

**М.М. ТКАЧУК**, к.т.н., мол. наук. співроб. каф. КГМ ім. О.О. Морозова, НТУ «ХП»

### **АНАЛІЗ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ СКЛАДНОПРОФІЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИНОБУДІВНИХ КОНСТРУКЦІЙ З КІНЕМАТИЧНО СПРЯЖЕНИМИ ПОВЕРХНЯМИ**

У роботі розв'язана задача аналізу напружено-деформованого стану (НДС) складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з урахуванням контактної взаємодії по поверхнях, геометрична форма яких описується кінематичними умовами спряження. Це зумовило особливості розв'язання задачі визначення НДС цих тіл при їх контактній взаємодії. Запропоновано для аналізу контактної взаємодії цих тіл застосувати різномірневі за точністю та трудомісткістю моделі: модель Герца; метод граничних інтегральних рівнянь та метод скінченних елементів.

В работе решена задача анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с учетом контактного взаимодействия по поверхностям, геометрическая форма которых описывается кинематическими условиями сопряжения. Это обусловило особенности решения задачи определения НДС этих тел при их контактном взаимодействии. Предложено для анализа контактного взаимодействия этих тел применить разноуровневые за точностью и трудоемкостью модели: модель Герца; метод граничных интегральных уравнений и метод конечных элементов.

In the present work a solution to a problem of stress-strain analysis of engineering structures elements of geometrical form determined by kinematical coupling criteria is given. The key focus of the work is contact interaction of machine parts over the working surfaces obtained in the form of a cloud of pairwise conjugate points derived via solving a system of non-linear equations. Several numerical methods are chosen for the solution of the arising contact problems, namely Hertzian model of pointwise contact, method of boundary integral equations and the finite element method.

**Вступ.** Для сучасного машинобудування характерне широке застосування машин, у яких передача необхідних складних видів руху і значних робочих зусиль здійснюється за допомогою контакту складнопрофільних деталей. При цьому форма робочих поверхонь цих деталей визначається, по-перше, умовами кінематичного спряження, а по-друге, вимогами забезпечення міцності з урахуванням реальних розподілів контактної тиску. При проектуванні таких елементів машин виникають дві зв'язані задачі: I – аналізу напружено-деформованого стану (НДС) складнопрофільних тіл (СПТ) з урахуванням їхньої контактної взаємодії; II – геометричного синтезу їхніх кінематично генерованих поверхонь (КГП). Існуючі методики розв'язання задач I і II не забезпечують *варіативності* при описі форми тіл, мають недосконалі механізми *інтеграції* геометричних і розрахункових моделей і є недостатньо *збалансованими* за точністю та обчислювальними ресурсами на різних етапах досліджень. Унаслідок першої обставини виникають складнощі при автоматизації процесу створення моделей для аналізу контактної взаємодії проєктованих деталей при проведенні багатоваріантних досліджень. Друга служить перешкодою для встановлення зворотного зв'язку задачі аналізу НДС з задачею геометричного синтезу при організації процедури ітераційного пошуку форми елементів машин за кінематичним критерієм. Третій чинник часто є причиною

невиправданого збільшення витрат обчислювальних ресурсів або низької точності кінцевого результату унаслідок нераціонального вибору методів досліджень.

У зв'язку з цим удосконалення методів аналізу контактної взаємодії і геометричного синтезу СПТ з кінематично генерованими поверхнями є *актуальним* науковим і практичним завданням, а розв'язання вказаних задач визначило напрямок досліджень, описаних у роботі.

**Мета роботи** полягає у вдосконаленні та реалізації методів розв'язання зв'язаної задачі аналізу напружено-деформованого стану з урахуванням контактної взаємодії і геометричного синтезу складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично генерованими поверхнями на основі параметричного опису та інтеграції розрахункових моделей різного рівня.

Для досягнення поставленої мети розв'язані наступні завдання:

1. На основі аналізу існуючих методів обґрунтувати шляхи дослідження напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл з кінематично генерованими поверхнями.
2. Розробити підхід та комплексні математичні моделі напружено-деформованого стану з урахуванням контакту складнопрофільних тіл з кінематично генерованими поверхнями.
3. Розробити числові алгоритми на основі запропонованих математичних моделей НДС складнопрофільних тіл з кінематично генерованими поверхнями.
4. Провести аналіз напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл з КГП та встановити закономірності розподілу контактної тиску і контактних зон.
5. Провести експериментальне дослідження контактної взаємодії СПТ.

**1. Аналіз та узагальнення методів дослідження контактної взаємодії тіл з кінематично генерованими поверхнями.** В ході попереднього дослідження було проведено аналіз стану проблеми [1]. Проведений аналіз можливостей та обмежень класичної теорії Герца, методів варіаційних нерівностей, множників Лагранжа, граничних інтегральних рівнянь (МГІР) та інших показав, що вони широко застосовуються для розв'язання задач контактної взаємодії тіл довільної форми [2]. Визначено широкі можливості таких числових методів як методу скінченних елементів (МСЕ) та методу граничних елементів для моделювання НДС складнопрофільних тіл. Проведено аналіз та узагальнення методів геометричного синтезу поверхонь тіл, що знаходяться в рухомому контакті (т.з. кінематично генеровані поверхні) [3].

Установлено [1], що для розв'язання задач контактної взаємодії такого типу тіл можуть бути застосовані методи Герца, скінченних та граничних елементів (МГЕ), але вони потребують відповідної адаптації. Систематизовані переваги і недоліки та установлені способи адаптації даних методів, що особливо проявляються при розв'язанні задач контактної взаємодії тіл з КГП. Для даних тіл поверхні, що перебувають у контакті, визначаються на основі розв'язання окремої задачі синтезу їхньої геометрії (наприклад, кінематичного методу Литвина) для хмари точок, що перебувають у парних контактах. Оскільки основна складність полягає якраз в

особливості способу опису поверхонь тіл, то для розв'язання задачі аналізу контактної взаємодії необхідно розробити методи, що враховують дану особливість. Відповідно визначені основні задачі досліджень, розв'язані та описані у роботі.

**2. Теоретичні основи аналізу напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл з кінематично генерованими поверхнями.** Для тіл з кінематично генерованими поверхнями доцільно об'єднати в рамках єдиного підходу аналіз НДС з урахуванням контактної взаємодії та геометричний синтез. Загальний підхід до розв'язання зв'язаної задачі для СПТ з поверхнями, що кінематично генеруються, передбачає проведення великої кількості багатоваріантних розрахунків. Для проведення подібної серії досліджень необхідні ефективні методи синтезу і аналізу, які б одночасно забезпечували належну точність і володіли високою швидкістю виконання. У роботі вибір методу геометричного синтезу зроблений на користь кінематичного методу Литвина. Для розв'язання задач аналізу контактної взаємодії пропонується залучити декілька методів, об'єднавши їх єдиним методологічним підходом, що враховує специфіку створення геометричної моделі для досліджуваних тіл. В межах запропонованого загального підходу виділяються окремі задачі, що вимагають розв'язання з урахуванням специфіки досліджуваних СПТ: розробка методів автоматизованого створення скінченно-елементних моделей (СЕМ); розробка методів геометричного синтезу, вбудованих у загальну структуру досліджень; вибір, адаптація та порівняльний аналіз методів дослідження НДС з урахуванням контактної взаємодії.

