

$$\sum_{m=1}^3 A_{3m} \ddot{\xi}_m + \sum_{m,l=1}^3 \gamma_{mlk} \dot{q}_m \dot{\xi}_l + b_{33} \dot{\xi}_3 + \sum_{m,l=1}^3 \left( \lambda_{3lm} \ddot{q}_m + \sum_{s=1}^3 \mu_{3lms} \dot{q}_m \dot{q}_s \right) \xi_l + c_{33} \xi_3 = - \sum_{m=1}^3 A_{3m} \ddot{q}_m - \sum_{m,l=1}^3 \theta_{3ml} \dot{q}_m \dot{q}_l.$$

**Заключение.** В работе описана модель для оценки динамических ошибок рычажного механизма. Для случая малых отклонений от программного движения составлены уравнения движения. Для частного случая рычажного антропоморфного механизма автоматической линии получена разрешающая система уравнений, готовая для численного интегрирования.

В дальнейшем планируется использовать разработанную модель для интегрирования уравнений движения и провести анализ особенностей движения данного механизма.

**Список литературы:** 1. Гребенников О. Н. Определение динамических ошибок механизмов промышленных роботов / О. Н. Гребенников, М. З. Коловский, А. С. Миркина // *Машиноведение*. – 1980. – № 3. – С. 33–39. 2. Акуленко Л. Д. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями / Л. Д. Акуленко, С. А. Михайлов, Ф. Л. Черноусько // *Механика твердого тела*. – 1981. – № 3. – С. 118–124. 3. Павлов Б. И. Шариковинтовые механизмы в приборостроении / Б.И. Павлов. – Л.: Машиностроение, 1968. – 132 с.

Поступила в редколлегию 12.05.2011

УДК 621.08

**С.Б. ЕРЕМЕНКО**, канд. техн. наук, доц. каф. ТММиСАПР,  
**Е.И. ЗИНЧЕНКО**, канд. техн. наук, доц. каф. ТММиСАПР, НТУ „ХПИ”

### К РАСЧЕТУ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В СЛОЕ СМАЗКИ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ПАРЫ

Розглядається задача про виникнення гідродинамічного тиску у шарі мастила підшипника ковзання. Виводяться формули для визначення гідродинамічного тиску в полярних координатах.

Рассматривается задача про возникновение гидродинамического давления в слое смазки подшипника скольжения. Выводятся формулы для определения гидродинамического давления в полярных координатах.

A task is examined about initiation of hydrodynamic pressure in the layer of greasing of sliding bearing. Formulas are derived for determination of hydrodynamic pressure in polar coordinates

**Введение.** В качестве опор валов и вращающих осей применяются подшипники скольжения в конструкциях, в которых применение подшипников качения затруднено или недопустимо по целому ряду причин (конструктивным соображениям, условиям эксплуатации и т.д.).

Подшипник скольжения представляет собой пару вращения, состоящую из опорного участка вала (цапфы) 1 и собственно подшипника 2, в котором скользит цапфа (рис. 1). Цапфу, передающую радиальную нагрузку, называют шипом при расположении ее в конце вала, и шейкой, если она находится в середине вала.

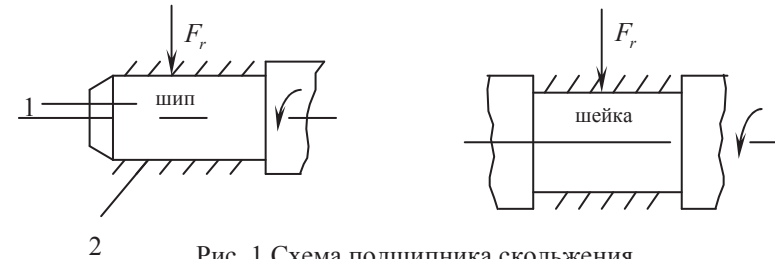


Рис. 1. Схема подшипника скольжения

Сопряжение элементов пары по поверхности дает возможность воспринимать и передавать значительные нагрузки при минимальном износе. Это обстоятельство в значительной мере определяет работоспособность и долговечность машин.

**Постановка задачи.** Подшипники с непосредственным контактом поверхностей трения используют редко. Основное применение имеют подшипники с контактом поверхностей через слой масла. В зависимости от толщины слоя смазочного материала различают жидкостное и полужидкостное трение. При жидкостном трении поверхности элементов пары (цапфа и подшипник) разделены слоем смазочного материала, и непосредственный контакт отсутствует. В этом случае трение в подшипнике определяется законами гидродинамики. Износ практически отсутствует.

