

УДК 539.3

**И.В. АРТЕМОВ**, гл. конструктор НТК ЧАО «АзовЭлектроСталь», Мариуполь

### ДИНАМИКА СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

*У статті описано числове дослідження процесів у динамічних системах з однією та кількома ступенями вільності при імпульсному періодичному збудженні. Визначено характер руху при збудженні системи резонансною частотою, а також при субгармонічних режимах.*

*В статье описано численное исследование процессов в динамических системах с одной и несколькими степенями свободы при импульсном периодическом возбуждении. Определен характер движения при возбуждении системы резонансной частотой, а также при субгармонических режимах.*

*The paper describes a numerical research of processes in dynamical systems with one or more degrees of freedom in pulse-periodic excitation. The nature of motion is determined in excitation of resonance frequency and in subharmonic modes.*

**Введение.** Виброударные крупногабаритные тяжело нагруженные машины с дебалансным возбуждением испытывают сложный спектр воздействий [1, 2]. В некоторых случаях при определенных сочетаниях характеристик возбуждения и спектральных характеристик корпусов этих вибромашин в них возможна реализация ударного резонанса [3, 4]. В связи с этим возникает актуальная задача исследования динамических процессов в таких динамических системах с

целью определения опасных режимов эксплуатации, и, соответственно, разработки рекомендаций по выбору конструктивных схем и параметров проектируемых машин с отстройкой от этих режимов.

**Математическая модель и тестовые расчеты.** Рассмотрим несколько вариантов динамической системы, подверженной действию периодических импульсов. Данные системы образуются из простейшей одномассовой (рис. 1) путем добавления новых звеньев (рис. 2, 3).

При этом на первое тело  $m_1$  действует периодическая импульсная сила (рис. 4) с частотой

$$\omega^* = 2\pi\nu^* = 2\pi/T^*, \quad (1)$$

где  $\omega^*$ ,  $\nu^*$ ,  $T^*$  – круговая частота возбуждения ( $c^{-1}$ ), частота (Гц) и период колебаний (с) соответственно.

Длительность импульса  $\delta^*$  намного меньше периода  $T^*$

$$\delta^* \ll T^*, \quad (2)$$

что обеспечивает условие короткого удара [3, 4], если только

$$\delta^* \leq T_{1,2,3}, \quad (3)$$

где  $T_1, T_2, T_3$  – периоды собственных колебаний исследуемой системы.

I. **Одномассовая система.** В этом случае вид распределения  $F_{имп}$  на интервале, где сила – ненулевая, слабо влияет на характер движения системы в целом, если только импульс единичного всплеска силы

$$S = \int_{T^*} F_{имп} dt = const. \quad (4)$$

Тогда, обозначая

$$F_{имп}(t) = F_{max} \cdot \varphi(t), \quad (5)$$

из (4) имеем при кусочно-линейном виде  $\varphi(t)$

$$S = F_{max} \int_{T^*} \varphi(t) dt = 1/2 F_{max} \cdot \delta^*. \quad (6)$$

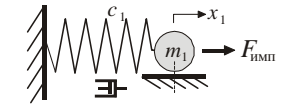


Рис. 1. Одномассовая динамическая система

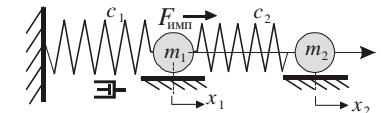


Рис. 2. Двухмассовая динамическая система

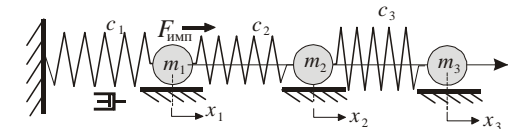


Рис. 3. Трехмассовая динамическая система

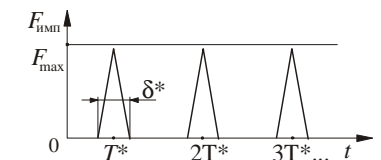


Рис. 4. Распределение периодической импульсной силы во времени

Уравнения движения системы имеют вид:

$$m_1 \ddot{x} + k_1 \dot{x} + c_1 x = F_{\text{имп}}(t), \quad (7)$$

или 
$$\ddot{x} + 2\eta \dot{x} + \omega^2 x = A\varphi(t), \quad A = F_{\text{max}}(t) / m_1. \quad (8)$$

Данная система имеет при малом трении одну собственную частоту

$$\omega_{11}^2 \approx \omega^2 = c_1 / m_1. \quad (9)$$

Для анализа ударного резонанса в данной системе можно использовать несколько способов. Рассмотрим два из них – аналитический и численный.

1) *Аналитический метод.* Следуя работе [4], можно применить аналитический способ исследования режимов движения данной системы. Устремляя длительность действия силы  $\delta^*$  к нулю, но сохраняя ее импульс, для определения установившегося движения можно использовать условия «сшивания» периодических решений:

$$x_1(\tau + T)^* = x_1(\tau); \quad \dot{x}_1(\tau + T)^* = \dot{x}_1(\tau) + S/m, \quad (10)$$

где  $\tau^*$  – некоторый момент начала очередного периода движения ( $\tau = T^* \cdot n, n = 1, 2, \dots$ ).

Из условия (10) определяется условие ударного резонанса [4]

$$\omega^* = \omega_{11} / n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Таким образом, в системе реализуется множество ударных резонансов, начиная с основного ( $\omega^* = \omega_{11}$ ) и затем на субгармонических режимах различной долиности (кратности)  $n$ .

2) *Численное решение.* Аналитическое решение сложно использовать при анализе движения многомассовых систем. В этом случае удобнее применить прямое численное интегрирование систем (7), (8), наблюдая переходные установившиеся режимы их движения. В частности, может быть использована схема интегрирования Рунге-Кутты [5], реализованная в пакете Maple. Тогда при ненулевых  $\delta^*$  имеем непрерывную функцию  $F_{\text{имп}}(t)$ , и задавая шаг интегрирования  $\Delta \ll \delta^*$ , можно получать численные решения, с достаточной точностью отражающие поведение динамической системы. Для анализа решения удобно ввести безразмерные время  $\theta$  и координату  $y_1$ :

$$\theta = t / T^*; \quad y_{11}(\theta) = x_1(t) / x_{1\text{cr}}, \quad x_{1\text{cr}} = F_{\text{max}} / c_1. \quad (12)$$

Перебирая периодичность действия импульсов

$$T^* = \alpha_1 T_{11}, \quad (13)$$

где  $\alpha_1 = [\alpha_1^-, \alpha_1^+]$  – некоторый коэффициент из задаваемого интервала изме-

нения, можно получить искомый набор характеристик движения на дискретном множестве  $\alpha_1$ . Эта информация служит в качестве базовой для анализа поведения системы.

II. *Двухмассовая система.* Уравнения движения системы (см. рис. 2):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) = F_{\text{имп}}(t); \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

или

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\eta \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \bar{\omega}_{12}^2 (x_1 - x_2) = A\varphi(t); \\ \ddot{x}_2 + \bar{\omega}_2^2 (x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

1) *Аналитический способ решения.* В данном случае определим только собственные частоты системы (14), (15). При малом трении собственные частоты колебаний двухмассовой системы определяются из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (16)$$

или

$$\omega^4 - \omega^2 \cdot \bar{\omega}_3^2 + \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 = 0, \quad (17)$$

где  $\bar{\omega}_3^2 = \bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2 + \bar{\omega}_{12}^2$  (см. (15)).

Тогда собственные частоты колебаний имеют вид:

$$\omega_{2(1,2)}^2 = \frac{\bar{\omega}_3^2 \mp \sqrt{\bar{\omega}_3^4 - 4\bar{\omega}_1^2 \cdot \bar{\omega}_2^2}}{2}. \quad (18)$$

Из (18) можно определить поведение частот, введя в рассмотрение безразмерные параметры

$$\lambda = \omega^2 / \bar{\omega}_1^2; \quad \delta_2 = \bar{\omega}_2^2 / \bar{\omega}_1^2; \quad \delta_{12} = \bar{\omega}_{12}^2 / \bar{\omega}_1^2. \quad (19)$$

Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{\delta_2 + 1 + \delta_{12} \mp \sqrt{(\delta_2 + 1 + \delta_{12})^2 - 4\delta_2^2}}{2}. \quad (20)$$

В итоге получаем зависимости относительных собственных частот (их квадратов) как функций относительных характеристик «присоединенной» к исходной одномассовой дополнительной части системы. Учитывая, что при этом можно рассмотреть случаи  $m_2 \leq m_1, c_2 \geq c_1$ , имеем  $\delta_2 \geq \delta_{12}, \delta_2 \geq 1$ . С учетом этих ограничений и варьируя  $\delta_2, \delta_{12}$ , можно проследить миграцию спектров, определяемую параметром  $\lambda$ .

