

**З.С. САФОНОВА**, доц. каф. ТММиСАПР,  
**В.Б. ЗЕЛЕНСКИЙ**, канд. техн. наук, доц. каф. ТММиСАПР,  
**А.А. ЗАРУБИНА**, канд. техн. наук, проф. каф. ТММиСАПР,  
**И.Я. ХРАМЦОВА**, научн. сотр. каф. ТММиСАПР НТУ «ХПИ»

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОЧЕГО ПРОЦЕССА ТРОХОИДНОГО РОТОРНОГО КОМПРЕССОРА

Дослідження робочого процесу трохойдного роторного компресора (ТРК) доцільно проводити на математичній моделі. Розроблена математична модель робочого процесу ТРК. Отримані узагальнені рівняння для розрахунку параметрів робочого процесу у всіх порожнинах ТРК

Research of trochoid rotor compressor (TRC) working process is expedient to conduct on the mathematical model. The mathematical model of TRC working process is developed. The generalized equations are got for the calculation of working process parameters in all TRK cavities.

**Введение.** Доводка рабочего процесса, требующая сложных экспериментов на натурных образцах, может быть в значительной мере упрощена при наличии аналитической методики исследования, достаточно точно отражающей физические процессы реального цикла. В этом случае расчетным путем можно проверить влияние на рабочий процесс изменения отдельных конструктивных параметров и их совокупности, установить желательные границы значений этих параметров и свести тем самым к минимуму дорогостоящие натурные испытания. При создании такой методики можно использовать имеющийся опыт расчета рабочих процессов поршневых машин.

**Принципы построения математической модели рабочего процесса трохойдного роторного компрессора.** Математическая модель рабочего процесса ТРК отличается от моделей, разработанных для исследования двигателей внутреннего сгорания [1, 5, 6] и поршневых насосов [2, 3].

К основным причинам, обуславливающим это отличие, можно отнести:

– повышенный уровень газообмена через уплотнения рабочих камер по сравнению с поршневой машиной, в связи с чем модель должна обязательно учитывать наличие утечек рабочего тела из рабочей камеры. В теории поршневых машин вопрос учета утечек практически не разработан, что, возможно, объясняется неактуальностью его для этих машин из-за малого уровня утечек;

– необходимость учета газообмена между смежными рабочими камерами, процессы в которых сдвинуты по фазе;

– особенности конструктивной схемы ТРК, связанные с тем, что рабочие камеры на протяжении цикла перемещаются относительно корпусной детали. Поэтому происходящие в них процессы „привязаны” к определенным участкам корпуса, что приводит к резкой дифференциации силовых и температурных воздействий по периметру корпуса;

– специфику явлений теплообмена в рабочей камере и течения газов че-

рез органы распределения и системы уплотнений, что требует особого подхода при выборе вида функций, описывающих эти явления, коэффициентов теплоотдачи, коэффициентов расхода и т. д.

Необходимость учета утечек и перетечек газа, то есть газообмена со смежными полостями, в значительной мере усложняет математическую модель. Это объясняется тем, что в этом случае для моделирования процесса в одной какой-либо рабочей камере необходимо иметь данные по параметрам газа в соседних камерах и соседних полостях, с которыми возможен теплообмен. На рисунке 1 показана схема возможных путей утечек и перетечек для эпитрохoidalного роторного компрессора с двухвершинным ротором [4].

Для рабочей камеры I возможные следующие пути газообмена (исключая впускные и выпускные органы):

– с соседней рабочей камерой II через неплотности радиальных уплотнительных элементов (7);

– с торцевой камерой (образованной торцевыми стенками ротора и корпуса и ограниченной масляными и торцевыми газовыми уплотнениями) – через неплотности торцевых дуговых планок (9);

– с камерой II и торцевой камерой через неплотности сухариков (8).

В свою очередь для торцевой камеры (3) возможен газообмен:

– с рабочими камерами I и II через неплотности торцевых уплотнений (9) и сухариков (8);

– с полостью картера (4) через масляное кольцо (10).

Для учета газообмена рабочей камеры I через неплотности необходимо иметь данные по состоянию газа (давление и температура) во-первых, в самой рабочей камере I, во-вторых, в рабочей камере II и, в-третьих, в торцевой камере.

В принципе можно составить систему взаимосвязанных уравнений, описывающих рабочие процессы, происходящие в каждой из трех камер, и затем, решая совместно эти уравнения, найти нужные функции (изменение давления, температуры и количества газа в рабочей камере).

