

В. Б. ЗЕЛЕНСКИЙ, канд. техн. наук, доц. каф. ТММиСАПР,
А. А. ЗАРУБИНА, канд. техн. наук, проф. каф. ТММиСАПР,
И. Я. ХРАМЦОВА, научн. сотр. каф. ТММиСАПР,
З. С. САФОНОВА, доц. каф. ТММиСАПР, НТУ „ХПИ“

ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКИХ ОШИБОК РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА

Розглядається важливий механізм, який використовується для здійснення допоміжних рухів у гнучких автоматичних лініях, як стаціонарна система. Для цієї системи пропонуються рівняння динамічних помилок, що визначають точність позиціонування такого механізму. Ці рівняння вирішуються чисельними методами. Розглянуто приклад оцінки динамічних помилок для механізму промислового робота.

Рассматривается рычажный механизм, который используется для осуществления вспомогательных движений в гибких автоматических линиях, как стационарная система. Для этой системы предлагаются уравнения динамических ошибок, которые определяют точность позиционирования такого механизма. Эти уравнения решаются численными методами. Рассмотрен пример оценки динамических ошибок для механизма промышленного робота.

A lever mechanism which is used for realization of auxiliary motions in flexible automatic transfer lines is examined, as a stationary system. For this system equations of dynamic errors which determine exactness of such mechanism positioning are offered. These equations are solved by numerical methods. The example of dynamic errors estimation is considered for the mechanism of industrial robot.

Постановка задачи. В процессе разработки рычажных механизмов необходимо учитывать динамические ошибки, возникающие при отработке программного движения звеньев подобных механизмов [1, 2]. В связи с многообразием конструкций рычажных механизмов удобно применять уравнения динамических ошибок, записанные в общем виде. Для получения таких уравнений рассмотрим некоторый механизм как стационарную систему с n степенями свободы. Пусть ее положение определяется обобщенными координатами q_i ($i=1, n$), которые изменяются по заданному закону (т.е. система совершает некоторое программное движение). Возможные малые отклонения от программного движения, обусловленные, например упругими свойствами рассматриваемой системы, не учтенными при составлении законов программного движения, обозначим ξ_i ($i=1, 2, \dots, n$).

Математическая модель. Введем новые обобщенные координаты $p_i = q_i + \xi_i$ и запишем выражение для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n A_{jk} \dot{p}_j \dot{p}_k, \quad (1)$$

где A_{jk} – функции обобщенных координат p_i . Разложим функцию (1) в ряд

Тейлора по степеням $\xi_i, \dot{\xi}_i$, оставив члены не выше второго порядка малости. В результате получим

$$T = T_q + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n A_{jk} \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k + \sum_{j,k=1}^n \left(A_{jk} + \sum_{m=1}^n \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_m} \xi_m \right) \dot{\xi}_j \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial T_q}{\partial q_k} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \frac{\partial^2 T_q}{\partial q_k \partial q_m} \xi_m \right) \dot{\xi}_k. \quad (2)$$

Здесь

$$T_q = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k. \quad (3)$$

определяются программным движением, т. е. для $p_i = q_i$.

Остается составить уравнения Лагранжа второго рода для координат ξ_j . Предварительно введем потенциальную энергию упругих деформаций π и функцию рассеяния энергии Φ в виде

$$\pi = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n c_{jk} \xi_j \xi_k; \quad \Phi = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n b_{jk} \dot{\xi}_j \dot{\xi}_k, \quad (4)$$

где $c_{jk} = c_{kj}$ – обобщенные коэффициенты жесткости; $b_{jk} = b_{kj}$ – коэффициенты демпфирования. Кроме того, примем следующие обозначения:

$$\lambda_{klm} = \frac{\partial A_{km}}{\partial q_l}; \quad \lambda_{mlk} = \lambda_{kml} + \lambda_{klm} - \lambda_{lkm}; \quad \theta_{kml} = \lambda_{klm} - \lambda_{mkl}/2; \quad (5)$$

$$\mu_{kmls} = \frac{\partial^2 A_{km}}{\partial q_l \partial q_s} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_{ml}}{\partial q_k \partial q_s}.$$