При полужидкостном трении слой смазочного материала имеет разрывы, и поверхности в вершинах микронеровностей контактируют непосредственно. Полужидкостное трение сопровождается износом контактирующих поверхностей. Трение в этом случае зависит как от смазочного материала, так и от материала трущихся поверхностей. Определение коэффициента полужидкостного трения представляет собой довольно сложную задачу. Исследования, проведенные в работах [1, 2], показывают, что коэффициент полужидкостного трения может достигать 0,1÷0,15. Это приводит, кроме износа, к потерям энергии.

Однако в одном и том же подшипнике при достаточно большой скорости скольжения полужидкостное трение сменяется жидкостным. Явление отделения поверхностей скольжения и, соответственно, изменение условий трения называется разобшением. Нарастающее гидродинамическое давление удерживает вал на так называемом масляном клине (рис. 2).

Дальнейшее увеличение угловой скорости приводит к увеличению коэффициента чисто гидродинамического трения. Зависимость между коэффициентами трения и скоростью скольжения дают кривые Штрибека (рис. 3) [3].

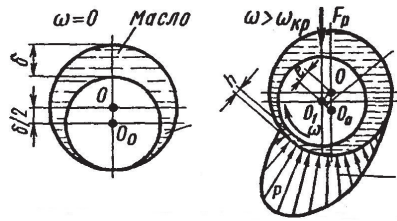


Рис. 2. Расчетная схема подшипника скольжения

**Определение гидродинамического давления в бесконечно длинной цилиндрической опоре.** Благодаря тому, что центр цапфы не совпадает с центром подшипника, зазор между скользящими поверхностями имеет клиновидную форму. Это необходимо для того, чтобы слой смазки обладал несущей способностью. Обозначим через  $\epsilon$  отношение разности радиусов цапфы  $r$  и подшипника  $R$  к величине эксцентриситета  $e$  (рис. 4)

$$\epsilon = \frac{R-r}{e} \quad (1)$$

На расстоянии  $x=r\alpha$  по дуге окружности от самого тонкого места слоя смазки толщина слоя смазки равна

$$h = (R-r) - e \cdot \cos \alpha = (\epsilon - \cos \alpha)e \quad (2)$$

Наименьшую толщину слой смазки будет иметь при  $\alpha = 0$

$$h_0 = (R-r) - e = \frac{\epsilon-1}{\epsilon}(R-r) = (\epsilon-1) \cdot e \quad (3)$$

Для определения гидродинамического давления используют уравнение О. Рейнольдса [4]. Для поиска решения этого уравнения достаточно ограничиться рассмотрением плоскостного потока бесконечно большой ширины, т.е. боковой расход смазки отсутствует. В этом случае уравнение О. Рейнольдса будет иметь вид

$$\frac{dp}{dx} = 6\eta \cdot v (h_x - h_m) h_x^3 \quad (4)$$

где  $p$  – гидродинамическое давление, МПа;  $\eta$  – динамическая вязкость смазки, Па·с;  $h_x$  – текущая толщина смазки по длине опорной поверхности, м;  $h_m$  – толщина слоя смазки в точке максимума гидродинамического давления, м.

Подставляя зависимости (1), (2), (3) в уравнение (4), получим уравнение

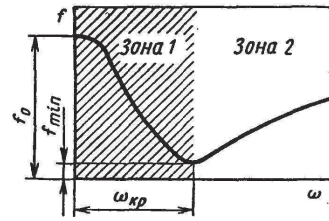


Рис. 3. Кривые Штрибека : зона 1 – область полужидкостного трения, зона 2 – область жидкостного трения

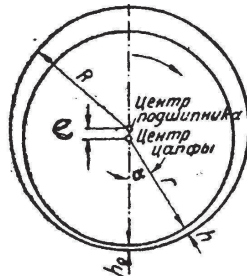


Рис. 4. К расчету эксцентриситета подшипника

изменения давления для цилиндрической опоры

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{6\eta \cdot v \cdot r}{e^2} \left[ \frac{\epsilon - \cos \alpha_m}{(\epsilon - \cos \alpha)^3} - \frac{1}{(\epsilon - \cos \alpha)^3} \right], \quad (5)$$

где  $\alpha_m$  – угол, определяющий положение максимального давления.