Таким образом можно определить потенциально опасные режимы с точки зрения возникновения ударного резонанса, а именно – с периодами, крат-

ными собственным частотам.

2) *Численный метод.* Применяется тот же подход, что и для одномассовой системы, однако в этом случае добавляется вторая контролируемая координата –  $x_2(t)$ , а в остальном процесс аналогичен описанному выше.

3) *Анализ процесса в среде Cosmos Motion.* В настоящее время для моделирования динамики сложных систем во все большей мере используются САЕ-системы типа Cosmos Motion, MSC.Adams, UM. Их несомненным преимуществом является интуитивно понимаемый и удобный интерфейс пре- и постпроцессинга, возможности визуализации и обработки результатов. Более того, эти системы удобно использовать не только для систем материальных точек, но и для реальных тел с той или иной геометрической формами, размерами и свойствами материалов отдельных деталей. В данном случае удобно рассмотреть возможности исследуемой системы, имея в виду использование ее в ходе дальнейших исследований, с одной стороны, а с другой – соотнося полученные с ее помощью результаты с результатами аналитического и численного исследований. Последнее дает некоторую оценку точности и достоверности, обеспечиваемых выбранной системой, например, Cosmos Motion. При удовлетворительных результатах, т.е. когда

$$\frac{|x_{CM} - x_M|}{|x_A|} \leq \varepsilon, \quad \frac{|x_{CM} - x_A|}{|x_A|} \leq \varepsilon, \quad (21)$$

где  $x_{CM}, x_M, x_A$  – компоненты решения  $x_1, x_2$ , определяемые в среде Cosmos Motion, Maple и при аналитических вычислениях соответственно, а  $\varepsilon$  – допустимая погрешность. В дальнейшем можно использовать именно систему Cosmos Motion для моделирования динамики исследуемых многомассовых систем.

III. *Трехмассовая система.* Для этой системы (см. рис. 3) уравнения движения

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) = F_{\text{имп}}(t); \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) + c_3 (x_2 - x_3) = 0; \\ m_3 \ddot{x}_3 + c_3 (x_3 - x_2) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Для исследования этой системы применяется численное интегрирование в системах Maple и Cosmos Motion. Предварительная оценка собственных частот проводится по корням характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 - m_2 \omega^2 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 - m_3 \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

## Результаты расчетов

I. *Одномассовая система.* На рис. 5 представлена амплитудно-частотная

характеристика одномассовой системы [3, 4]. На рис. 6-10 – характер динамических процессов в системе при  $\alpha_1 \in \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 5,0\}$ . Интегрирование ведется при нулевых начальных условиях. Масса  $m_1 = 15960$  кг, жесткость  $c_1 = 5,28 \cdot 10^6$  Н/м, вязкость 12768 (Н·с)/м, амплитуда силы  $A = 2 \cdot 10^6$  Н.

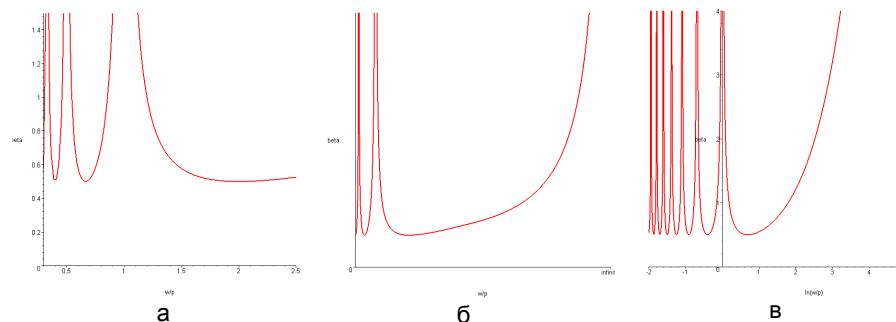


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика одномассовой системы. Коэффициент влияния повторности импульсов как функция относительной частоты действия импульсов (масштаб полулогарифмический): а –  $0 < \omega/p < 2,5$ ; б –  $0 < \omega/p < \infty$ ; в –  $-e^{-2} < \omega/p < e^5$

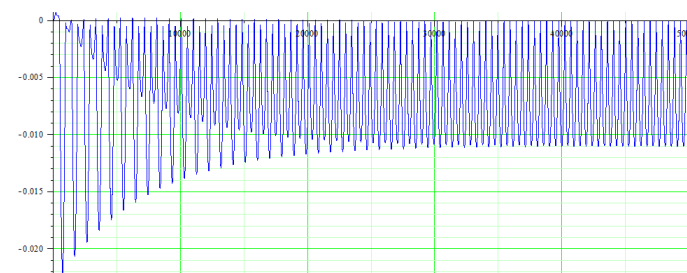


Рис. 6. Динамический процесс в одномассовой системе при  $\alpha_1 = 0,5$

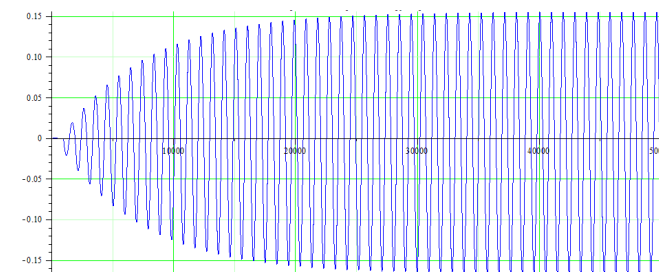


Рис. 7. Динамический процесс в одномассовой системе при  $\alpha_1 = 1,0$

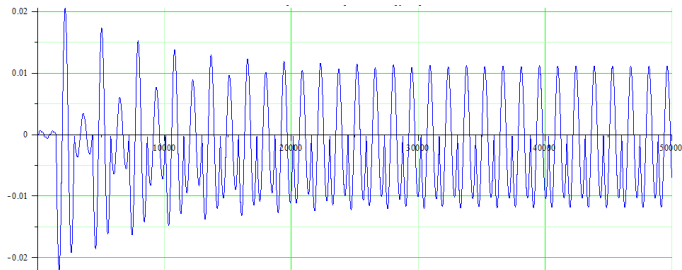


Рис. 8. Динамический процесс в одномассовой системе при  $\alpha_1 = 1,5$

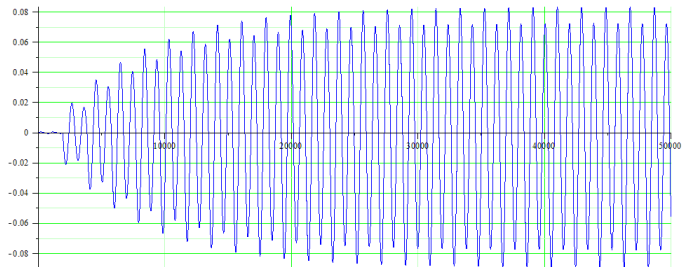


Рис. 9. Динамический процесс в одномассовой системе при  $\alpha_1 = 2,0$

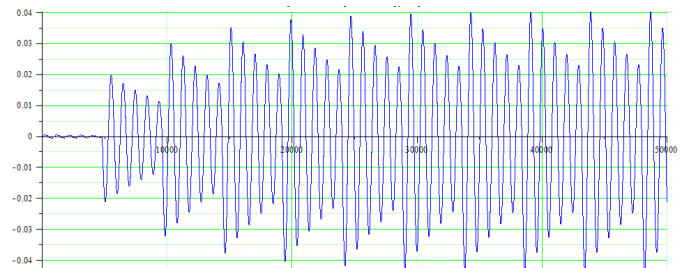


Рис. 10. Динамический процесс в одномассовой системе при  $\alpha_1 = 5,0$

Видно, что при  $\alpha_1 \in \{1,0; 2,0; 5,0\}$  наблюдается резкое возрастание амплитуд колебаний в исследуемой системе. Этого не наблюдается при  $\alpha_1 \in \{0,5; 1,5; \}$ . Кроме того, амплитуда колебаний выше на основной частоте, а затем с ростом коэффициента кратности уменьшается. Таким образом, полученные численные результаты коррелируют с результатами аналитических исследований.