Особлива увага приділена питанню розробки скінченно-елементних моделей СПТ, методів автоматизованої генерації та параметризованого опису. Наголошується, що ситуація ускладнюється при дослідженні складнопрофільних просторових елементів конструкцій, коли вже сам етап геометричного синтезу настільки складний, що про автоматизацію, параметризацію і керуваність сіток не може бути і мови, особливо для якісних призматичних СЕМ. Аналіз представленої на рис. 1 схеми, а саме парних відношень відповідних характеристик (критеріїв), дозволяє розкрити властиві даному процесу протиріччя: спроба поліпшити одну з характеристик моделі, як правило, вступає в конфлікт з вимогою зберегти іншу характеристику. При цьому, по-перше, компромісні варіанти не дають задовільного розв'язку ні за жодним з критеріїв, а по-друге, навіть при встановленні пріоритету однієї з характеристик I-IV вступає в дію відповідне обмеження (на рис. 1 вони периферійні).

На рис. 2 наведена структурна схема проектних досліджень для тіл з різними способами опису геометричної та скінченно-елементної моделей. Якщо в операторному вигляді рівняння стану записати як  $L(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = 0$ , де  $\Omega$  – область,

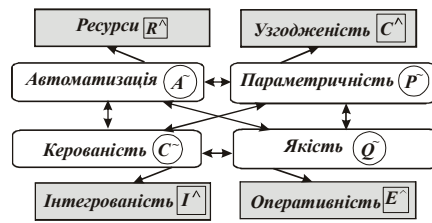


Рис. 1. Якісні характеристики СЕМ та відповідні проблемні обмеження

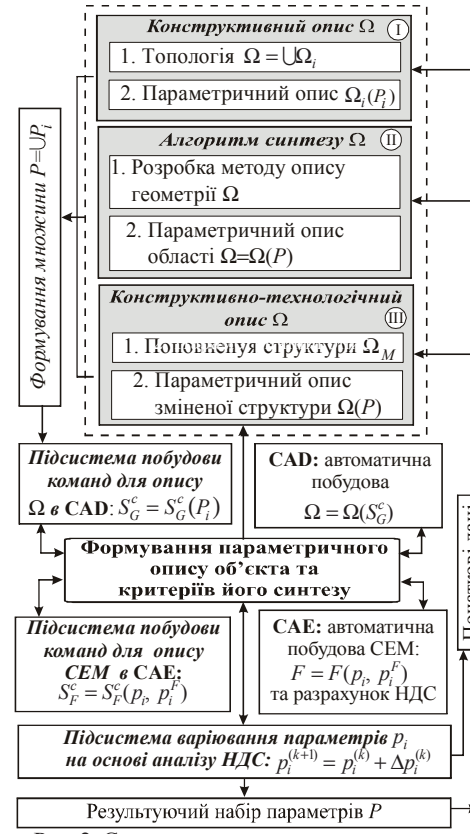


Рис. 2. Структура системи автоматизованого генерування моделей досліджуваних тіл

При цьому на першому етапі  $\Omega$  – шукана,  $p = \text{const}$ ; на другому –  $u$  – шукані,  $\Omega = \text{const}$ , потім  $p = \text{var}$ . Відповідно саме розв'язання розбивається на послідовність хоч і залежних етапів, але ця залежність проявляється лише в моменти передачі даних між етапами досліджень (рис. 3).

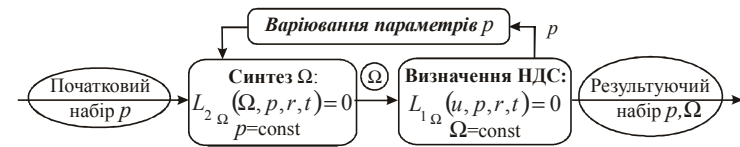


Рис. 3. Структура ітераційного розв'язання задачі геометричного синтезу та аналізу напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл з кінематично генерованими поверхнями

займана тілами;  $\mathbf{u}$  – змінні стану;  $\mathbf{p}$  – параметри;  $\mathbf{r}, t$  – просторові і часова координати; то можна виділити 2 (I і III) основних традиційних способи опису  $\Omega$ , коли вона конструюється із задалегідь відомих примітивів, тобто описується у вигляді сукупності підобластей простої форми  $\Omega_i$ . Складнішим є спосіб II – алгоритмічний, коли розв'язання задачі аналізу НДС і геометричного синтезу записується у вигляді послідовності операторів:

$$L_1|_{\Omega}(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = 0; \quad (1)$$

$$L_2|_{\Omega}(\Omega, \mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = 0. \quad (2)$$

У цьому випадку розрахунок НДС елементів досліджуваних тіл утруднений не лише складністю області  $\Omega$ , але й тим, що сама ця область є шуканою, причому для її синтезу потрібне розв'язання досить складної нелінійної задачі. У даному випадку зв'язаність задачі можна здійснити у вигляді послідовності розв'язань задач (2), (1) (саме у такій послідовності).

Як оператор задачі геометричного синтезу робочих поверхонь одного тіла за заданою формою спряжених поверхонь іншого тіла  $\bar{\Omega}$  виступає умова компланарності вектора відносної швидкості  $V_0$  точок спряжених поверхонь:  $n(a) \times V_0(b) = 0$ , де  $\mathbf{n}$  – вектор нормалі, що визначає дотичну площину. Кожен з векторів у цьому векторному добутку визначається через 2 параметри:  $\mathbf{a}$  – відомих;  $\mathbf{b}$  – шуканих. Область  $\bar{\Omega}$  представляється у вигляді регулярної хмари точок  $T_k$  – розв’язків рівняння. У роботі розроблена адаптація відомих постановок задач синтезу геометрії складнопрофільних тіл з КГП на основі кінематичного методу Литвина, що відрізняється від інших варіантів його застосування тим, що з самого початку націлений не лише на відновлення геометричної форми спряжених поверхонь, але й на підготовку геометричної моделі як основи для побудови розрахункових.