Выделим постоянные коэффициенты

$$A = \frac{6\eta \cdot v \cdot r}{e^2} = \frac{6\eta \cdot v \cdot r \cdot \epsilon^2}{(R-r)^2} \quad (6)$$

Если ввести функцию давления плоскостного потока  $w_e$ , которая зависит только от  $\alpha$ , получаем дифференциальное уравнение как чистую функцию давления

$$\frac{\partial w_e}{\partial \alpha} = \frac{\epsilon - \cos \alpha_m}{(\epsilon - \cos \alpha)^3} - \frac{1}{(\epsilon - \cos \alpha)^2} \quad (7)$$

Интегрируя это уравнение, определяем функцию давления

$$w_e = (\epsilon - \cos \alpha_m) \int \frac{d\alpha}{(\epsilon - \cos \alpha)^3} - \int \frac{d\alpha}{(\epsilon - \cos \alpha)^2} + C \quad (8)$$

Решаем входящие в это уравнение интегралы

$$\int \frac{d\alpha}{\epsilon - \cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \arcsin \frac{1 - \cos \alpha}{\epsilon - \cos \alpha},$$

$$\int \frac{d\alpha}{(\epsilon - \cos \alpha)^2} = \frac{1}{\epsilon^2 - 1} \left[ \frac{\sin \alpha}{\epsilon - \cos \alpha} + \int \frac{d\alpha}{\epsilon - \cos \alpha} \right],$$

$$\int \frac{d\alpha}{(\epsilon - \cos \alpha)^3} = \frac{1}{2(\epsilon^2 - 1)} \left[ \frac{\sin \alpha}{(\epsilon - \cos \alpha)^2} + 3\epsilon \int \frac{d\alpha}{(\epsilon - \cos \alpha)^2} - \int \frac{d\alpha}{\epsilon - \cos \alpha} \right] \quad (9)$$

В подшипниках, дуга обхвата которых составляет только часть окружности, давление распространяется на всю опорную поверхность (рис. 5) и равно нулю в местах входа и выхода смазки. Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определяют границы области потока. Для этих значений углов решаем уравнение (8). Воспользуемся формулами (9).

Тогда получим

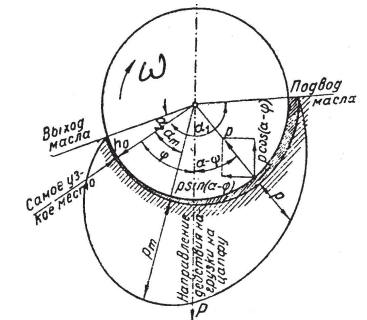


Рис. 5. Эпюра давления смазки в клиновидном зазоре подшипника

$$\begin{cases} I_1 = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\varepsilon - \cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \left[ \arcsin \frac{1 - \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1} - \arcsin \frac{1 - \varepsilon \cdot \cos \alpha_2}{\varepsilon - \cos \alpha_2} \right] \\ I_2 = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{(\varepsilon - \cos \alpha)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \left[ \frac{\sin \alpha_1}{\varepsilon - \cos \alpha_1} - \frac{\sin \alpha_2}{\varepsilon - \cos \alpha_2} + \varepsilon \cdot I_1 \right] \\ I_3 = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{(\varepsilon - \cos \alpha)^3} = \frac{1}{2(\varepsilon^2 - 1)} \left[ \frac{\sin \alpha_1}{(\varepsilon - \cos \alpha_1)^2} - \frac{\sin \alpha_2}{(\varepsilon - \cos \alpha_2)^2} + 3\varepsilon \cdot I_2 - I_1 \right]. \end{cases} \quad (10)$$

Исключая путем подстановки постоянную интегрирования  $C$  ( $w_e = 0$  при  $\alpha = \alpha_1$  и  $\alpha = \alpha_2$ ), находим положение наивысшего давления  $p_m$ , т.е. угол  $\alpha_m$  как отношение двух интегралов:

$$\varepsilon - \cos \alpha_m = I_2 / I_3 \quad (11)$$

$$\text{или} \quad \alpha_m = \arccos(\varepsilon - I_2 / I_3). \quad (12)$$

**Выводы.** Таким образом, получены соотношения, которые позволяют приближенно определять для подшипников скольжения распределение давления и положение наивысшего давления.