II. *Двухмассовая система.* На рис. 11 представлены зависимости  $\lambda_{1,2}$  при варьировании  $m_2/m_1 \in \{0,1; 0,5; 1,0\}$  и  $c_2/c_1 \in \{1; 2; 10\}$ . Для конкретного случая  $m_2 = 0,5m_1$ ,  $c_2 = 10c_1$  проведено исследование динамики системы (анало-

гично (13)  $T^* = \alpha_2 T_{21}$ ) в диапазоне  $\alpha_2 \in \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 5,0\}$ . Результаты приведены на рис. 12-16.

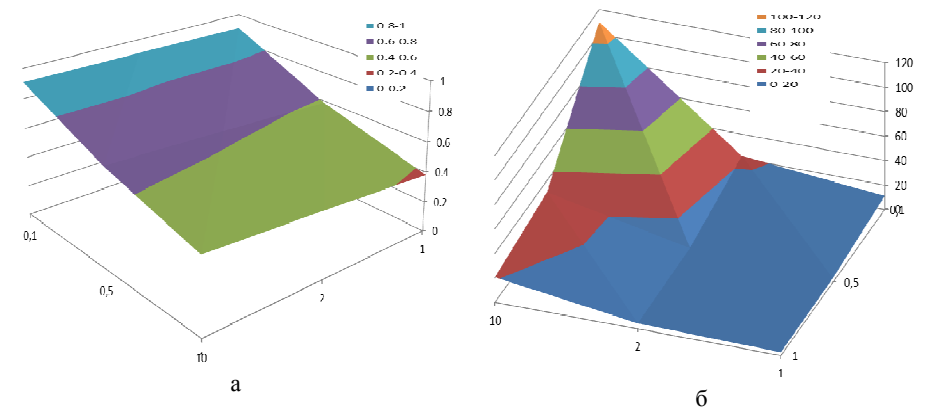


Рис. 11. Зависимости  $\lambda_{1,2}$  при варьировании  $m_2/m_1$  и  $c_2/c_1$ : а –  $\lambda_1$ ; б –  $\lambda_2$

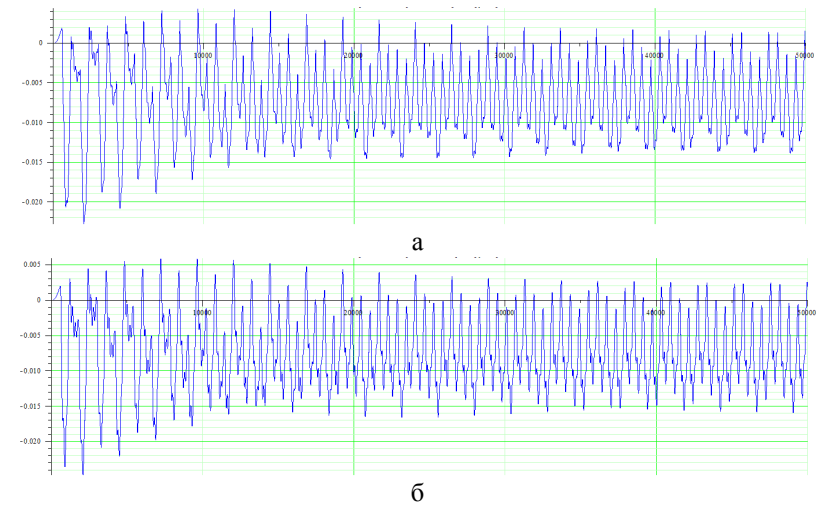
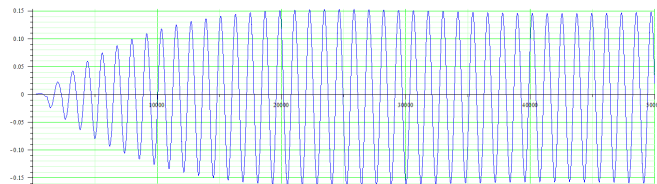
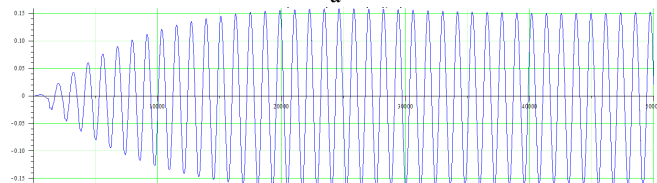


Рис. 12. Динамический процесс в двухмассовой системе при  $\alpha_2 = 0,5$ : а – тело 1; б – тело 2

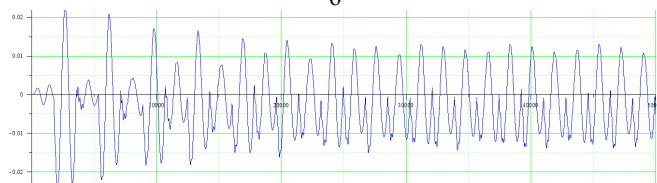
Видно, что в этой системе наблюдаются ударные резонансы, обусловленные в том числе измененными динамическими свойствами, добавленными при присоединении второй массы к исходной одномассовой системе. Поскольку вторая собственная частота намного выше первой, то движение тела 2 практически синхронизировано с движением тела 1.



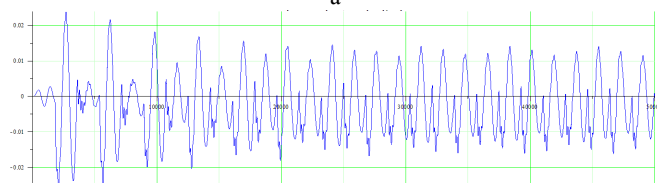
а



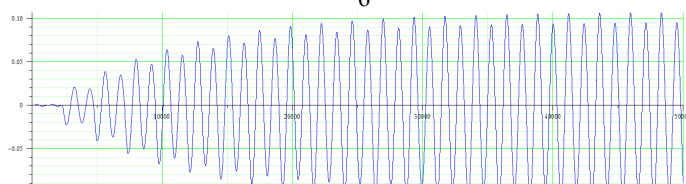
б



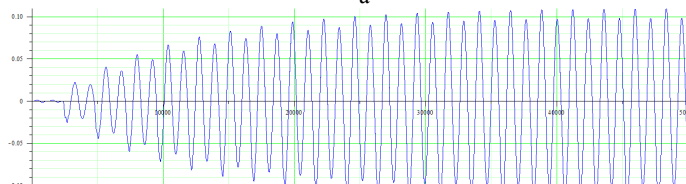
а



б



а

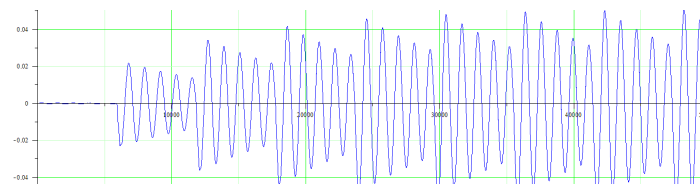


б

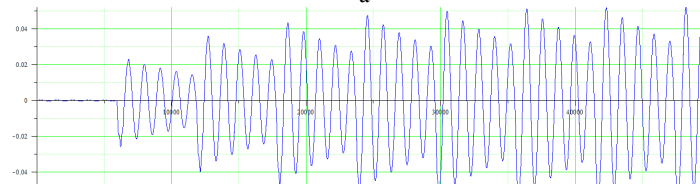
Рис. 13.  
Динамический процесс в двухмассовой системе при  $\alpha_2 = 1,0$ :  
а – тело 1;  
б – тело 2

Рис. 14.  
Динамический процесс в двухмассовой системе при  $\alpha_2 = 1,5$ :  
а – тело 1;  
б – тело 2

Рис. 15.  
Динамический процесс в двухмассовой системе при  $\alpha_2 = 2,0$ :  
а – тело 1;  
б – тело 2



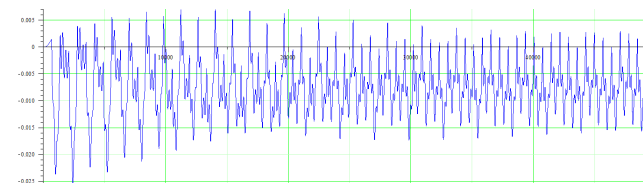
а



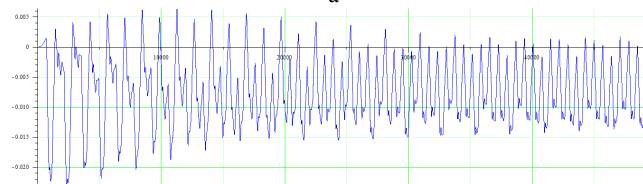
б

Рис. 16. Динамический процесс в двухмассовой системе при  $\alpha_2 = 5,0$ :  
а – тело 1;  
б – тело 2

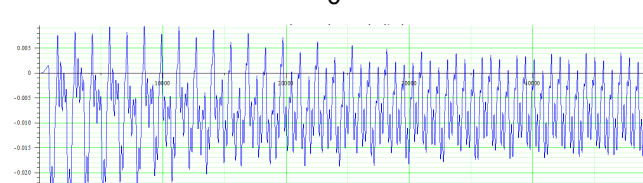
III. *Трехмассовая система.* В данном случае принципиальных отличий в поведении системы по сравнению с двухмассовой не наблюдается. В связи с этим для конкретного случая  $m_2 = m_3 = 0,5m_1, c_2 = c_3 = 10c_1$  проведено исследование динамики в диапазоне  $\alpha_3 \in \{0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 5,0\}$  ( $T^* = \alpha_3 T_{31}$ ). На рис. 17-21 представлены соответствующие результаты исследований. Видно, что ударный резонанс достигается как на второй, так и на третьей массе.