Контактна взаємодія тіл з кінематично генерованими поверхнями форми відноситься до випадку контакту тіл з гладкою границею. Для його дослідження залучається традиційне представлення механізму контакту, що базується на лагранжевому описі деформації. Для точки поверхні  $x^2$  одного з тіл записується умова непроникнення: відрізок, що сполучає її з найближчою точкою  $\hat{x}^1$  тіла  $B^1$ , направлений у зовнішність області  $B^1$ :  $g_N = (x^2 - \hat{x}^1) \cdot \hat{n}_1 \geq 0$  (рис. 4). Традиційно це співвідношення об’єднується з обмеженнями на знак контактної тиску і записується як умова Герца-Синьоріні для нормального контакту без тертя, що природним чином повторює умови Куна-Таккера в задачах опуклого програмування:  $g_N \geq 0$ ;  $p_N \leq 0$ ;  $p_N g_N = 0$ . Задача квазістатичного контакту двох пружних тіл за відсутності тертя може бути поставлена як крайова:

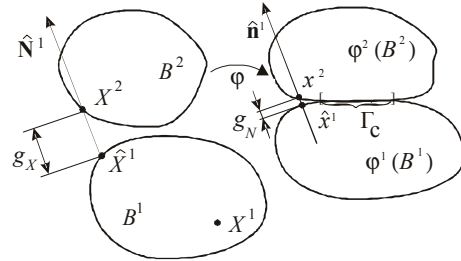


Рис. 4. Кінематика контакту гладких тіл

$$\text{Div} \sigma = 0, X \in B, \quad (3)$$

$$2\varepsilon(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \quad (5)$$

з умовами різного типу на ділянках границі  $\Gamma$ :

- кінематичні (Діріхле)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma, X \in \Gamma_u;$$

- умови контакту

$$\{u_N - g \leq 0; p_N \leq 0; \{(u_N - g) \cdot p_N = 0; X \in \Gamma_c\};$$

- силові (Неймана)

$$\sigma \mathbf{n} = \mathbf{t}_\Gamma, X \in \Gamma_\sigma.$$

Тут  $\mathbf{u}, \sigma, \varepsilon, E$  – вектор переміщень, тензори напружень, деформацій та пружних констант матеріалів.

Проте більш загальною є варіаційна постановка. Для випадку двох тіл шуканим полем переміщень є  $\mathbf{u} \in K$ ,

де

$$K = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} \in H^1(B^1) \times H^1(B^2),$$

$$\mathbf{v}|_{\Gamma_u^1} = \mathbf{u}^1, \mathbf{v}|_{\Gamma_u^2} = \mathbf{u}^2, (\mathbf{v}^2 - \hat{\mathbf{v}}^1)|_{\Gamma_c} \cdot \hat{\mathbf{n}}^1 + g_X \geq 0\}$$

таке, що для всіх  $\mathbf{v} \in K$  справедлива нерівність

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq f(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad (6)$$

де  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_B \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{v}) dX$  є білінійною, а  $f(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS$  – лінійною

формою.

Еквівалентність варіаційної нерівності (6) контактній задачі у прямій постановці (3)-(5), а також єдиність її розв’язку та еквівалентність задачі мінімізації функціонала  $u^* = \arg \{ \min[\Pi(\mathbf{u} \in K) = 1/2 a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - f(u)] \}$  доведена в роботах Кравчука [4].

На відміну від традиційних методів оцінки контактних зон і контактної тиску за аналітичною моделлю Герца, у якому для знаходження розмірів контактної площадки досить мати лише значення і напрями головних кривизн поверхонь, у роботі запропоновано використовувати та реалізовано *аналітичний* спосіб обчислення кривизн зв’язаних поверхонь (причому не заданих аналітично).

Альтернативним відносно МСЕ та теорії Герца є МГПР. У роботі реалізований один із його варіантів – МГЕ.

Використовуються умови контакту у вигляді (рис. 5):

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \delta_1 + \delta_2, S_1 \text{ і } S_2 - \text{в контакті;} \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2, S_1 \text{ і } S_2 - \text{поза контактом.} \end{cases} \quad (7)$$

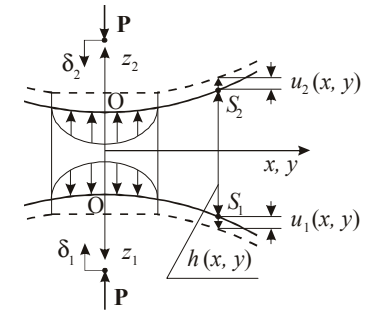


Рис. 5. Деформація тіл у контакті

Приймаючи модель пружного напівпростору (рис. 6), можна виразити переміщення виключно через функцію розподілу тиску  $p(\xi, \eta)$ :

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = \left( (1 - \nu_1^2) / \pi E_1 + (1 - \nu_2^2) / \pi E_2 \right) \times \int \int_S [p(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta = (\pi E^*)^{-1} \left\{ \int \int_S [p(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta \right\}. \quad (8)$$

Тут  $\nu_i, E_i, i=1,2$  – пружні параметри кожного з контактуючих тіл.

Для отримання числового розв'язку функція  $p$  наближається суперпозицією масиву пірамідальних елементарних розподілів на регулярній сітці з кроком  $c$  із рівносторонніх трикутників (рис. 7) і повністю визначається дискретним набором вузлових значень  $p_n$ :

$$p(\xi, \eta) \cong \sum_n \hat{p}(\xi - \xi_n, \eta - \eta_n) \cdot p_n.$$

Для знаходження  $p_n$  використані: прямий метод (або колокацій); варіаційний метод (принцип Калькера). При цьому потрібно обчислювати переміщення (8) для використовуваного типу апроксимуючого тиску. У роботі розроблений *аналітичний* шлях обчислення „шаблону” форми розподілу переміщень для одиничного пірамідального елемента

$$w(x, y) = \sum_m \int \int_{S^{(1)}} [\hat{p}^{(1)}(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta,$$

де  $S^{(1)}$  – шестикутна область з одиничними сторонами;  $\hat{p}^{(1)}$  – одиничний пірамідальний розподіл на ній. Тоді:

$$\begin{aligned} u_n &= u_{z_1}(I_n) + u_{z_2}(I_n) = u_{z_1}(I_{ij}) + u_{z_2}(I_{ij}) = u_{z_1}(x_{ij}, y_{ij}) + u_{z_2}(x_{ij}, y_{ij}) = \\ &= (c / \pi E^*) \sum_{kl} w[(x_{ij} - \xi_{kl}) / c, (y_{ij} - \eta_{kl}) / c] p_{kl} = (c / \pi E^*) \sum_{kl} w(i - k, j - l) p_{kl} = \\ &= \sum_m C_{nm} p_m, \text{ де } C_{nm} = (c / \pi E^*) w[i(n) - i(m), j(n) - j(m)]. \end{aligned}$$

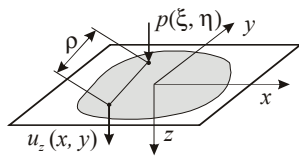


Рис. 6. Переміщення границі напівпростору під дією нормального зусилля

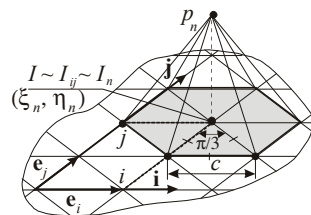


Рис. 7. Регулярна трикутна сітка та пірамідальний елемент функції тиску

У роботі запропоновано використовувати властивості симетрії сітки і елементарних розподілів. Це дозволяє обмежуватися обчисленням значень  $w_{ij}$  лише у вузькому секторі  $\{i' \geq 0, 0 \leq j' \leq i'\}$  (рис. 8, заштриховано) та економно зберігати їх при числовій реалізації у вигляді симетричної матриці ( $w_{ij} = w_{j'i'}$ ).