**Список литературы:** 1. Крагельский И.В. Трение и износ / И.В. Крагельский. – М.: Машиностроение, 1968. – 480 с. 2. Сухов С.И. Исследование закономерностей сухого и граничного трения шероховатых поверхностей металлов. Трение и износ в машинах. Сборник VI. – 1950. – 105 с. 3. Michel A. Die Schmirung Ebener Flächen // Zeitschrift Math u Phys. – 52. – 1905. 4. Reynolds O. On the Theory of Lubrication // Phil. Trans. Roy. Soc. (1886).

Поступила в редколлегию 12.05.2011

УДК 519.8

**Висс. Гр. КЛИМЕНКО**, канд. фіз.-мат. наук. НТУ “ХПІ”

### БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ЗАДАЧА МІНІМІЗАЦІЇ НА ОРГРАФАХ

В даній роботі розглядається багатокритеріальна задача мінімізації на орграфіах, яка моделює ситуацію по розміщенню точкових об'єктів з нечітко визначеними перевагами. Наряду із постановочними питаннями в роботі встановлюються умови існування і єдиності розв'язку поставленої задачі, пропонується метод по відшукуванню його.

В данной работе рассматривается многокритериальная задача минимизации на орграфіах, которая моделирует ситуацию по размещению точечных объектов с нечетко определенными перевагами. Наряду с постановочными вопросами в работе устанавливаются условия существования и единственности решения поставленной задачи, предлагается метод по его отысканию.

The multicriterial task of minimization on digraphs, which models a situation on point objects placing with unexpressly determined preferences, is examined in this work. The conditions of existence and uniqueness of this task solution are determined and a method of its searching is offered.

### 1. Постановка задачі мінімізації по максимуму при векторних зіставленнях. Єдиність розв'язку

Нехай  $H = \{H_i \mid \bar{i}, m\}$  є сім'я неперетинних, компактних і строго опуклих множин в евклідовому точково-векторному просторі  $R^n$ , який умовимось називати для сім'ї  $H$  опорним. Зауважуємо, що розмірність афінної оболонки  $\dim(\text{aff } H) = n$ . Кожній множині  $H_i$  зіставляємо свій евклідів простір  $R^n(i)$ , тотожний опорному простору  $R^n$ . Позначаємо через  $B_0$  декартовий добуток множин  $H_i$ , а через  $R^{nm}$  — декартовий добуток просторів  $R^n(i)$ :

$$B_0 = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_m = \prod_{i=1}^{i=m} H_i, \quad R^{nm} = \prod_{i=1}^{i=m} R^n. \quad (1)$$

Візьмемо плинну точку  $X = (X_1, \dots, X_i, \dots, X_m) \in B_0$ , тут  $X_i = (X_1^i, X_2^i, \dots, X_n^i) \in R^n(i)$ , і розглянемо зв'язний, змінний граф  $G(X) \equiv G(X_1, \dots, X_i, \dots, X_m)$ , ребрам якого, упорядкованим парам  $(X_i, X_j)$ , ставимо у відповідність вектор  $\lambda_{ij}(X_i - X_j)$ , де  $\lambda_{ij} \geq 0$ .

Отже, орієнтований граф  $G(X_1, \dots, X_i, \dots, X_m)$  визначається матрицею суміжності

$$M(G(X)) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12}(X_1 - X_2) & \dots & \lambda_{1m}(X_1 - X_m) \\ \lambda_{21}(X_2 - X_1) & 0 & \dots & \lambda_{2m}(X_2 - X_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{m1}(X_m - X_1) & \lambda_{m2}(X_m - X_2) & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Кожній вершині  $X_i \in R^n(i)$  змінного графа  $G(X_1, \dots, X_i, \dots, X_m)$ , в якості міри, ставимо у відповідність значення функції

$$\begin{aligned} P_i(X) &\equiv f_i \left( \left[ \sum_{j=1}^{j=m} \lambda_{ij}(X_i - X_j) \right] \right) = f_i \left( \left[ \left( \sum_{j=1}^{j=m} \lambda_{ij} \right) X_i - \sum_{j=1}^{j=m} \lambda_{ij} X_j \right] \right) = \\ &= f_i \left( \left[ X_i - \sum_{j=1}^{j=m} \lambda_{ij} X_j \right] \right) : R^{nm} \rightarrow R_+, \text{ де } f_i(d) \in F \text{ і } \sum_{j=1}^{j=m} \lambda_{ij} = 1. \end{aligned} \quad (1)$$