

И.Г. ЛЬВОВ, асп. каф. ДПМ НТУ „ХПИ”

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ КОМПОЗИТОВ

Робота присвячена вивченню механічних властивостей односпрямованого композиту з урахуванням його мікроструктури. Розроблена методика розрахунку ефективних модулів односпрямованого композиту та створена програма автоматизованого підрахунку констант композита для квадратного та гексагонального типів армування. Сформована методика визначення умови початку пластичності і фізичних співвідношень пружно-пластичного деформування односпрямованого композиту.

Paper is devoted to the study of mechanical properties of the unidirectional composite subject to its microstructure. The method of calculation of the unidirectional composite's effective modules is developed and the program of the calculation of composite constants is created for the square and hexagonal types of reinforcement. The method of determination for condition of plasticity and physical correlations for resiliently plastic deformation of the unidirectional composite is formed.

Введение. В современной технике широко применяются конструкции, изготовленные из композиционных материалов. Стремление максимально использовать прочностные свойства материала приводит к работе конструкции за пределами упругости. Однако расчет таких конструкций без построения модели гомогенной среды нецелесообразен. Характеристики структурно – неоднородных сред можно изучить на основе моделей механики сплошных сред, в которых малый объем рассматривается как сплошное однородное тело.

Принципы гомогенизации композитов были изложены во многих работах. Влияние свойств компонентов и вида структуры неоднородных сред на их эффективные параметры рассмотрены в работах [1, 2]. Метод осреднения для определения упругопластических характеристик волокнистых композитов при упрощенной модели представительного объема и осесимметричном деформировании описан в [3]. Теория упругопластического деформирования произвольно упрочненных материалов, учитывающая структуру композита с помощью индикаторной функции, предложена в [4]. Деформирование однонаправленных композитов при продольном сдвиге с учетом взаимодействия волокон рассмотрено в [5]. Приближенные методы построения модели упругопластического деформирования композита также описаны в работе [6].

В данной работе использован метод осреднения, в котором исследование всей структуры материала заменяется исследованием минимального представительного объема. Метод реализован путем проведения численных экспериментов по упругопластическому деформированию представительной ячейки. Результаты исследования механических свойств гомогенного материала, полученные для минимального представительного объема, обобщаются для всего композита.

Численная методика определения упругих констант композита. Рассмотрим гетерогенный материал – однонаправленный композит с квадратной схемой армирования. Он состоит из изотропной матрицы и цилиндрических включений. Для такого гетерогенного материала эквивалентный ему гомогенный

материал является ортотропным с равноправными направлениями x и y . В этом случае физические соотношения упругого деформирования содержат 6 констант

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_x \rangle \\ \langle \sigma_y \rangle \\ \langle \sigma_z \rangle \\ \langle \tau_{xy} \rangle \\ \langle \tau_{xz} \rangle \\ \langle \tau_{yz} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_x \rangle \\ \langle \varepsilon_y \rangle \\ \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \gamma_{xy} \rangle \\ \langle \gamma_{xz} \rangle \\ \langle \gamma_{yz} \rangle \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Для нахождения упругих констант гомогенного материала использовался метод осреднения. Он заключается в проведении численных экспериментов над минимальной представительской ячейкой для нахождения средних напряжений и деформаций. При этом, учитывая симметрию относительно границ ячейки, осредненную деформацию можно определить по перемещению противоположных границ ячейки друг относительно друга. Осредненные напряжения определяются интегрированием соответствующих величин по координатным площадкам. Осредненные по представительскому объему напряжения и деформации используются для подсчета эффективных модулей композита в целом.

Для определения упругих констант волокнистого композита с квадратным типом армирования необходимо провести 4 численных эксперимента: растяжение в направлении волокна, растяжение поперек волокон, сдвиг в плоскости профиля волокна и продольный сдвиг.

Представительские объемы для проведения экспериментов по растяжению в продольном направлении поперек волокна и сдвигу в плоскости XOY представляют собой бесконечные призмы, находящиеся в условиях плоской деформации. На рис. 1 и 2 представлены поперечные сечения представительских объемов для обоих случаев.

В первом численном эксперименте растяжение вдоль волокна задается обобщенная деформация $\langle \varepsilon_z \rangle$ не равной нулю, а остальные обобщенные деформации принимаются нулевыми. Это достигается заданием граничных условий симметрии на всех краях. В этом случае связь между осредненными напряжениями и деформациями сокращается до

$$\begin{cases} \langle \sigma_x \rangle = C_{13} \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \sigma_y \rangle = C_{13} \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \sigma_z \rangle = C_{33} \langle \varepsilon_z \rangle \end{cases}. \quad (2)$$

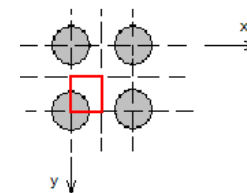


Рис. 1

Для определения усредненного напряжения $\langle \sigma_x \rangle$ интегрируется соответствующая компонента

по линии $x = \text{const}$:

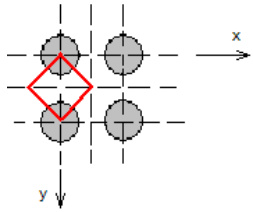


Рис. 2

$$\langle \sigma_x \rangle = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma_x dy, \quad (3)$$

где l – сторона квадрата поперечного сечения.