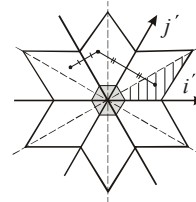


Рис. 8. „Відображення” індексів для обчислення коефіцієнтів шаблону

У кінцевому підсумку маємо умови контакту (7) у дискретній формі:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ вузол } J_n - \text{ в контакті;} \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ вузол } J_n - \text{ поза контактом} \end{cases} \quad (9)$$

та додаткові співвідношення прямого методу – умови додатності і силава:

$$\begin{aligned} p_m &\geq 0, \forall J_m; \\ (\sqrt{3}/2) c^2 \sum_m p_m &= P. \end{aligned} \quad (10)$$

Розв'язок визначальної системи (9)-(11) знаходиться у ході ітераційної процедури.

Для числового моделювання контактної взаємодії штампу з напівпростором у плоскій постановці (рис. 9) у роботі запропоновано застосувати метод дискретних особливостей до дискретизації сингулярного інтегрального рівняння

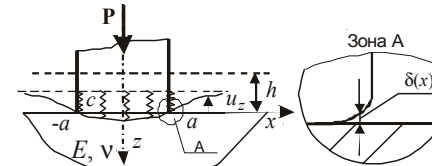


Рис. 9. Схема контактної взаємодії штампу з напівпростором

$\int_{-a}^a [p(s) / (x - s)] ds = -\pi E u_z'(x) / 2(1 - \nu^2)$ . У результаті отримана система рівнянь відносно значень контактного тиску, аналогічна (9), але із значно меншою кількістю вузлів дискретизації.

У комплексі всі описані методи складають теоретичну основу для розв'язання зв'язаних задач дослідження НДС тіл з кінематично генерованими поверхнями.

**3. Числова реалізація методів автоматизованого генерування геометричних і розрахункових моделей та створення спеціалізованого програмно-модельного комплексу (СПМК).** На рис. 10 приведена структура запропонованого СПМК.

Основною характерною особливістю кінематично генерованих поверхонь є складність їхнього опису прийнятим на даний час в CAD/CAE-системах способом, що відповідає наступним етапам:

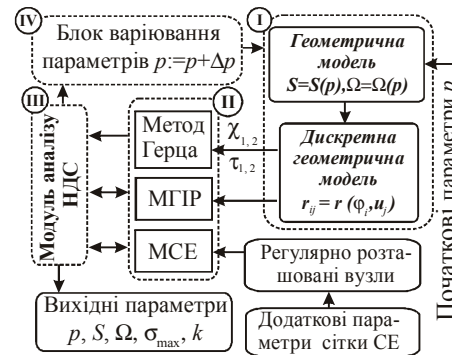


Рис. 10. Структура СПМК для аналізу контактної взаємодії складнопрофільних тіл з КГП та їх геометричного синтезу



1) будується поверхня  $S_M$  як дискретний набір точок  $M_p, p=1, \dots, N_M$ , що наближають у цих точках ідеальну поверхню  $S_{id}$  (припускається похибка  $\epsilon_M$ );

2) на побудовану хмару точок натягується деяка поверхня  $S_{ap}$ , через характер апроксимації якої припускається похибка  $\epsilon_{ap}$  у визначенні поточної точки  $M_{ap}$  загального положення (у тому числі й вузлів СЕ):

$$|M_{ap} - M_{id}| \leq \epsilon_{ap}(M_{ap}), M_{ap} \in S_{ap}, M_{id} \in S_{id};$$

отримана поверхня  $S_{ap}$  розбивається в напів- або автоматичному режимі на СЕ, причому грані останніх ( $S_G$ ), що виходять всіма своїми вузлами на поверхню  $S_{ap}$ , відхиляються в своїх межах від неї на величину  $\epsilon_e$ . Відповідно при проходженні цього ланцюжка накопичується похибка наближення точної поверхні (рис. 11) так, що сумарна похибка складає

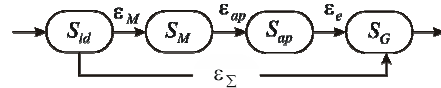


Рис. 11. Похибки моделювання геометрії традиційною технологією

$$\epsilon_{\Sigma} = |\epsilon_M| + |\epsilon_{ap}| + |\epsilon_e|.$$

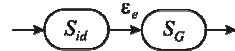


Рис. 12. Запропонована технологія генерування топологічно регулярних сіток

Як альтернатива такому підходу пропонується алгоритм напівавтоматичної генерації топологічно регулярних сіток тіл, обмежених КГП (рис. 12), що передбачає генерування топологічно регулярної сітки вузлів СЕ з використанням властивостей КГП практично з будь-якою наперед заданою точністю на поверхні  $S_{id}$ , заданої у цьому випадку в своїх природних координатах; створення множини СЕ, що повністю або в основному складається з шестигранників. У даному випадку можна нехтувати похибкою  $\epsilon_M$ , і величина загальної похибки визначається лише ступенем відхилення форми „граневої” поверхні  $S_G$  від ідеальної  $S_{id}$ . Та хоча і в цьому випадку важко отримати апріорну оцінку  $\epsilon_e$ , можна отримати практично точну апостеріорну:  $\epsilon_e \approx |IG| = |\mathbf{r}_G(\kappa_1, \kappa_2) - \mathbf{r}_{id}(\kappa_1, \kappa_2)|$ , де  $\mathbf{r}_{id}$  – радіус-вектор точки  $I$  на ідеальній поверхні, а  $\mathbf{r}_G$  – на перетині  $S_G$  з нормаллю до  $S_{id}$  в точці  $I$  (рис.13).