**Обобщенные расчетные уравнения рабочего процесса ТРК.** Для конкретного построения математической модели рабочего процесса ТРК целесообразно вывести основные уравнения, охватывающие все разновидности фи-

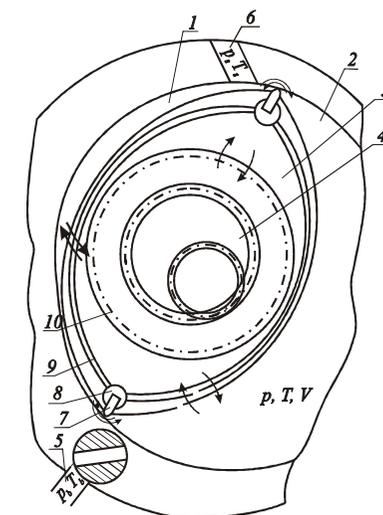


Рис. 1. Пути утечек и перетечек ТРК:  
 1 – рабочая камера I; 2 – рабочая камера II; 3 – торцевая камера; 4 – полость картера; 5 – магистраль нагнетания; 6 – полость всасывания; 7 – радиальная уплотнительная планка; 8 – сухарик; 9 – торцевая планка; 10 – масляное кольцо

зических процессов, подлежащих учету в модели. Это можно определить, исходя из закона сохранения энергии, записанного применительно к рабочей камере компрессора [2]:

$$dU = dQ - pdV + dE_s - dE_b, \quad (1)$$

где  $dU$  – изменение энергии рабочего тела в камере за время  $dt$ ;  $dQ$  – внешняя теплота, переданная через стенки рабочей камеры за время  $dt$ ;  $pdV$  – механическая работа, совершенная над газом за время  $dt$ ;  $p$  – давление рабочего тела;  $V$  – объем рабочей камеры;  $dE_s$  и  $dE_b$  – энергия, внесенная в камеру рабочим телом, поступившим за время  $dt$ , и вынесенная из нее за это же время вышедшим рабочим телом соответственно.

Уравнение (1) можно записать

$$dU + pdV = dQ + dE_s - dE_b. \quad (2)$$

Для идеального газа удельные теплоемкости при постоянном объеме  $c_v = \text{const}$  и при постоянном давлении  $c_p = \text{const}$

$$c_p - c_v = R, \quad (3)$$

где  $R$  – газовая постоянная;

$$dU = c_v d(MT), \quad (4)$$

где  $M$  и  $T$  – масса рабочего тела в камере и его температура соответственно; и, наконец, уравнение состояния:

$$pV = MRT. \quad (5)$$

Поставив в левую часть уравнения (3) вместо  $dU$  его выражение из (4), предварительно изменив в (4) произведение  $MT$  с помощью уравнения состояния (5) через

$$MT = \frac{pV}{R}, \quad (6)$$

получим:

$$\begin{aligned} dU + pdV &= \frac{c_v}{R} d(pV) + pdV = \frac{c_v}{R} d(pdV + Vdp) + pdV = \\ &= \frac{c_v}{R} Vdp + \frac{c_p}{R} pdV. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку

$$c_v = \frac{R}{k-1} \text{ и } c_p = \frac{kR}{k-1}, \quad (8)$$

где  $k$  – показатель адиабаты, левую часть уравнения можно преобразовать,

подставив в (7) значения  $c_v$  и  $c_p$  из (8):

$$dU + pdV = \frac{V}{k-1} dp + \frac{k}{k-1} pdV. \quad (9)$$

Подставив (9) в (2) и решив (2) относительно  $dp$ , получим:

$$dp = \frac{k-1}{V} \left( dQ + dE_s - dE_b - \frac{k}{k-1} pdV \right) \quad (10)$$

или:

$$dp = \frac{k-1}{V} \left( \frac{dQ}{dt} + \frac{dE_s}{dt} - \frac{dE_b}{dt} - \frac{k}{k-1} p \frac{dV}{dt} \right). \quad (11)$$

В уравнении (11):  $V$  – объем рабочей камеры ТРК в функции угла поворота ротора  $\psi$ :

$$V = \frac{V_h}{2} \left[ \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1} + \cos(z-1)\psi \right], \quad (12)$$

здесь  $V_h$  – рабочий объем одной камеры ТРК.

Для применяющейся ТРК  $z = 2$

$$V = \frac{V_h}{2} \left[ \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1} + \cos \psi \right], \quad (12')$$

где  $\varepsilon$  – действительная степень сжатия ТРК ( $\varepsilon = \frac{V_{\max}}{V_{\min}}$ ;  $V_{\max}$ ,  $V_{\min}$  – максимальный и минимальный объем рабочей камеры);  $z$  – число вершин ротора.

Внешняя теплота

$$dQ = \alpha_T F (T_{CT} - T) dt, \quad (13)$$

где  $\alpha_T$  – коэффициент теплоотдачи от газа к стенкам;  $F$  – поверхность стенок рабочей камеры;  $T_{CT}$  – температура стенок;  $T$  – температура рабочего тела в камере.

Количество поступившей  $dE_s$  и убывшей  $dE_b$  за счет газообмена энергии

$$dE_s = c_p T_s dM_s = c_p T_s G_s dt; \quad dE_b = c_p T dM_b = c_p T G_b dt, \quad (14)$$

где  $T_s$ ,  $T$  – температура рабочего тела в емкости, из которой оно поступает в камеру и в рабочей камере соответственно;  $M_s$ ,  $M_b$  – количество вошедшего в камеру за время  $dt$  и вышедшего из нее за это же время рабочего тела:

$$dM_s = G_s dt; \quad dM_b = G_b dt, \quad (14')$$

где  $G_s$  и  $G_b$  – секундный массовый расход рабочего тела (соответственно входящего в рабочую камеру и выходящего из нее).