Усредненное напряжение $\langle \sigma_z \rangle$ находится интегрированием σ_z по площади представительской ячейки:

$$\langle \sigma_z \rangle = \frac{1}{l^2} \int_0^l \int_0^l \sigma_z dx dy. \quad (4)$$

Из подсчета средних значений напряжений и их подстановки в физические соотношения находятся 2 константы: C_{13} и C_{33} .

Во втором численном эксперименте, растяжение поперек волокон, задаются осредненные деформации $\langle \varepsilon_x \rangle$ или $\langle \varepsilon_y \rangle$ не равными нулю, остальные же осредненные деформации, как и в первом эксперименте, приравниваются нулю с помощью задания граничных условий симметрии на трех границах.

Усредненные напряжения σ_x и σ_y находятся интегрированием по линиям $x=\text{const}$ и $y=\text{const}$ соответственно:

$$\langle \sigma_x \rangle = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma_x dy; \quad \langle \sigma_y \rangle = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma_y dx. \quad (5)$$

В результате получим еще 2 константы: C_{11} и C_{12} .

Таким образом, с помощью двух тестовых задач было найдено четыре из шести констант. Для отыскания еще одной константы, C_{44} – модуль сдвига в плоскости xOy , используется тот факт, что площадки, расположенные под 45° к системе координат xu , являются главными для гомогенного материала. Главные напряжения и деформации гомогенного материала связаны со средними касательными напряжениями и средними деформациями известными зависимостями:

$$\begin{cases} \langle \sigma_1 \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle \\ \langle \sigma_2 \rangle = -\langle \tau_{xy} \rangle \end{cases}; \quad \begin{cases} \langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} \langle \gamma_{xy} \rangle \\ \langle \varepsilon_2 \rangle = -\frac{1}{2} \langle \gamma_{xy} \rangle \end{cases}. \quad (6)$$

В третьем численном эксперименте для определения C_{44} задаются обобщенные деформации $\langle \varepsilon_x \rangle$ и $\langle \varepsilon_y \rangle$ в повернутой системе координат равными по модулю и противоположными по знаку. Остальные осредненные деформации принимаются нулевыми. После нахождения всех компонентов

напряженного состояния можно определить касательное напряжение τ_{xy} на диагонали выделенного элемента, которая параллельна одной из осей исходной системы координат.

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma'_y - \sigma'_x). \quad (7)$$

Осредненные значения касательного напряжения находятся интегрированием по диагонали:

$$\langle \tau_{xy} \rangle = \frac{1}{l} \int_0^l \tau_{xy} dl. \quad (8)$$

Для определения последней константы, модуля продольного сдвига, необходимо выделить трехмерный параллелепипед, достаточно длинный для того, чтобы можно было отбросить влияние краевых эффектов.

Для моделирования состояния чистого сдвига задаются следующие краевые условия: на плоскости $y=0$ задаются равными нулю все перемещения, на верхней плоскости $y=1$ задается перемещение вдоль оси z не равным нулю. Остальные поверхности свободны от напряжений. В области, достаточно удаленной от торцов, реализуется состояние, соответствующее чистому сдвигу гетерогенного материала. Осредненное напряжение находится интегрированием по линии $y = \text{const}$ в среднем сечении параллелограмма:

$$\langle \tau_{yz} \rangle = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} \tau_{yz} dl. \quad (9)$$

Для проведения численных экспериментов использовался программный комплекс ANSYS, в котором строилась конечно-элементная модель представительского объема.

Пластическая деформация однонаправленных композитов. Для нахождения пределов пластичности и закона поведения за пределами упругости однонаправленного композита необходимо задаться теорией для однородной эквивалентной среды, т.е. анизотропной теорией пластичности. Из теории Хилла [7] условие начала пластичности для материала с принятой симметрией материала содержит 4 константы:

$$\frac{1}{2} (F_0 + G_0) \cdot (\sigma_x - \sigma_y)^2 + F_0 (\sigma_y - \sigma_z)^2 + G_0 (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2N_0 \tau_{xy}^2 + 4L_0 \tau_{yz}^2 = 1, \quad (10)$$

где F, G, L, N – параметры, характеризующие текущее состояние анизотропии, а $\sigma_{xT}, \sigma_{yT}, \sigma_{zT}, \tau_{xyT}, \tau_{yzT}$ – пределы пластичности при однокомпонентном нагружении.