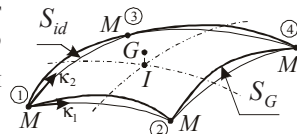


Рис. 13. До оцінки похибки „граневої” поверхні

Для обчислення відхилення  $\epsilon_e$  поверхні граней згенерованих СЕ від „ідеальної” поверхні  $S_{id}$  використовуються точні значення координат точок цієї поверхні, розташованих усередині грані. У результаті стає принципово можливою побудова набору вузлів, що задають СЕМ, яка апроксимує КГП з наперед заданою точністю. Так, для трилінійних елементів абсолютне значення похибки апроксимації

можна оцінити таким чином:

$$|\zeta_{M_e}| \leq k_{\max} (\Delta\xi^2 + \Delta\eta^2) / 4 \leq k_{\max} s_{\max}^2 / 4,$$

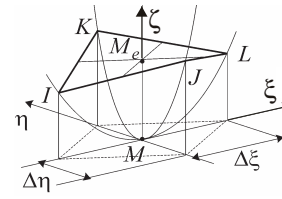


Рис. 14. Оцінка відхилення грані трилінійного елемента від дійсної поверхні

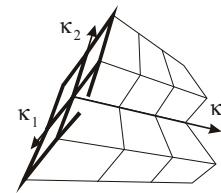


Рис. 15. Побудова внутрішніх вузлів СЕМ

де  $k_{\max}$  – максимальна кривизна,  $s_{\max}$  – довжина більшого ребра (рис. 14). Зовнішні вузли СЕМ розташовуються на перетині топологічно регулярних координатних ліній в природній параметризації  $S_{id}$ . Для визначення і розміщення внутрішніх вузлів сітки вводиться третя координата  $\kappa_3$ , яка разом з  $\kappa_1, \kappa_2$  параметризує весь об’єм тіла (рис. 15).

Вплив форми генерованих СЕ (управління, опис, діагностування, оцінка результуючої похибки) для тіл, обмежених КГП, на точність моделювання НДС було предметом окремого дослідження. У його ході була продемонстрована задовільна точність розв’язання задачі визначення НДС, але при цьому – дуже висока точність позиціонування вузлів СЕ на границі тіл. Це спричиняє точніший опис зазору в спряженні, а, відповідно, і розподілу контактної тиску. Крім того, були розв’язані тестові задачі

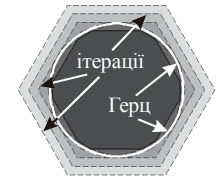


Рис. 16. Ітераційний процес уточнення форми плями контакту для випадку параболічного зазору

для обґрунтування вибору параметрів числових моделей.

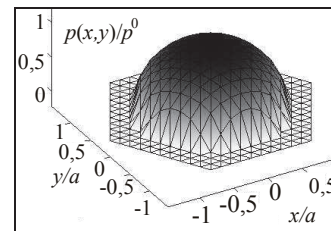


Рис. 17. Кусочно-лінійний розподіл контактної тиску, одержаний у результаті застосування прямого методу

Продемонстрована висока точність опису НДС при застосуванні призматичних СЕ та МГР (МГЕ) при невеликій кількості ступеней вільності. Зокрема, було розв’язано за допомогою створенної програми „МГР” задачу про взаємодію параболоїду обертання з напівпростором. На рис. 16, 17 наведено ілюстрації стягування зони контакту до „герцевської” в ході ітераційного її уточнення, а також відносно (до максимального „герцевського”) значення контактної тиску.

**4. Розв’язання прикладних задач аналізу контактної взаємодії і геометричного синтезу складнопрофільних тіл з кінематично генерованими поверхнями.** Вибір об’єктів досліджень на цьому етапі був зумовлений реальними потребами заводів, НДІ та КБ, що проектують і виробляють машини із складнопрофільними деталями з кінематично генерованими поверхнями.

Зокрема, розв’язана задача моделювання контактної взаємодії елементів ланцюгового приводу (круглоланковий ланцюг, рис. 18, 19). Була побудована

деталізована модель ділянки ланцюга, що піддається поздовжньому розтягуванню. У моделі враховується істотно нелінійний характер процесів: наявність контакту поверхонь складної форми, пружно-пластична поведінка матеріалу, великі деформації.

Встановлені особливості деформації ланок ланцюга і дано їх якісне та кількісне обґрунтування:

- у них реалізується складний тривимірний НДС;
- має місце складна конфігурація форми контактних плям та розподілу контактної тиску, що якісно і кількісно відрізняються від герцевських (чотирипелюсткова форма на відміну від еліптичної, див. рис. 20);

- область контакту характеризується неоднорідним розподілом локальних напружень і деформацій, що мають при великих навантаженнях концентрацію на внутрішній поверхні ланки ланцюга поблизу границі плями контакту (рис. 21);

- перед руйнуванням ланцюг приймає відносно подовження, що приблизно дорівнює половині значення граничної локальної деформації матеріалу, з якого вона виготовлена (рис. 22).

Таким чином, встановлені принципові якісні особливості і кількісні відмінності, що не дозволяють застосовувати модель „герцевського” контакту навіть при незначних зусиллях на силовий привід.

Також було здійснено геометричне та скінченно-елементне моделювання НДС коліс двохпараметричних передач (ДПП) з урахуванням контактної взаємодії на прикладі частинного варіанту циліндро-конічної передачі (рис. 23).



Рис. 18. Конвеєр з ланцюговим приводом

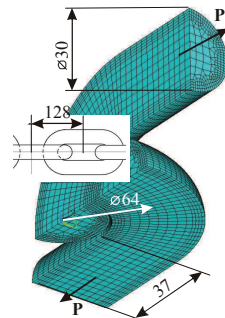


Рис. 19. Круглоланковий ланцюг

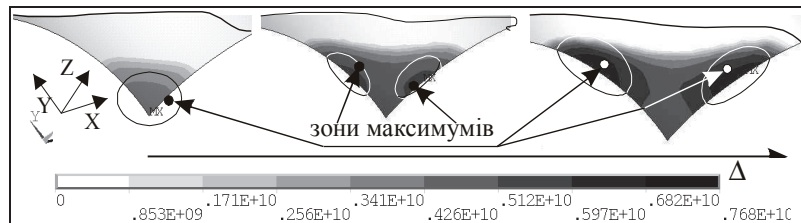


Рис. 20. Характер розподілу контактної тиску з ростом відносного подовження ланцюга  $\Delta$  (показана четвертина)

Перед проведенням власне СЕ моделювання кожного разу розв’язується задача синтезу геометрії робочих поверхонь зубців ДПП. Це окрема складна нелінійна задача, в якій одночасно зі встановленням найбільш навантажених ділянок робочих поверхонь зубців представляє інтерес вплив геометричних параметрів на характеристики контакту.