Тогда с учетом выражения (2) для кинетической энергии после ряда преобразований получим дифференциальные уравнения динамических ошибок рычажного механизма в общем виде

$$\sum_{m=1}^n A_{km} \ddot{\xi}_m + \sum_{l,m} (\gamma_{mlk} \dot{q}_m + \delta_{lm} b_{lk}) \dot{\xi}_l + \sum_{l,m=1}^n \left(\lambda_{klm} \ddot{q}_m + \sum_{s=1}^n \mu_{kmls} \dot{q}_m \dot{q}_s + \delta_{lm} c_{lk} \xi_l \right) = - \sum_{k=1, n}^n A_{km} \ddot{q}_m - \sum_{l,m} \theta_{kml} \dot{q}_m \dot{q}_l, \quad (6)$$

где δ_{lm} – символ Кронекера.

Уравнения динамических ошибок решаются одним из численных методов интегрирования. Представление их в виде (5) и (6) особенно удобно для программирования.

Динамические ошибки программного движения механизма. Рассмотрим определение динамических ошибок программного движения рычажного антропоморфного механизма автоматической линии. На рис. 1 показаны основные звенья механизма: плечо I, предплечье II и схват III, а также дополнительные звенья IV, V, которые представляют собой шариковинтовые механизмы привода плеча и предплечья. Плечо и электродвигатель привода плеча шарнирно соединены с основанием, предплечье и привод предплечья – с плечом. Введем обозначения m_i , J_i – масса и момент инерции i -го звена механизма относительно своего центра масс; d_i – расстояние от оси вращения i -го звена до его центра масс (рис. 1). Для упрощения предполагаем, что центры масс находятся на осях соответствующих звеньев.

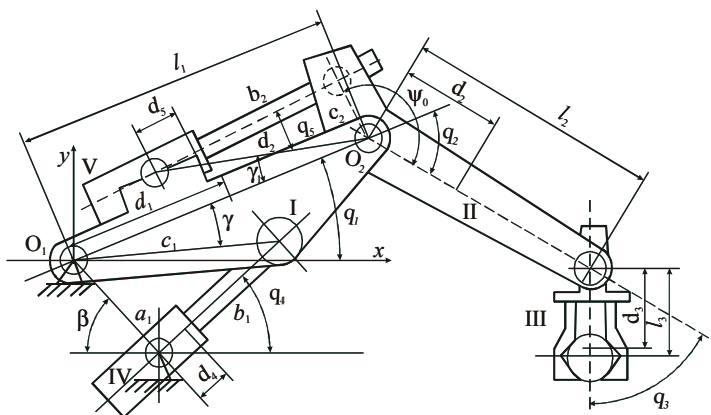


Рис. 1. Основные звенья механизма

В качестве обобщенных координат примем углы q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 поворота осей недеформируемых звеньев (рис. 1).

Программное движение механизма определяется заданием законов вращения роторов двигателей приводов, которые после преобразований позволяют получить законы изменения $q_1(t), q_2(t), q_3(t), q_4(t), q_5(t)$. При составлении выражений для коэффициентов (5) уравнений динамических ошибок механизма будем учитывать уравнения связи

$$q_4 = \pi - \beta - F_1(q_1); \quad q_5 = F_2(q_2), \quad (7)$$

где $F_1(q_1) = \arcsin \varphi_1$; $\varphi_1 = (c_1/b_1) \sin \psi_1$; $b_1 = \sqrt{a_1^2 + c_1^2 - 2a_1c_1 \cos \psi_1}$, $i = 1, 2$

$$\psi_1 = q_1 + \beta - \gamma; \quad \psi_2 = \pi + q_2 - \gamma_1 - \psi_0.$$

Здесь величины $a_i, b_i, c_i, \gamma, \gamma_1, \psi_0$ определяются в соответствии с