а



б



в

Рис. 17.  
Динамический процесс в трехмассовой системе при  $\alpha_3 = 0,5$ :  
а – тело 1;  
б – тело 2;  
в – тело 3

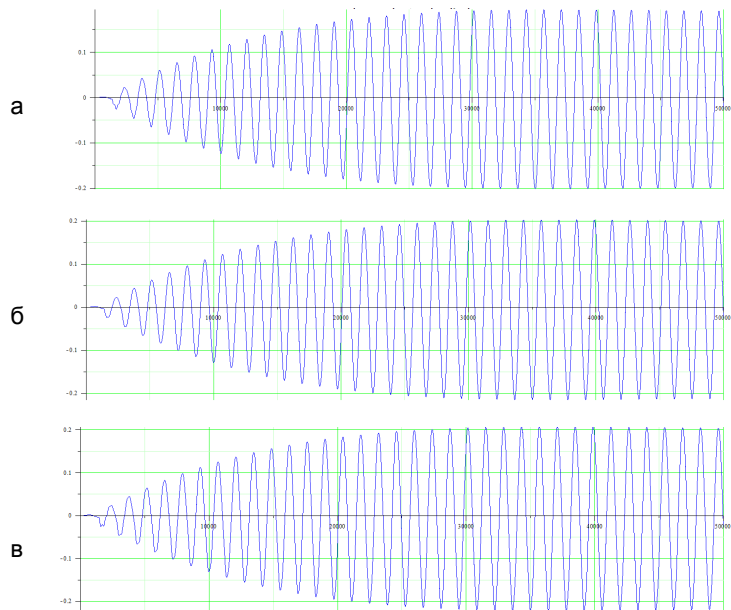


Рис. 18. Динамический процесс в трехмассовой системе при  $\alpha_3 = 1,0$ :  
а – тело 1;  
б – тело 2;  
в – тело 3

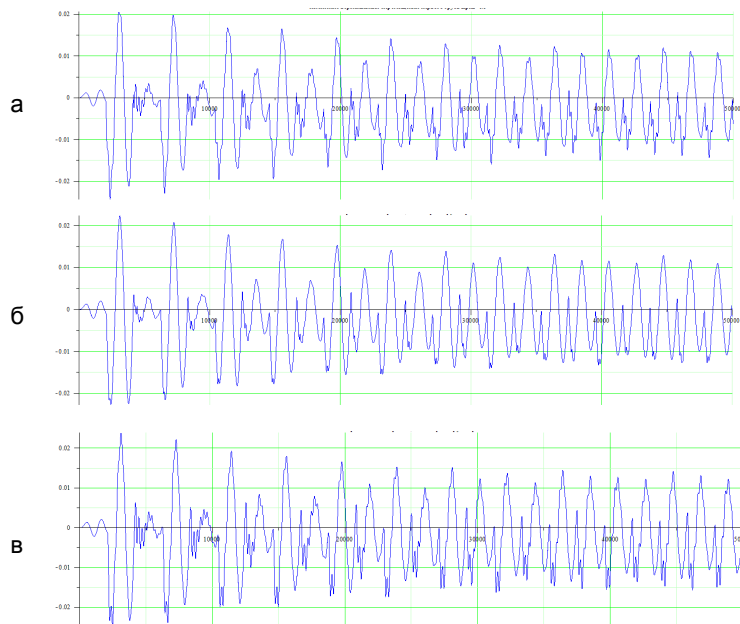


Рис. 19. Динамический процесс в трехмассовой системе при  $\alpha_3 = 1,5$ :  
а – тело 1;  
б – тело 2;  
в – тело 3

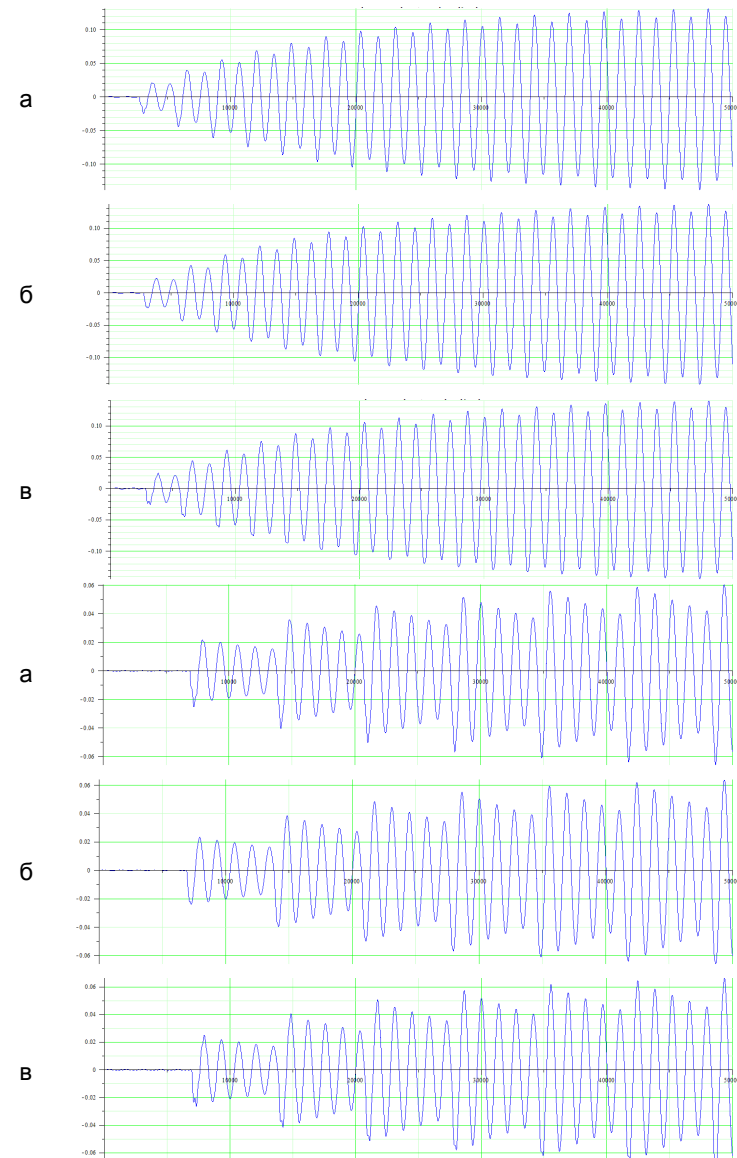


Рис. 20. Динамический процесс в трехмассовой системе при  $\alpha_3 = 2,0$ :  
а – тело 1;  
б – тело 2;  
в – тело 3

Рис. 21. Динамический процесс в трехмассовой системе при  $\alpha_3 = 5,0$ :  
а – тело 1;  
б – тело 2;  
в – тело 3

**Околорезонансные режимы.** Резонансные режимы в системе с конечным числом степеней свободы соответствуют точной кратности собственных частот частоте возбуждающей силы. Естественно, что при нарушении кратности процесс в исследуемой системе изменяется. Отследить это влияние можно, проварьировав частоту внешнего воздействия. На рис. 22-25 представлены