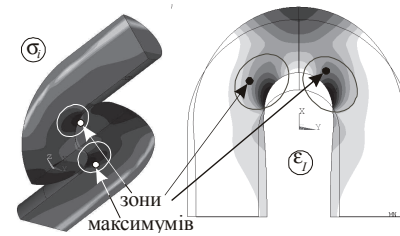


Рис. 21. Напруження за Мізесом та перші головні деформації при подовженні ланки на 15мм

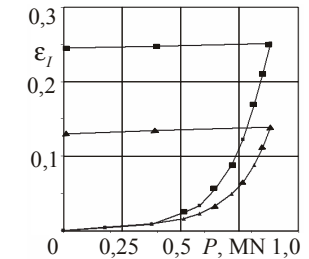


Рис. 22. Залежність максимальних головних деформацій ( $\blacksquare$ ) та відносного подовження ланцюга ( $\blacktriangle$ ) від величини зусилля розтягання

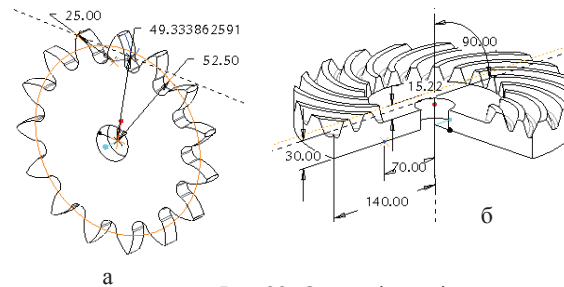


Рис. 23. Основні розміри циліндричного (а) та конічного (б) коліс

На рис. 24, наприклад, представлений вигляд контактних плям у спряженні зубів коліс при різних їх положеннях, що якісно узгоджується із загальним характером зміни ступеню витягнутості контактних площадок для всіх передач даного типу. Таким чином, навіть проста герцевська модель контактної взаємодії в межах запропонованого підходу дозволяє одержувати цінні кількісні та якісні результати, що дає можливість здійснити оцінку міцності зубчастої передачі на етапі синтезу її параметрів. Визначені частки поверхні, які несуть найбільшу контактну навантаженість та надалі можуть бути досліджені додатково іншими методами.

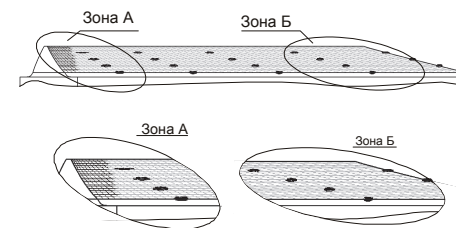


Рис. 24. Контактні плями на поверхні зубця „конічного” колеса

При розробці алгоритму побудови СЕМ проводився аналіз контактної взаємодії зубів передачі в заздалегідь вибраних положеннях коліс. За допомогою геометричної моделі, створеної засобами системи Pro/ENGINEER, була побудована СЕМ в середовищі ANSYS Workbench. Використаний гексагональний елемент SOLID186, ефективний для тіл з регулярною топологією. Максимальний розмір елементів – 5 мм, в районі точок контакту зубів була створена область зі згущенням, розміри якої разом з розмірами СЕ в цій зоні обиралися виходячи з попередньої оцінки величин довжин напівосей плями контакту згідно з теорією Герца. Одночасно з цим встановлено, що в підповерхневому шарі виникають значні градієнти

напружень та деформацій (рис. 25), що викликає необхідність створення зони згущення на глибину, не меншу розмірів контактної плями, в якій розміри елементів не перевищуватимуть 1/10 її розмірів. Вплив локальних особливостей розподілу напружень і деформацій в разі точкового контакту обмежується зоною радіусу  $5 \div 10$  довжин напівоцей плями контакту. Також установлено, що врахування двопарності зачеплення суттєво впливає на величину обчисленого за МСЕ напруження (табл. 1).

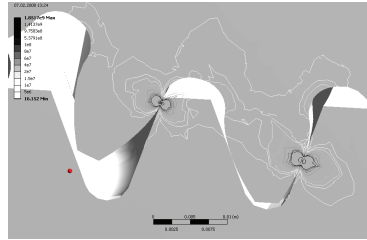


Рис. 25. Локальна концентрація напружень в зоні контакту

Розв'язана також задача аналізу контактної взаємодії кульового поршня з біговою доріжкою в радіальній ГОП (рис. 26).

Таблиця 1

Контакт-на пара	Контактне зусилля в спряженні зубів, Н	Максимальний контактний тиск, ГПа	
		із СЕМ	згідно з теорією Герца
1	599.72	1.29	1.24
2	413.45	2.97	2.65

Розглянуто досить загальний клас профілів бігових доріжок на кільці статора (рис. 27). Профіль бігової доріжки в центральній своїй частці є дугою кола радіуса  $R_c$  з кутовою величиною  $2\theta$ . Таким чином, середня частка бігової доріжки є жолобом тороїдальної форми, по якому перекочується поршень при обертанні ротора. Радіуси жолоба і поршня передбачається робити близькими для того, щоб зменшити первинний зазор між поршнем і біговою доріжкою в поперечному напрямі. У результаті форма бігової доріжки як поверхні обертання повністю визначається параметрами її профілю:  $R_c, R_p, \theta$ . При цьому значення конструктивних параметрів:  $R_p=31,75$  мм,  $R_{sp}=128$  мм,  $R_{st}=159,75$  мм.

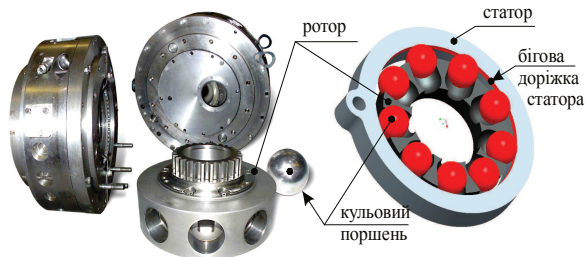


Рис. 26. Радіальна гідропередача ГОП-900 (ХКБМ)

Вплив варійованих параметрів на характер контактної взаємодії поршня з кільцем статора за відсутності тертя і локальний НДС демонструється результатами розрахунків, проведених різними методами. Видно (рис. 28, 29), що форма розглянутих поперечних профілів зумовлює характер розподілу контактної тиску,

суттєво відмінний від герцевського, що необхідно враховувати при виборі значень радіусу центральної частки бігової доріжки статора ГОП та інших її конструктивних параметрів. Рис. 30 демонструє області застосування та порівняльну точність результатів, одержаних за Герцем, МСЕ та МГЕ, а рис. 31 – характер НДС в контактуючих тілах. Дані результати стали основою для визначення раціональної форми бігових доріжок радіальних ГОП з умов контактної міцності.