Для нахождения пределов пластичности в различных направлениях для случая однонаправленного композита необходимо провести 4 численных эксперимента: растяжение вдоль осей x и z , продольный сдвиг и поперечный сдвиг. При этом используется условие достижения хотя бы в одной точке ге-

терогенного материала интенсивностью напряжений по Мизесу предела пластичности. В качестве закона, описывающего поведение композита за зоной упругости, принимается теория пластичности ортотропного материала с изотропным упрочнением.

Приращения пластических деформаций гомогенного материала определяются ассоциированным законом течения:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (11)$$

Характер изотропного упрочнения определяется уравнением поверхности пластичности

$$f = H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2N\tau_{xy}^2 + 2L\tau_{xz}^2 + 2M\tau_{yz}^2 - h^2(q) = 0, \quad (12)$$

в качестве параметра упрочнения используется энергия упругопластического деформирования $q = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$.

При активном нагружении множитель $d\lambda$ определяется соотношением:

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{2h \cdot h' \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{kl}}. \quad (13)$$

Для нахождения вида функции упрочнения в теории пластичности ортотропного материала с изотропным упрочнением проведена серия численных расчетов для растяжения в направлении волокна. При этом предполагается, что зависимость (12) имеет один и тот же вид для любых типов напряженного состояния.

Численные результаты. Для проведения численных экспериментов моделировался полимерный волокнистый композит, в котором матрицей является эпоксидная смола с упругими свойствами $E_m = 5 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_m = 0.11$ и углеродным волокном со свойствами: $E_f = 2.7 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_m = 0.23$. Матрица жесткости, составленная по определенным в эксперименте константам, принимает вид:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_x \rangle \\ \langle \sigma_y \rangle \\ \langle \sigma_z \rangle \\ \langle \tau_{xy} \rangle \\ \langle \tau_{xz} \rangle \\ \langle \tau_{yz} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0638^{11} & 1.754^{10} & 2.284^{10} & 0 & 0 & 0 \\ & 1.0638^{11} & 2.284^{10} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1.692^{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3.88^{10} & 0 & 0 \\ & & & & 4.514^{10} & 0 \\ & & & & & 4.514^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_x \rangle \\ \langle \varepsilon_y \rangle \\ \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \gamma_{xy} \rangle \\ \langle \gamma_{xz} \rangle \\ \langle \gamma_{yz} \rangle \end{bmatrix}.$$

Обратив эту матрицу, получим следующие значения упругих констант композита: $E_1 = 1.0127 \cdot 10^{10}$ Па, $E_3 = 1.608 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{13} = 3.88 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{23} = 4.514 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_{21} = 0.1497$, $\nu_{31} = 0.1823$.

Таблица 1

ε_z	A^p	h^2	$\langle \sigma_z \rangle$	$\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle$
0.001	0	1	$1.03 \cdot 10^8$	$7.341 \cdot 10^6$
0.0015	6648	1.473	$1.38 \cdot 10^8$	$11.01 \cdot 10^6$
0.002	23091	1.983	$1.71 \cdot 10^8$	$15.56 \cdot 10^6$
0.0025	36528	3.387	$1.98 \cdot 10^8$	$22.13 \cdot 10^6$
0.003	51932	3.914	$2.29 \cdot 10^8$	$27.14 \cdot 10^6$
0.0035	89425	4.361	$2.56 \cdot 10^8$	$34.03 \cdot 10^6$
0.004	125825	4.979	$2.6 \cdot 10^8$	$38.11 \cdot 10^6$
0.0045	167410	5.107	$2.66 \cdot 10^8$	$42.4 \cdot 10^6$

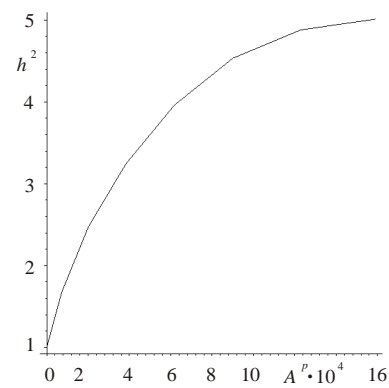


Рис. 3

При расчете пластических деформаций композита для задания модели поведения материалов волокна и матрицы использовались соответствующие диаграммы деформирования. При проведении численных экспериментов, соответствующих растяжению в направлении волокна, получили следующую зависимость функции h^2 от работы пластической деформации, приведенную в табл. 1, а в виде графика – на рис. 3.

Список литературы: 1. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наук. думка, 1985. – 304 с. 2. Победра Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1984. – 336 с. 3. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 336 с. 4. Макарова И.С., Сараев Л.А. Теория упругопластического деформирования произвольно армированных композитов. // Прикладная механика и техническая физика, 5, 1991 – 120 с. 5. Аношкин А.Н. Неупругое деформирование однонаправленных композитов при продольном сдвиге. // Математическое моделирование систем и процессов, 1995, № 3. 6. Kaminsky M.M. Computational Mechanics of composite materials. – Springer 2007. – 369 с. 7. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 408 с.

Поступила в редколлегию 27.01.10