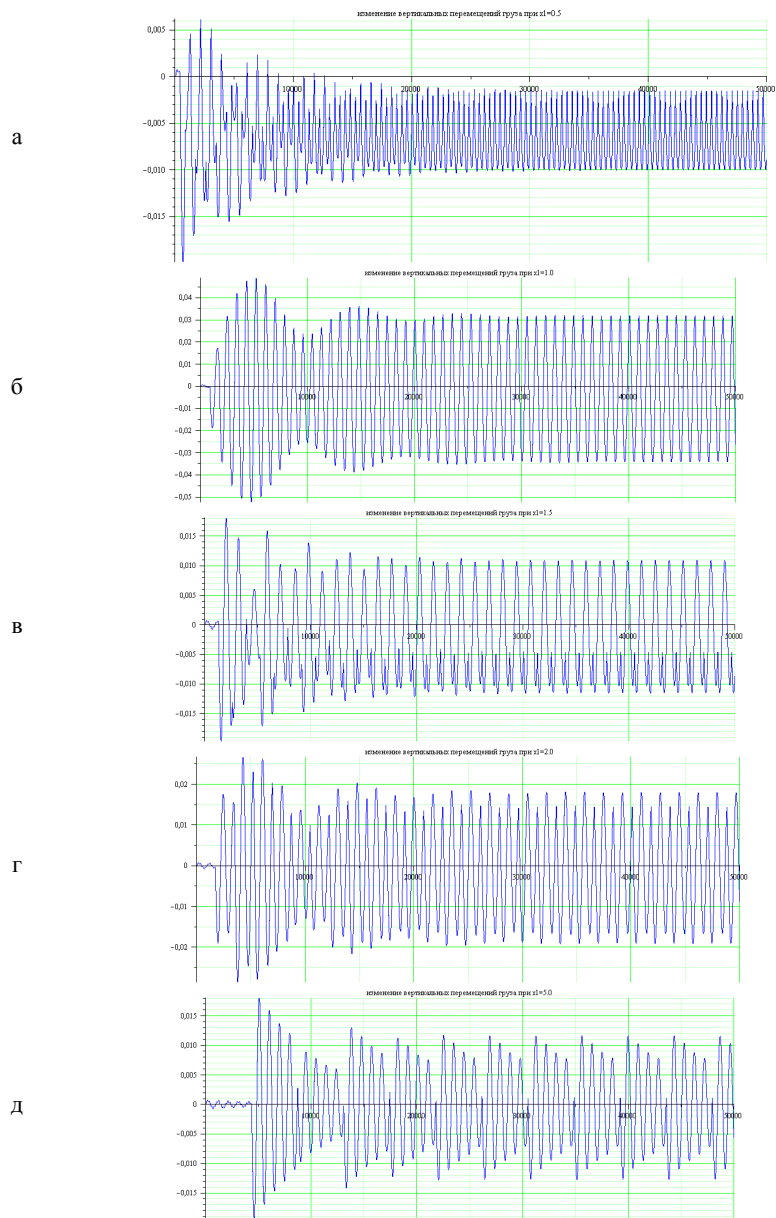


Рис. 22. Динамический процесс в одномассовой системе при:  
 а –  $\alpha_1 = 0,5+10\%$ ; б –  $\alpha_1 = 1,0+10\%$ ; в –  $\alpha_1 = 1,5+10\%$ ;  
 г –  $\alpha_1 = 2,0+10\%$ ; д –  $\alpha_1 = 5,0+10\%$

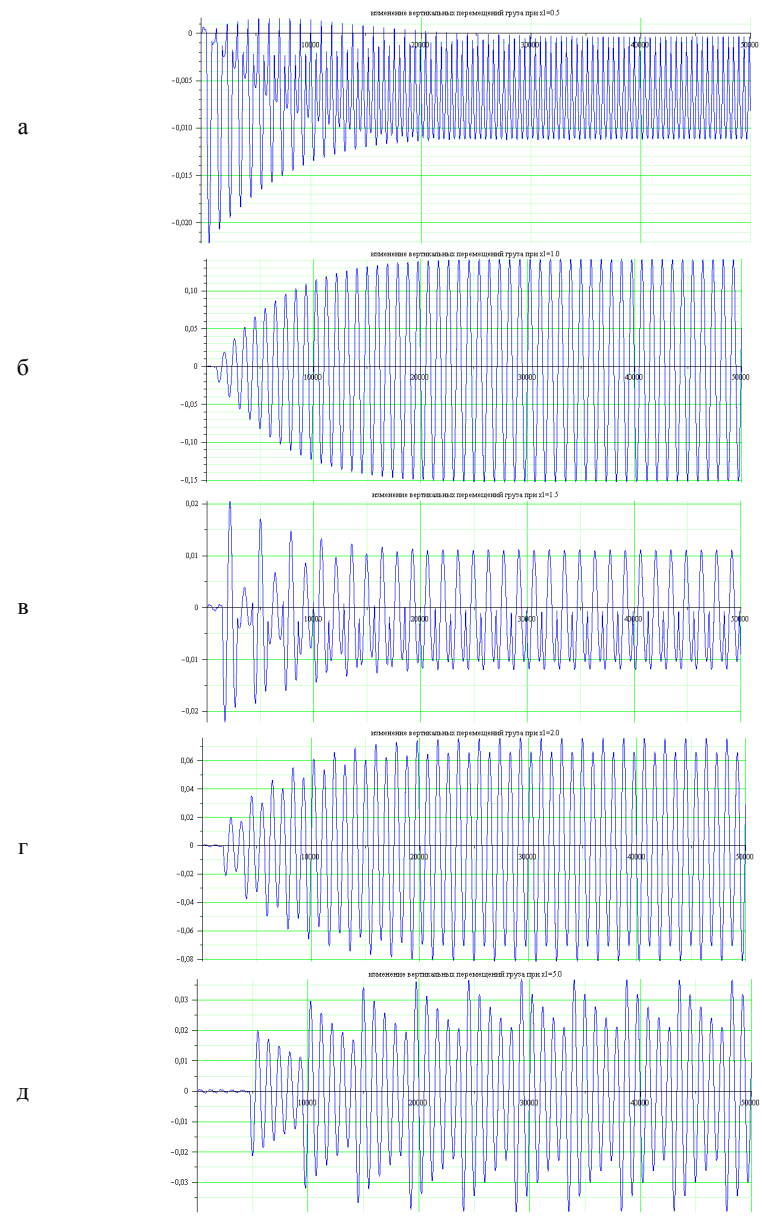
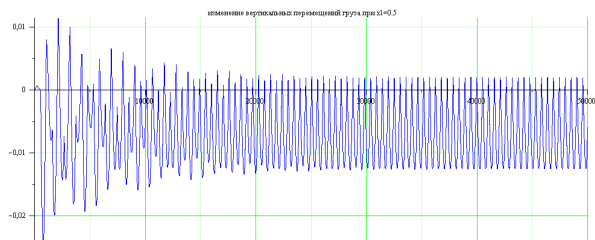
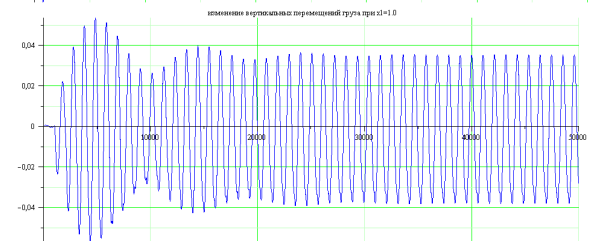


Рис. 23. Динамический процесс в одномассовой системе при:  
 а –  $\alpha_1 = 0,5+1\%$ ; б –  $\alpha_1 = 1,0+1\%$ ; в –  $\alpha_1 = 1,5+1\%$ ; г –  $\alpha_1 = 2,0+10\%$ ; д –  $\alpha_1 = 5,0+1\%$