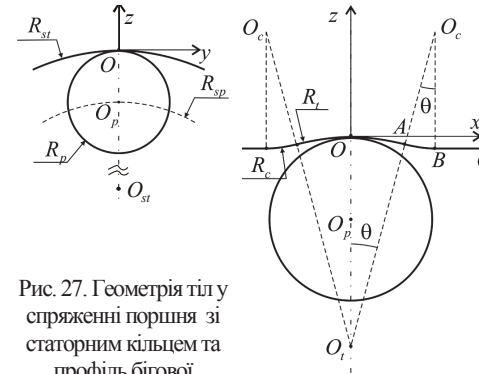


Рис. 27. Геометрія тіл у спряженні поршня зі статорним кільцем та профіль бігової доріжки

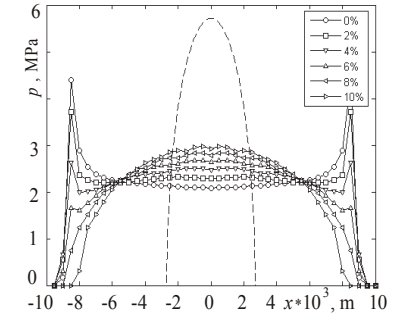


Рис. 28. Розподіл контактної тиску на осі  $Ox$  при малих різницях радіусів жолоба та поршня порівняно з аналогічним розподілом у випадку контакту з циліндром

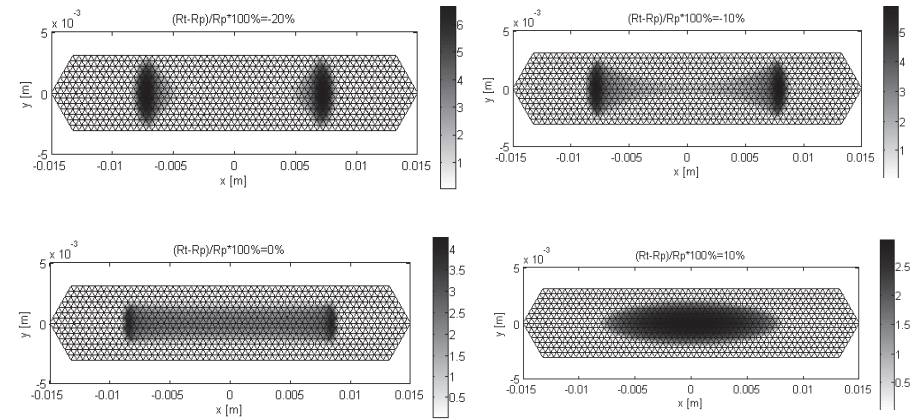


Рис. 29. Розподіли контактної тиску при різних значеннях різниці радіусів жолоба і поршня

Одержані в ході розв'язання описаних задач результати підтвердили ефективність, точність та адекватність запропонованих підходів, методів і моделей до дослідження НДС складнопрофільних тіл з КГП.



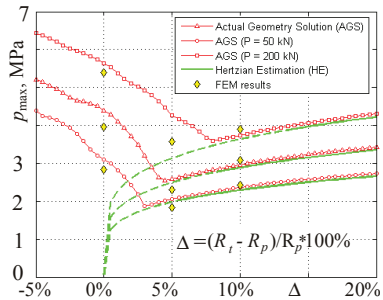


Рис. 30. Залежності значень максимального контактної тиску від відносної різниці радіусів жолоба та поршня для трьох різних навантажень, отримані за Герцем, МСЕ и МГЕ

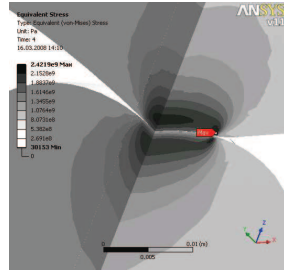


Рис. 31. Розподіл напружень за Мізесом в кульовому поршні та статорі при зусиллі стискування 200 кН (МСЕ, четвертина моделі)

**5. Експериментальні дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл з кінематично генерованими поверхнями.** Запропонований у роботі алгоритм розв'язання зв'язаних задач реалізований у вигляді СПМК, який задовольняє вимогам наскрізної параметричності та інтегрованості, дає змогу не лише проводити дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл, але також створювати геометричні моделі, розробляти технологію обробки, і в результаті – виготовляти дослідні зразки (макети виробів), які до теперішнього часу не існували. На прикладі макету циліндро-конічного двохпараметричного зачеплення продемонстрований повний цикл розробки, розрахунків, виготовлення і випробування (рис. 32). Це свідчить про високий ступінь універсальності запропонованого підходу, його працездатності та ефективності.

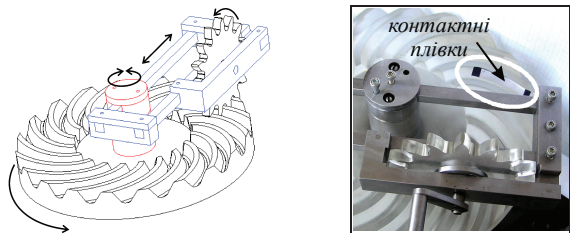


Рис.32. Комп'ютерна, фізична модель зубчастого зачеплення і робочі моменти експериментального дослідження контакту зубців

Для експериментального визначення контактних зон і тиску в спряженнях досліджуваних СПТ був використаний метод контактних відбитків, який відрізняється тим, що може бути застосований як на макетних зразках, так і на реальних виробах, як в лабораторних, так і у виробничих умовах, як для низького, так і для високого тиску. Дана технологія була доповнена оригінальним авторським алгоритмом і програмними модулями для розпізнавання контактних відбитків та їх розшифровки, що істотно

підвищує точність і оперативність проведення досліджень. Проведені комплексні дослідження контактної взаємодії ланок силового ланцюга, ДПП і кульового поршня з біговою доріжкою радіальної ГОП (рис. 33, 34) показали повну якісну відповідність прогнозованої розрахунково та зафіксованої експериментально поведінки контактних зон і тиску при варіюванні місця контакту, зусиль або конструктивних параметрів.