Скорость изменения объема рабочей камеры  $\frac{dV}{dt}$  из (12), учитывая, что угловая скорость вращения ротора  $\omega_p = \frac{d\psi}{dt}$ :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\psi} \omega_p = -(z-1)\omega_p \frac{V_h}{2} \sin(z-1)\psi. \quad (15)$$

Для применяющейся ТРК  $z = 2$

$$\frac{dV}{dt} = -\omega_p \frac{V_h}{2} \sin \psi. \quad (15')$$

Подставив (12) – (15') в (11) и учитывая, что  $dt = \frac{d\psi}{\omega_p}$ , получим:

$$dp = \frac{k-1}{V\omega_p} [\alpha_T F(T_{CT} - T) + c_p T_s G_s - c_p T G_b + (z-1) \frac{k}{k-1} p \omega_p \frac{V_h}{2} \sin(z-1)\psi] d\psi, \quad (16)$$

или при  $z = 2$

$$dp = \frac{k-1}{V\omega_p} [\alpha_T F(T_{CT} - T) + c_p T_s G_s - c_p T G_b + \frac{k}{k-1} p \omega_p \frac{V_h}{2} \sin \psi] d\psi. \quad (16')$$

В (16) и (16') секундный массовый расход рабочего тела  $G$  может быть определен по теоретическим формулам, полученным в термодинамике для сужающегося сопла с введением коэффициента расхода  $\mu$ , учитывающего отношение реального расхода к теоретическому. Тогда:

$$G = \mu f p_1 \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{1}{RT_1}} \cdot y, \quad (17)$$

где  $f$  – площадь проходного сечения сопла у выхода;  $p_1$  и  $T_1$  – давление и температура рабочего тела перед соплом;  $y$  – расходная функция:

$$y = q^{1/k} \sqrt{1 - q^{(k-1)/k}}, \quad (18)$$

где величина  $q$  определяется отношением  $p_2/p_1$  ( $p_2$  – давление рабочего тела за соплом) следующим образом:

- при  $p_2/p_1 > \beta$  величина  $q = p_2/p_1$  (подкритическое истечение);
- при  $p_2/p_1 \leq \beta$  величина  $q = \beta$  (закритическое истечение).

Критическое отношение давлений

$$\beta = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)}. \quad (19)$$

Для воздуха  $k = 1,4$ ;  $\beta = 0,528$ .

С учетом (17) и (18) уравнение (16'):

$$dp = \frac{k-1}{V\omega_p} \left[ \alpha_T F(T_{CT} - T) + c_p \mu_s f_s p_s \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{T_s}{R}} \cdot y_s - c_p \mu_b f_b p \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{T}{R}} \cdot y_b + \frac{k}{k-1} p \omega_p \frac{V_h}{2} \sin \psi \right] d\psi. \quad (20)$$

Здесь  $\mu_s$ ,  $\mu_b$ ,  $f_s$ ,  $f_b$  – коэффициенты расхода и проходные сечения впускных и выпускных органов соответственно;  $p_s$  и  $T_s$  – давление и температура рабочего тела в емкости, из которой оно поступает в рабочую камеру;  $y_s = f(p/p_s)$ ,  $y_b = f(p/p_b)$ , где  $p_b$  – давление в емкости, куда входит тело из камеры;  $p$  и  $T$  – давление и температура рабочего тела в камере.

Уравнение сохранения массы для рабочей камеры ТРК:

$$dM = dM_s - dM_b, \quad (21)$$

где количество рабочего тела, поступившего в камеру  $dM_s$  и вышедшего из нее  $dM_b$  по углу поворота ротора  $\psi$ , находится по (14') с учетом  $\omega_p = \frac{d\psi}{dt}$ ;  $dM$  – изменение массы рабочего тела в камере за угол поворота ротора  $d\psi$ .

Учитывая (17) – (19), можно преобразовать (21) к виду:

$$dM = \frac{1}{\omega_p} \sqrt{\frac{2}{R} \frac{k}{k-1}} \left( \mu_s f_s p_s \frac{y_s}{\sqrt{T_s}} - \mu_b f_b p \frac{y_b}{\sqrt{T}} \right) d\psi. \quad (22)$$

Температура рабочего тела в камере находится из уравнения состояния газа (5):

$$T = \frac{pV}{MR}. \quad (23)$$

## Выводы

1. На основании закона сохранения энергии выведены основные обобщенные уравнения для рабочего процесса ТРК.
2. Получены обобщенные уравнения для расчета параметров рабочего процесса во всех полостях ТРК.

**Список литературы:** 1. Глаголев Н. М. Рабочие процессы двигателей внутреннего сгорания. Новый метод расчета / Н. М. Глаголев – М.: Машгиз, 1950. – 480с. 2. Фотин Б. С. Расчет рабоче-