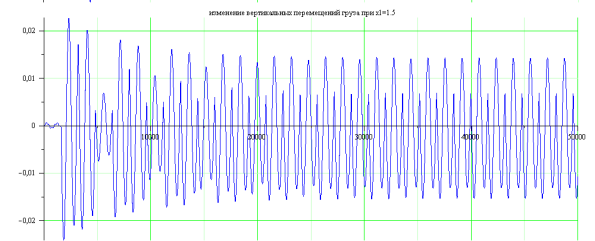
а



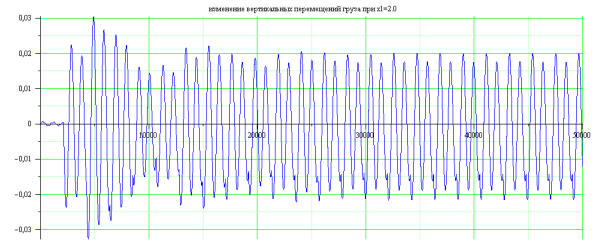
б



в



г



д

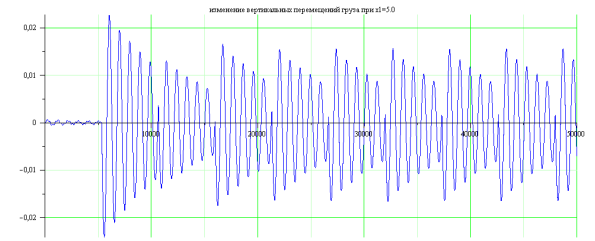
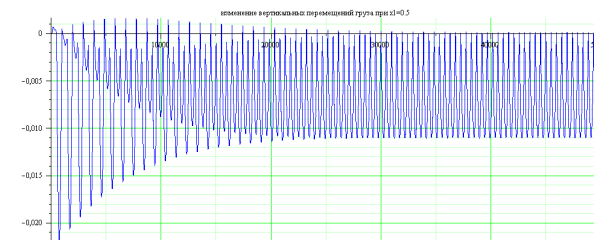
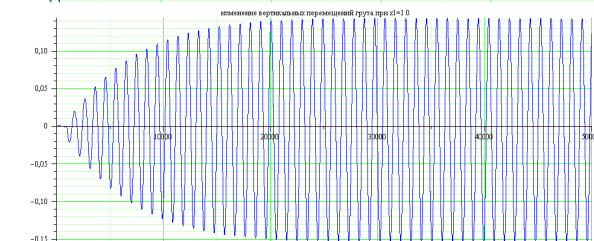


Рис. 24. Динамический процесс в одномассовой системе при:  
 а -  $\alpha_1 = 0,5-10\%$ ; б -  $\alpha_1 = 1,0-10\%$ ; в -  $\alpha_1 = 1,5-10\%$ ;  
 г -  $\alpha_1 = 2,0-10\%$ ; д -  $\alpha_1 = 5,0-10\%$

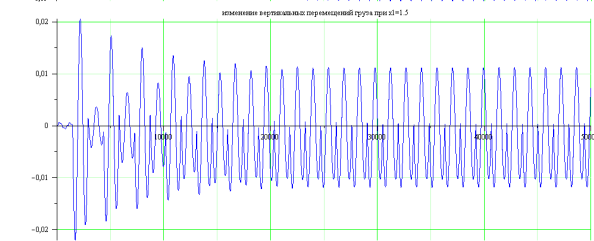
а



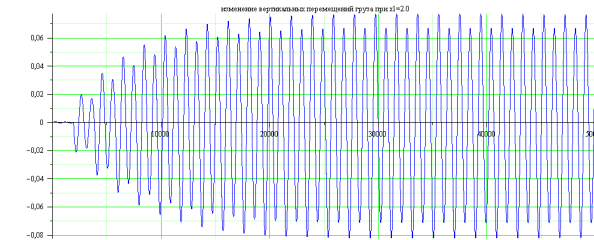
б



в



г



д



Рис. 25. Динамический процесс в одномассовой системе при:  
 а -  $\alpha_1 = 0,5-1\%$ ; б -  $\alpha_1 = 1,0-1\%$ ; в -  $\alpha_1 = 1,5-1\%$ ; г -  $\alpha_1 = 2,0-1\%$ ; д -  $\alpha_1 = 5,0-1\%$



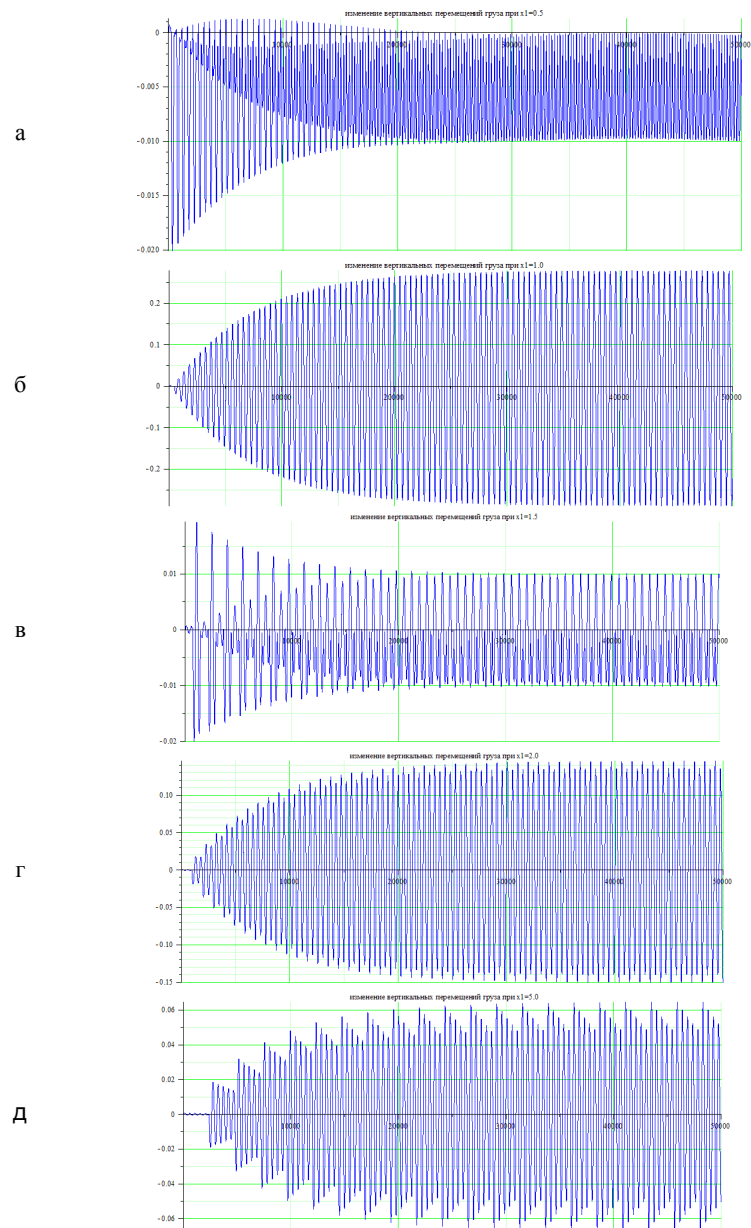


Рис. 26. Динамический процесс в одномассовой системе при уменьшенном коэффициенте вязкого трения в 2 раза:  
 а –  $\alpha_1 = 0,5$ ; б –  $\alpha_1 = 1,0$ ; в –  $\alpha_1 = 1,5$ ; г –  $\alpha_1 = 2,0$ ; д –  $\alpha_1 = 5,0$