Рис. 33. Робочі моменти експериментальних досліджень кульового поршня та статора ГОП

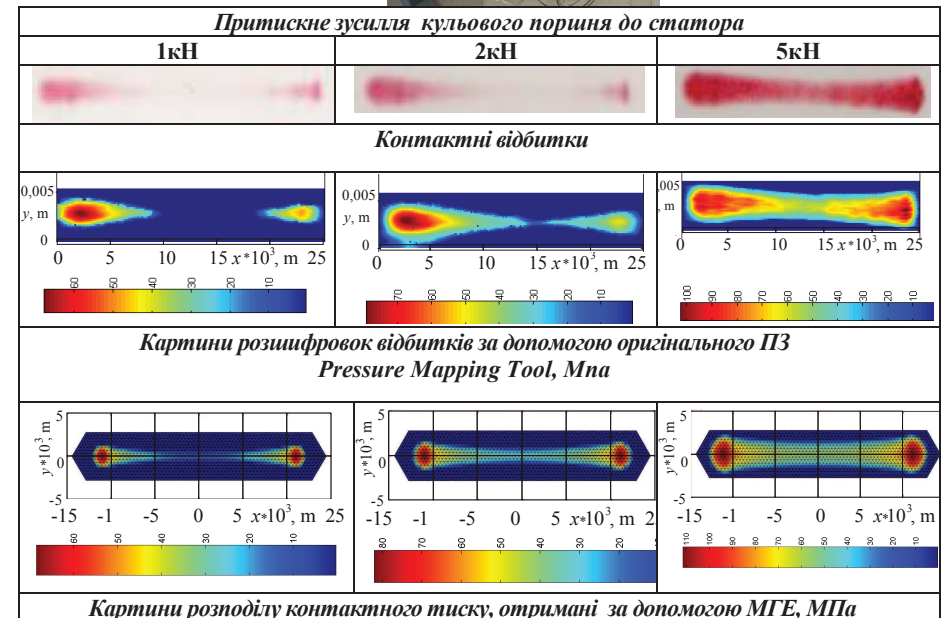


Рис. 34. Результати аналізу контактних відбитків на чутливих плівках Fujii та отриманих МГЕ

Похибка числового моделювання контактної взаємодії досліджуваних СПТ з КГП порівняно з експериментальними даними не перевищує в цілому 11 % (рис. 35, 36). Це свідчить про важливість практичного використання створених спеціалізованих програмно-модельних комплексів у ході науково-дослідних та дослідно-конструкторських робіт при проектуванні та технологічній підготовці виробництва широкого класу нових машин, що містять тіла з кінематично генерованими поверхнями, які перебувають у рухомому контакті.



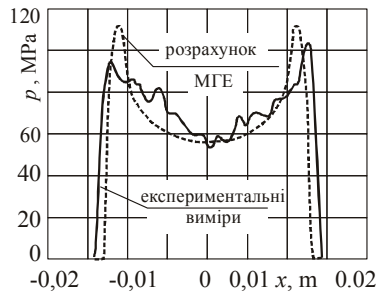


Рис. 35. Розподіли контактного тиску на довгій осі плями контакту при  $R_f = 31,0$  мм,  $P = 5$  кН

**Висновки.** У роботі поставлена та розв'язана науково-практична задача вдосконалення методів аналізу НДС складнопрофільних тіл з урахуванням контактної взаємодії, а також геометричного синтезу їх кінематично генерованих поверхонь. При цьому отримані наступні наукові результати.

1. На основі аналізу стану питання зроблено висновки про недостатні можливості існуючих методів визначення НДС елементів машинобудівних конструкцій з урахуванням контактної взаємодії по кінематично генерованих поверхнях. Удосконалення цих методів було обране як задача досліджень.

2. У роботі запропонований перспективний підхід до розв'язання зв'язаної задачі дослідження НДС з урахуванням контактної взаємодії складнопрофільних тіл і синтезу КГП, що базується, на відміну від традиційного підходу, на єдиному описі математичної, геометричної і числової моделей. Обґрунтовано використання не одного, а комплексу методів і моделей різного рівня складності: метод Герца, метод граничних інтегральних рівнянь і метод скінченних елементів в єдиному пакеті. Показано, що метод Герца застосовний для оціночних розрахунків у строго визначеному діапазоні, а МГП дає прийнятну точність в ширшому діапазоні; еталонним же за точністю є МСЕ. Досліджено контакт тіл, форма яких може бути заздалегідь не визначена, як у традиційному випадку, а встановлюється у ході розв'язання спеціальної задачі їх геометричного синтезу за умовами кінематичного спряження у вигляді хмари зв'язаних точок. Запропоновано використовувати властивості умов кінематичного спряження тіл для побудови розрахункових моделей їх контактної взаємодії: точні значення тензора кривизни контактуючих поверхонь в точці; уточнені значення функції зазору у вузлових точках; точні просторові координати вузлових точок СЕ. Розвинено МГП у частині більш точного визначення коефіцієнтів матриці та правих частин системи визначальних рівнянь.

3. Розроблена у роботі комплексна математична модель НДС тіл з КГП реалізована у вигляді спеціалізованих програмно-модельних комплексів, що інтегруються у процес проектних досліджень. Запропонований перспективний

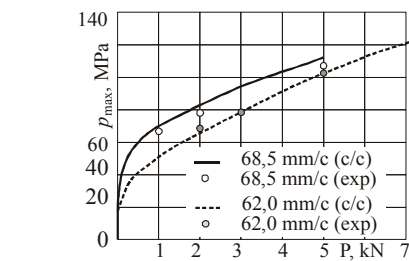


Рис. 36. Стівставлення числових (с) та експериментальних (exp) залежностей максимального контактного тиску від величини притискового зусилля для макетів доріжок з радіусами жолобів 31,0 мм і 34,25 мм

метод генерування скінченно-елементного розбиття на основі використання топологічно регулярних поверхневих криволінійних сіток на кінематично генерованих поверхнях.

4. Із застосуванням СПМК розв'язано цикл прикладних задач моделювання НДС із урахуванням контактної взаємодії складнопрофільних тіл. Установлено закономірності розподілу контактного тиску та контактних зон у спряженні цих тіл. Вони у багатьох випадках різко відмінні від традиційних герцевських розподілів.

5. Експериментальні дослідження НДС і контактної взаємодії СПТ проводилися на спеціально розроблених стендах і дослідних зразках. Так, при експериментальному визначенні методом контактних відбитків контактних зон і контактного тиску у спряженні елементів макету силового ланцюга, в прототипі циліндро-конічної передачі, а також при дослідженні взаємодії кульового поршня з макетом бігової доріжки гідропередачі підтверджені якісні та кількісні ефекти зміни розподілу контактних зон і тиску при варіюванні геометричної форми спряжених поверхонь (відмінність від числових результатів не перевищує 11-16%). Таким чином, отримано повне підтвердження адекватності математичних моделей, обґрунтованості вибору методів числових досліджень, відповідності створених моделей, а також достовірність і точність одержаних результатів.

У подальшому планується розширити клас об'єктів, які досліджуються за розробленою методикою.

**Список літератури:** 1. Ткачук Н.Н. Анализ контактного взаимодействия сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями: дис... кандидата техн. наук: 05.02.09 / Ткачук Николай Николаевич. – Харків, 2010. – 203 с. 2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 509 с. 3. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений / Ф.Л. Литвин. – М.: Наука, 1968. – 584 с. 4. Кравчук А.С. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров / А.С. Кравчук // Прикладная математика и механика. – Том 41. – 1977. – С. 329-337.

Поступила в редколлегию 19.02.2011