - P_0|} dS_1; \quad P_0 \in S_1$$

$$\iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS_1 - \iint_{S_0} q\frac{1}{|P-P_0|}dS_0 = \iint_{S_1} w\frac{1}{|P-P_0|}dS_1; \quad P_0 \in S_0 \qquad (13)$$

относительно неизвестных функций φ и q. При этом функция φ, определенная на поверхности S_1, представляет собой давление на смоченную поверхность оболочки, а функция q, определенная на поверхности S_0, – нормальную составляющую скорости жидкости на свободной поверхности.

Неизвестные функции представим в виде рядов Фурье по окружной координате

$$w = w(r,z)\cos\alpha\theta\,, \quad \varphi = \varphi(r,z)\cos\alpha\theta\,. \qquad (14)$$

Далее выполним преобразования, подробно проведенные в [5], с целью сведения ядер в (13) к стандартным эллиптическим интегралам. В результате преобразований получим систему интегральных уравнений, где интегралы вычисляются по меридиану смачиваемой поверхности оболочки и радиусу свободной поверхности жидкости. Для решения системы (13) используется метод граничных элементов с постоянной аппроксимацией плотности на элементе.

3. Метод разложения по собственным формам для динамической задачи. После определения φ_k подставляем выражения (9), (10) в уравнение (5)

$$\boldsymbol{L}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k u_k\right) + \boldsymbol{M}\left(\sum_{k=1}^{m} \ddot{c}_k u_k\right) = -\rho\sum_{k=1}^{m}\ddot{c}_k\varphi_k + Q\,. \qquad (15)$$

Отметим, что для собственных векторов справедливы следующие соотношения:

$$\boldsymbol{L}u_k = \omega_k^2\boldsymbol{M}u_k\,, \quad (\boldsymbol{M}u_k, u_j) = \delta_{kj}\,, \qquad (16)$$

где ω_k, u_k – собственные частоты и формы колебаний оболочки в вакууме.

Умножая уравнение (15) скалярно на u_j и учитывая свойства (16), приходим к системе дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных коэффициентов c_k

$$\omega_j^2\delta_{kj}c_j + \delta_{kj}\ddot{c}_j = -\rho\sum_{k=1}^{m}\ddot{c}_k\varphi_k u_j + Qu_j\,, \quad j = 1, m\,. \qquad (17)$$

Для решения этой системы используется метод Рунге-Кутта. Собственные частоты и формы колебаний оболочки в вакууме определяются методом конечных элементов.

4. Деформирование полусферической оболочки при динамическом нагружении. Рассматривается задача о колебаниях полусферической оболочки, заполненной жидкостью, под действием равномерно распределенного давления $Q(t) = Q_0H(t)$, где $Q_0 = 0.1$ МПа, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда (рис. 1). Параметры оболочки: радиус $R = 5.08$ м, толщина $h = 0.0254$ м, модуль упругости $E = 0.7\cdot10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность материала $\rho_0 = 2770$ кг/м^3, плотность жидкости $\rho = 1000$ кг/м^3. Условия закрепления – шарнирное опирание по контуру оболочки.

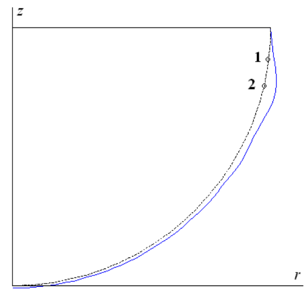

Рис. 1. Деформированное состояние оболочки

На рис. 2 приведены графики изменения во времени радиальных перемещений в узлах 1 и 2 оболочки, взаимодействующей с жидкостью. На рис. 3 показаны графики зависимости от времени гидродинамического давления: *а* – вариант расчета по предложенному методу; *б* – расчет по программному комплексу, реализующему трехмерный метод конечных элементов. Хорошее согласование результатов свидетельствует о достоверности метода и алгоритма решения задачи.

Выводы. На основе метода граничных интегральных уравнений предложен подход к решению задачи определения напряженного и деформированного состояния оболочек вращения, частично заполненных жидкостью, при динамическом нагружении. В соответствии с подходом рассматриваемая задача сводится к последовательному определению частот и форм колебаний оболочки в вакууме (первый этап), решению смешанных задач для уравнения Лапласа – второй этап, построению матрицы присоединенных масс жидкости – третий этап и интегрированию полученных уравнений по времени. В дальнейшем предполагается использовать данную методику при решении задач динамики оболочечных конструкций, содержащих жидкость, находящихся под воздействием различных нестационарных нагрузок.

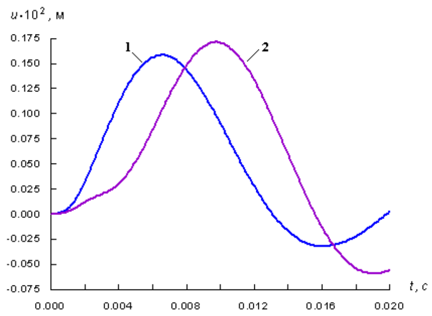

Рис. 2. Радиальные перемещения оболочки, заполненной жидкостью

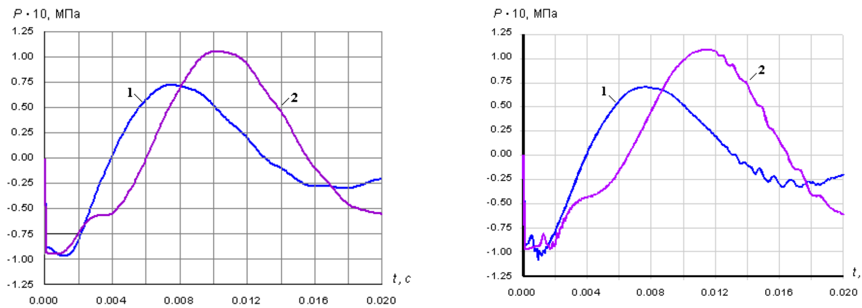

Рис. 3. Гидродинамическое давление в оболочке