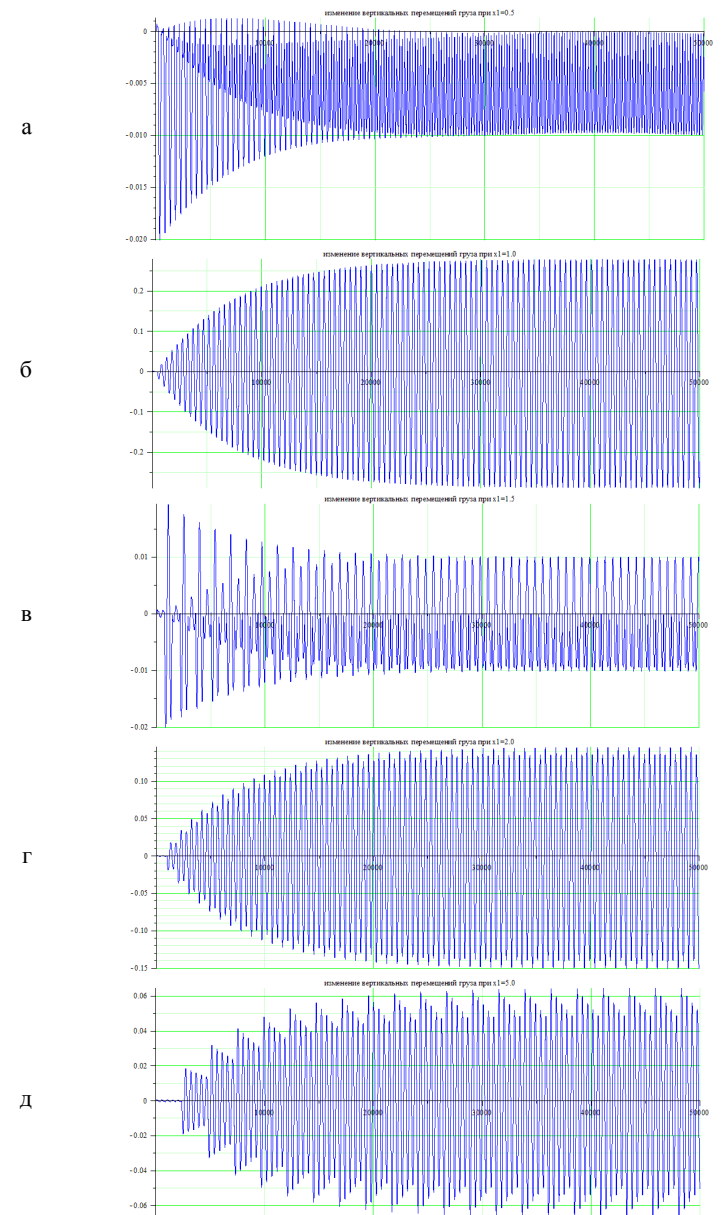


Рис. 27. Динамический процесс в одномассовой системе при увеличенном коэффициенте вязкого трения в 2 раза:  
 а –  $\alpha_1 = 0,5$ ; б –  $\alpha_1 = 1,0$ ; в –  $\alpha_1 = 1,5$ ; г –  $\alpha_1 = 2,0$ ; д –  $\alpha_1 = 5,0$

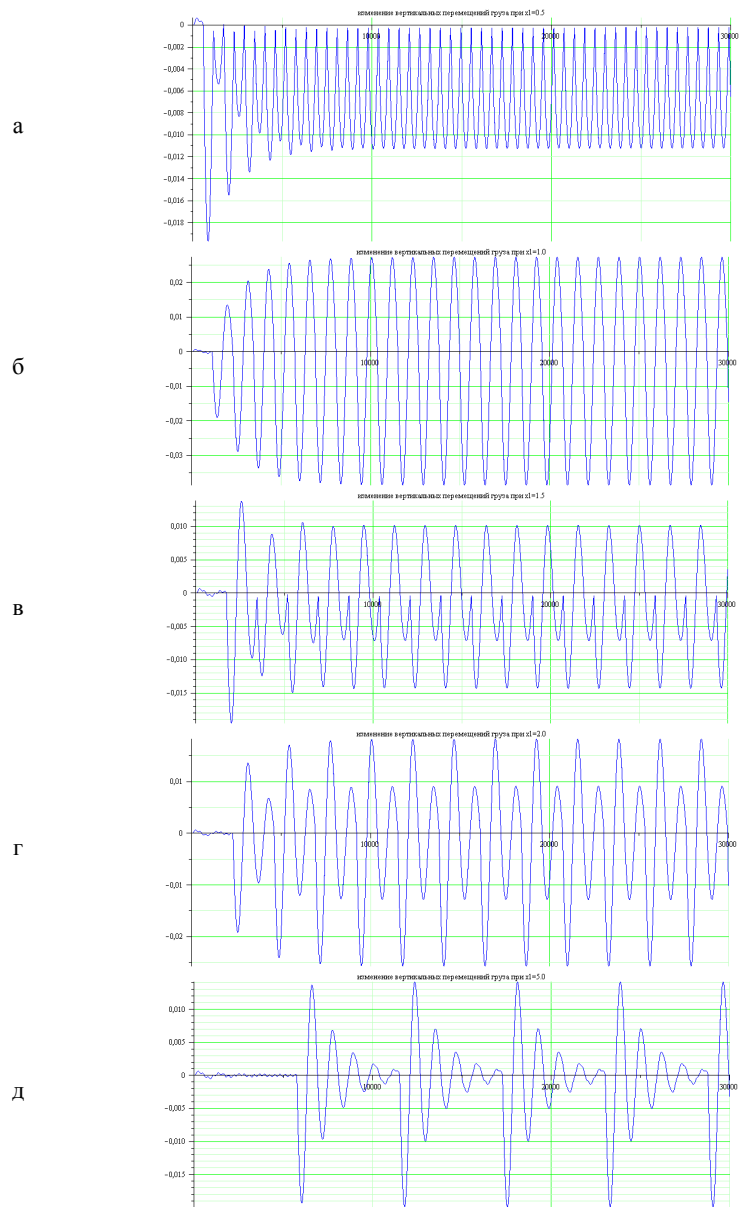


Рис. 28. Динамический процесс в одномассовой системе при Увеличенном коэффициенте вязкого трения в 5 раз:  
 а -  $\alpha_1 = 0,5$ ; б -  $\alpha_1 = 1,0$ ; в -  $\alpha_1 = 1,5$ ; г -  $\alpha_1 = 2,0$ ; д -  $\alpha_1 = 5,0$

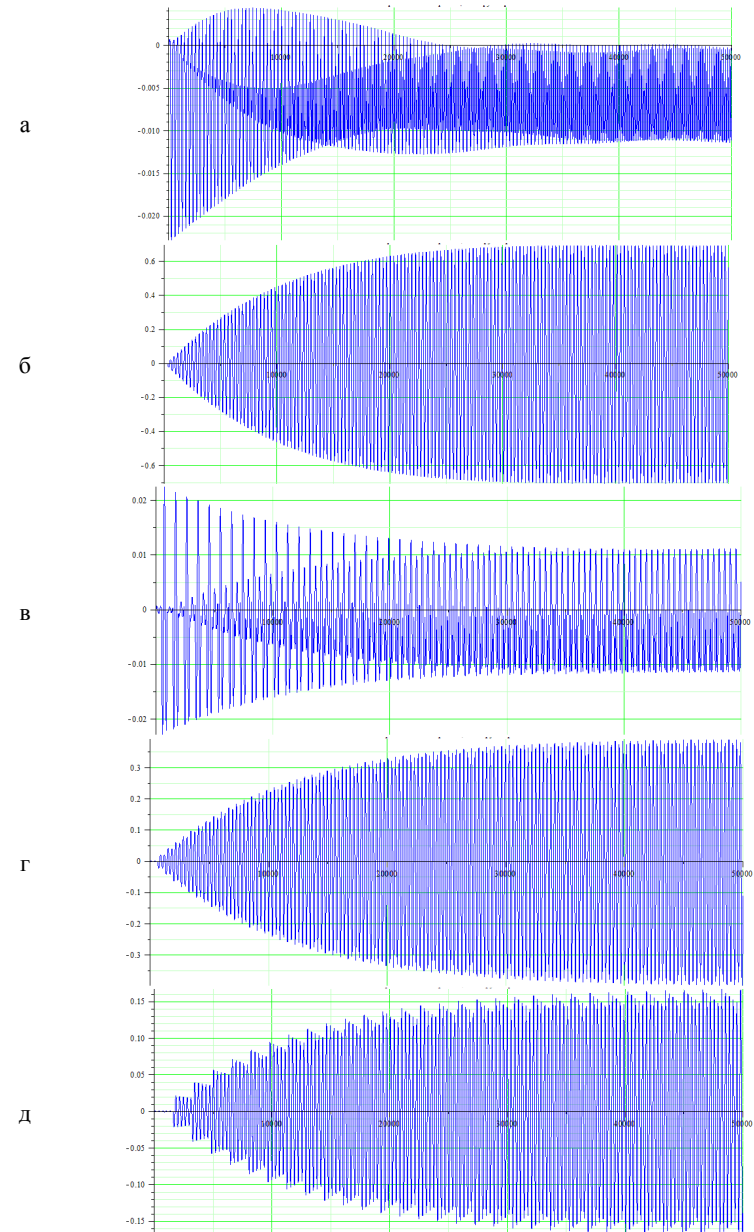


Рис. 29. Динамический процесс в одномассовой системе при уменьшенном коэффициенте вязкого трения в 5 раз:  
 а -  $\alpha_1 = 0,5$ ; б -  $\alpha_1 = 1,0$ ; в -  $\alpha_1 = 1,5$ ; г -  $\alpha_1 = 2,0$ ; д -  $\alpha_1 = 5,0$