рис. 1. Для нахождения производных по времени от связанных координат (7) дополнительных звеньев запишем выражения для производных от функции $\varphi_i, F_i(q_i), i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} &= b_i^{-1} (-a_i \varphi_i^2 + c_i \cos \psi_i); \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_i^2} = -\varphi_i \left(3b_i^{-1} a_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} + 1 \right); \\ \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial q_i^3} &= -b_i^{-1} \left[4a_i \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_i^2} + 3a_i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \right)^2 + c_i \cos \psi_i \right]; \\ \frac{\partial F_i}{\partial q_i} &= (1 - \varphi_i^2)^{-1/2} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial^2 F_i}{\partial q_i^2} = (1 - \varphi_i^2)^{-1/2} \left[\varphi_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_i} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial q_i^2} \right]; \\ \frac{\partial^3 F_i}{\partial q_i^3} &= (1 - \varphi_i^2)^{-1/2} \left[3\varphi_i \frac{\partial F_i}{\partial q_i} \frac{\partial^2 F_i}{\partial q_i^2} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \left(\frac{\partial F_i}{\partial q_i} \right)^2 + \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial q_i^3} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Опуская выкладки по составлению выражения для кинетической энергии при программном движении механизма, выпишем коэффициенты A_{jk} квадратичной формы (3):

$$\begin{aligned} A_{11} &= J_1 + J_2 + J_3 + (J_4 + m_4 d_4^2) \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_1} \right)^2 + J_5 + m_1 d_1^2 + m_5 d_5^2 + \\ &+ m_2 (l_1^2 + d_2^2) + m_3 (l_1^2 + l_2^2 + d_3^2) + m_5 (l_1^2 + a_2^2 + 2l_1 a_2 \cos \gamma_1) + \\ &+ 2m_2 l_1 d_2 \cos q_2 + 2m_3 l_1 l_2 \cos q_1 + 2m_3 l_1 d_3 \cos(q_2 + q_3) + \\ &+ 2m_3 l_1 l_2 \cos q_3 + m_5 d_5 [l_1 \cos(q_5 - \gamma_1) - a_2 \cos q_5]; \\ A_{22} &= J_2 + J_3 + m_2 d_2^2 + m_3 (l_2^2 + d_3^2) + 2m_3 l_2 d_3 \cos q_3 + (J_5 + m_5 d_5^2) \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_2} \right)^2; \\ A_{33} &= J_3 + m_3 d_3^2; \quad A_{13} = A_{31} = A_{33} + m_3 l_2 d_3 \cos q_3 + m_3 l_1 d_3 \cos(q_2 + q_3); \\ A_{12} &= A_{21} = J_2 + J_3 + (J_5 + m_5 d_5^2) \frac{\partial F_2}{\partial q_2} + m_2 d_2^2 + m_3 (l_2^2 + d_3^2) + \\ &+ m_2 l_1 d_2 \cos q_2 + m_3 l_1 l_2 \cos q_1 + m_3 l_1 d_3 \cos(q_1 + q_3) + 2m_3 l_2 d_3 \cos q_3 + \\ &+ m_5 d_5 [l_1 \cos(q_5 - \gamma_1) - a_2 \cos q_5] \frac{\partial F_2}{\partial q_2}; \\ A_{23} &= A_{32} = A_{33} + m_3 l_2 d_3 \cos q_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Дифференцируя зависимости (10) по обобщенным координатам, нахо-

дим в соответствии с (4) коэффициенты λ_{klm} , входящие в уравнения динамических ошибок:

$$\begin{aligned} \lambda_{111} &= -2m_3l_1l_2 \sin q_1 + 2(J_4 + m_4d_4^2) \frac{\partial F_1}{\partial q_1} \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1^2}; \quad \lambda_{112} = m_3l_1l_2 \sin q_1; \quad \lambda_{113} = 0; \\ \lambda_{121} &= -2m_2l_1d_2 \sin q_2 - 2m_3l_1d_3 \sin(q_2 + q_3) - m_5d_5[l_1 \sin(q_5 - \gamma_1) - a_2 \sin q_5] \frac{\partial F_2}{\partial q_2}; \\ \lambda_{122} &= -m_2l_1d_2 \sin q_2 - m_3l_1d_3 \sin(q_2 + q_3) + \{J_5 + m_5d_5^2 + m_5d_5[l_1 \cos(q_5 - \gamma_1) - \\ &\quad - a_2 \cos q_5]\} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_2^2} - m_5d_5[l_1 \sin(q_5 - \gamma_1) - a_2 \sin q_5] \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_2} \right)^2; \quad (11) \\ \lambda_{131} &= -m_3l_1d_3 \sin(q_2 + q_3); \quad \lambda_{131} = -2m_3l_1d_3 \sin(q_2 + q_3) - 2m_3l_2d_3 \sin q_3; \\ \lambda_{132} &= -m_3l_1d_3 \sin(q_2 + q_3) - 2m_3l_2d_3 \sin q_3; \quad \lambda_{133} = -m_3l_1d_3 \sin(q_2 + q_3) - m_3l_2d_3 \sin q_3; \\ \lambda_{222} &= 2(J_5 + m_5d_5^2) \frac{\partial F_2}{\partial q_2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_2^2}; \quad \lambda_{211} = \lambda_{112}; \quad \lambda_{221} = \lambda_{122}; \quad \lambda_{212} = \lambda_{213} = \lambda_{223} = 0; \\ \lambda_{231} &= \lambda_{132}; \quad \lambda_{232} = -2m_3l_2d_3 \sin q_3; \quad \lambda_{233} = -m_3l_2d_3 \sin q_3. \end{aligned}$$

Для упрощения записи вторых производных от коэффициентов A_{jk} введем следующие параметры:

$$\begin{aligned} A &= -m_2l_1d_2 \cos q_2; \quad B = -m_3l_1d_3 \cos(q_2 + q_3); \quad C = -m_3l_2d_3 \cos q_3; \quad E = -m_3l_1l_2 \cos q_1; \\ D &= m_5d_5[l_1 \cos(q_5 - \gamma_1) - a_2 \cos q_5]; \quad G = m_5d_5[l_1 \sin(q_5 - \gamma_1) - a_2 \sin q_5]. \quad (12) \end{aligned}$$

$$\text{Тогда} \quad \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial q_1^2} = 2E + 2(J_4 + m_4d_4^2) \left[\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1^2} \right)^2 + \frac{\partial F_1}{\partial q_1} \frac{\partial^3 F_1}{\partial q_1^3} \right];$$

$$\frac{\partial^2 A_{11}}{\partial q_2^2} = 2(A + B) - G \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_2^2} - D \left(\frac{\partial F_{11}}{\partial q_2} \right)^2; \quad \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial q_2 \partial q_3} = 2B; \quad \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial q_3^2} = 2(B + C);$$

$$\frac{\partial^2 A_{12}}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2 A_{21}}{\partial q_2^2} = A + B + (J_5 + m_5d_5^2 + D) \frac{\partial^3 F_2}{\partial q_2^3} - 3G \frac{\partial F_2}{\partial q_2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_2^2} - D \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_2} \right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 A_{12}}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 A_{21}}{\partial q_1^2} = E; \quad \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial q_2 \partial q_3} = \frac{\partial^2 A_{21}}{\partial q_2 \partial q_3} = B; \quad \frac{\partial^2 A_{13}}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2 A_{31}}{\partial q_2^2} = B; \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 A_{22}}{\partial q_2^2} = 2(J_5 + m_5d_5^2) \left[\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial q_2^2} \right)^2 + \frac{\partial F_2}{\partial q_2} \frac{\partial^3 F_2}{\partial q_2^3} \right]; \quad \frac{\partial^2 A_{13}}{\partial q_2 \partial q_3} = \frac{\partial^2 A_{31}}{\partial q_2 \partial q_3} = B;$$

$$\frac{\partial^2 A_{13}}{\partial q_3^2} = \frac{\partial^2 A_{31}}{\partial q_3^2} = B + C; \quad \frac{\partial^2 A_{22}}{\partial q_3^2} = 2C; \quad \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial q_2 \partial q_3} = 2B; \quad \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial q_3^2} = \frac{\partial^2 A_{21}}{\partial q_3^2} = B + 2C.$$

Остальные производные равны нулю.

Теперь по значениям коэффициентов λ_{klm} и вторых производных от коэффициентов A_{jk} , полученным для некоторого момента времени t по формулам (11), (13), легко найти значения коэффициентов γ_{kml} , θ_{hlm} , μ_{klms} с учетом обозначений (5).

Наконец, при записи уравнений динамических ошибок механизма в общем виде (6) примем $n = 3$ и в первых двух уравнениях вместо членов $\sum_{l=1}^3 c_{lk} \xi_l$ введем восстанавливающие моменты

$$M_k = h_k Q_k \text{ sign } \xi_k, \quad k = 1, 2, \quad (14)$$

где h_k – расстояние от оси вращения k -го звена по оси винта шариковинтового механизма соответствующего привода; Q_k – модуль упругой реакции в шариковинтовой паре. Легко показать, что

$$h_k = c_k \Phi_k, \quad (15)$$

Φ_k вычисляется по формуле (8). Очевидно, упругая деформация W_k винта связана с динамической ошибкой ξ_k поворота k -го звена механизма соотношением

$$W_k = h_k \xi_k = c_k \Phi_k \xi_k. \quad (16)$$

В свою очередь, как следует из работы [3], модуль упругой реакции шариковинтовой пары связан с упругой деформацией W_k соотношением

$$|W_k| - \alpha_k Q_k = \lambda_k \sqrt[3]{Q_k^2}. \quad (17)$$

Здесь α_k , λ_k – некоторые коэффициенты, зависящие от параметров шариковинтового механизма и текущего значения b_k . Из формулы (17) с учетом (16) имеем уравнение

$$c_k \Phi_k |\xi_k| - \alpha_k Q_k = \lambda_k \sqrt[3]{Q_k^2}, \quad (18)$$

из которого определяются величины Q_k как функции обобщенных координат q_k и динамических ошибок ξ_k .

Окончательно дифференциальные уравнения динамических ошибок программного движения рассматриваемого механизма имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^3 A_{km} \ddot{\xi}_m + \sum_{m,l=1}^3 \gamma_{mlk} \dot{q}_m \xi_l + b_{kk} \dot{\xi}_k + \sum_{m,l=1}^3 \left(\lambda_{klm} \ddot{q}_m + \sum_{s=1}^3 \mu_{klms} \dot{q}_m \dot{q}_s \right) \xi_l + \\ + c_k \Phi_k Q_k \text{ sign } \xi_k = - \sum_{m=1}^3 A_{km} \ddot{q}_m - \sum_{m,l=1}^3 \theta_{kml} \dot{q}_m \dot{q}_l; \end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^3 A_{3m} \ddot{\xi}_m + \sum_{m,l=1}^3 \gamma_{mlk} \dot{q}_m \dot{\xi}_l + b_{33} \dot{\xi}_3 + \sum_{m,l=1}^3 \left(\lambda_{3lm} \ddot{q}_m + \sum_{s=1}^3 \mu_{3lms} \dot{q}_m \dot{q}_s \right) \xi_l + c_{33} \xi_3 = - \sum_{m=1}^3 A_{3m} \ddot{q}_m - \sum_{m,l=1}^3 \theta_{3ml} \dot{q}_m \dot{q}_l.$$

Заключение. В работе описана модель для оценки динамических ошибок рычажного механизма. Для случая малых отклонений от программного движения составлены уравнения движения. Для частного случая рычажного антропоморфного механизма автоматической линии получена разрешающая система уравнений, готовая для численного интегрирования.

В дальнейшем планируется использовать разработанную модель для интегрирования уравнений движения и провести анализ особенностей движения данного механизма.

Список литературы: 1. Гребенников О. Н. Определение динамических ошибок механизмов промышленных роботов / О. Н. Гребенников, М. З. Коловский, А. С. Миркина // *Машиноведение*. – 1980. – № 3. – С. 33–39. 2. Акуленко Л. Д. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями / Л. Д. Акуленко, С. А. Михайлов, Ф. Л. Черноусько // *Механика твердого тела*. – 1981. – № 3. – С. 118–124. 3. Павлов Б. И. Шариковинтовые механизмы в приборостроении / Б.И. Павлов. – Л.: Машиностроение, 1968. – 132 с.

Поступила в редколлегию 12.05.2011

УДК 621.08

С.Б. ЕРЕМЕНКО, канд. техн. наук, доц. каф. ТММиСАПР,
Е.И. ЗИНЧЕНКО, канд. техн. наук, доц. каф. ТММиСАПР, НТУ „ХПИ”

К РАСЧЕТУ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В СЛОЕ СМАЗКИ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПАРЫ

Розглядається задача про виникнення гідродинамічного тиску у шарі мастила підшипника ковзання. Виводяться формули для визначення гідродинамічного тиску в полярних координатах.

Рассматривается задача про возникновение гидродинамического давления в слое смазки подшипника скольжения. Выводятся формулы для определения гидродинамического давления в полярных координатах.

A task is examined about initiation of hydrodynamic pressure in the layer of greasing of sliding bearing. Formulas are derived for determination of hydrodynamic pressure in polar coordinates

Введение. В качестве опор валов и вращающих осей применяются подшипники скольжения в конструкциях, в которых применение подшипников качения затруднено или недопустимо по целому ряду причин (конструктивным соображениям, условиям эксплуатации и т.д.).

Подшипник скольжения представляет собой пару вращения, состоящую из опорного участка вала (цапфы) 1 и собственно подшипника 2, в котором скользит цапфа (рис. 1). Цапфу, передающую радиальную нагрузку, называют шипом при расположении ее в конце вала, и шейкой, если она находится в середине вала.

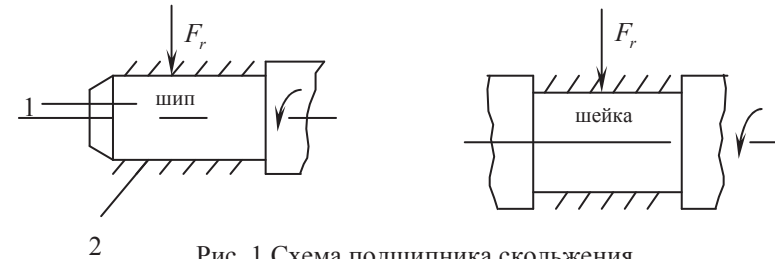


Рис. 1. Схема подшипника скольжения

Сопряжение элементов пары по поверхности дает возможность воспринимать и передавать значительные нагрузки при минимальном износе. Это обстоятельство в значительной мере определяет работоспособность и долговечность машин.

Постановка задачи. Подшипники с непосредственным контактом поверхностей трения используют редко. Основное применение имеют подшипники с контактом поверхностей через слой масла. В зависимости от толщины слоя смазочного материала различают жидкостное и полужидкостное трение. При жидкостном трении поверхности элементов пары (цапфа и подшипник) разделены слоем смазочного материала, и непосредственный контакт отсутствует. В этом случае трение в подшипнике определяется законами гидродинамики. Износ практически отсутствует.

При полужидкостном трении слой смазочного материала имеет разрывы, и поверхности в вершинах микронеровностей контактируют непосредственно. Полужидкостное трение сопровождается износом контактирующих поверхностей. Трение в этом случае зависит как от смазочного материала, так и от материала трущихся поверхностей. Определение коэффициента полужидкостного трения представляет собой довольно сложную задачу. Исследования, проведенные в работах [1, 2], показывают, что коэффициент полужидкостного трения может достигать 0,1÷0,15. Это приводит, кроме износа, к потерям энергии.

Однако в одном и том же подшипнике при достаточно большой скорости скольжения полужидкостное трение сменяется жидкостным. Явление отделения поверхностей скольжения и, соответственно, изменение условий трения называется разобшением. Нарастающее гидродинамическое давление удерживает вал на так называемом масляном клине (рис. 2).

Дальнейшее увеличение угловой скорости приводит к увеличению коэффициента чисто гидродинамического трения. Зависимость между коэффициентами трения и скоростью скольжения дают кривые Штрибека (рис. 3) [3].