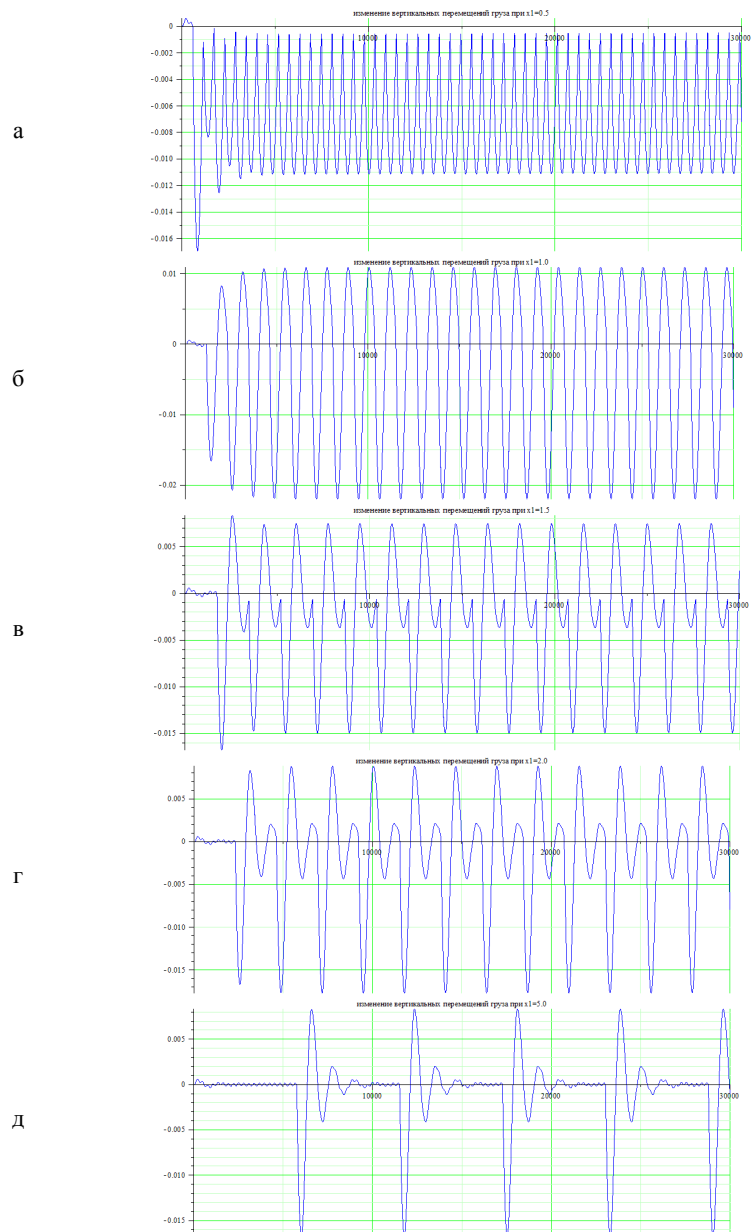


Рис. 30. Динамический процесс в одномассовой системе при увеличенном коэффициенте вязкого трения в 10 раз:  
 а –  $\alpha_1 = 0,5$ ; б –  $\alpha_1 = 1,0$ ; в –  $\alpha_1 = 1,5$ ; г –  $\alpha_1 = 2,0$ ; д –  $\alpha_1 = 5,0$

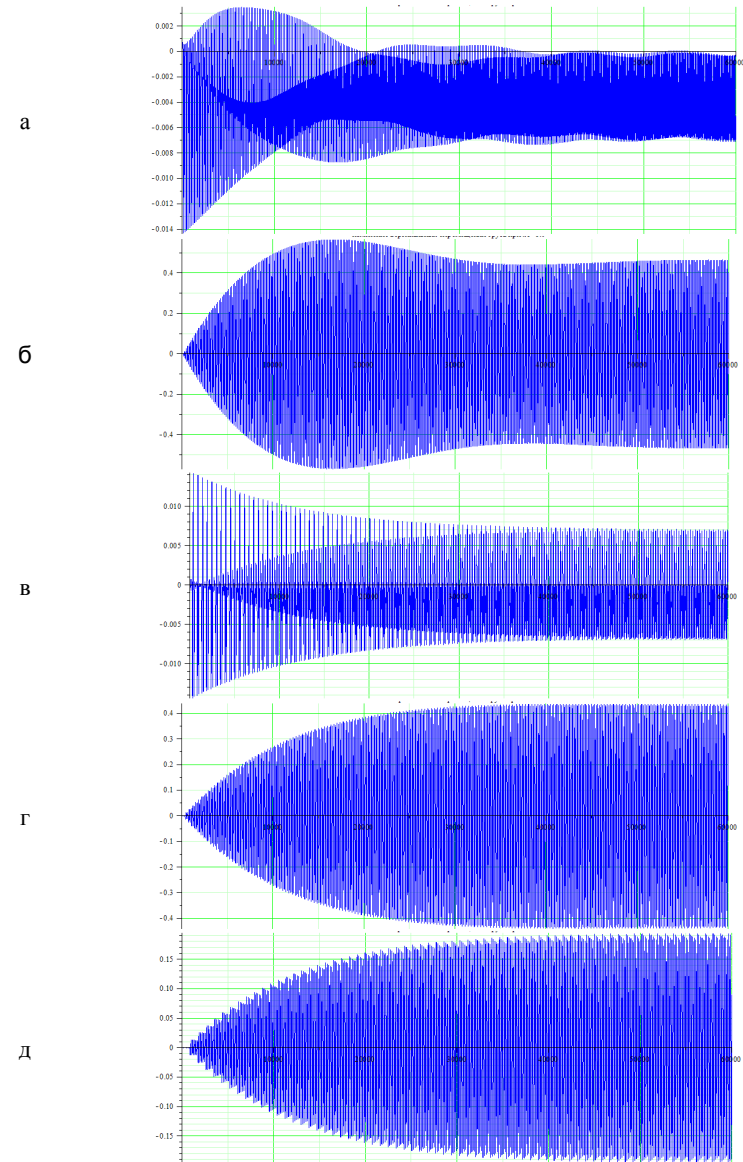


Рис. 31. Динамический процесс в одномассовой системе при уменьшенном коэффициенте вязкого трения в 10 раз:  
 а –  $\alpha_1 = 0,5$ ; б –  $\alpha_1 = 1,0$ ; в –  $\alpha_1 = 1,5$ ; г –  $\alpha_1 = 2,0$ ; д –  $\alpha_1 = 5,0$

временные распределения перемещения одномассовой системы при варьировании на  $\pm 1\%$ ,  $\pm 10\%$  частоты возбуждения от кратной резонансной. Видно, что отстройка частоты от резонансной уже на 10% приводит к качественно иному поведению системы. При этом количественно это выражается в снижении амплитуды в несколько раз. Таким образом, для отстройки от ударного резонанса достаточно незначительного изменения частоты внешнего возмущения (или собственных частот конструкции машины).

**Влияние вязкого трения.** Вязкое трение в виброударной системе является фактором, сдерживающим рост амплитуды вынужденных колебаний. При этом данное влияние тем сильнее, чем выше коэффициент демпфирования (рис. 26-31).

Отсюда можно сделать вывод, что наряду с отстройкой от резонансных частот эффективным средством гашения колебаний при ударном полиимпульсном возбуждении является введение вязкого трения.

**Заключение.** Анализ представленных материалов дает основание для следующих выводов.

1. Для исследования ударного резонанса в динамических системах предложено использование комплексного подхода, сочетающего аналитические вычисления, численное интегрирование уравнений движения и моделирование в САЕ-пакетах. Продемонстрировано, что все три способа обеспечивают адекватное моделирование и точное определение условий нагружения для достижения ударного резонанса, в связи с чем можно констатировать, что в зависимости от особенностей исследуемой системы или задачи можно применять любой из способов или их комбинацию.

2. Ударный резонанс в системе может реализовываться при условии кратности периода возбуждения к любой из собственных частот колебаний.

3. При наличии близко расположенных собственных частот колебаний опасность возникновения ударного резонанса резко возрастает.

Полученные результаты могут быть распространены и на дискретно-континуальные системы. Действительно, после проведения процедуры дискретизации любой конструкции получается система с конечным, хотя, быть может, и очень большим числом степеней свободы, а для нее справедливы все обнаруженные и описанные в данной работе особенности.

Применение предложенных подходов к исследованию ударного резонанса в более сложных системах является направлением дальнейших исследований.

**Список литературы:** 1. Горский А.И. Расчет машин и механизмов автоматических линий литейного производства / А.И. Горский. – М. Машиностроение, 1978. – 552 с. 2. Грабовский А.В. Ударное взаимодействие и динамические процессы в виброударных машинах с частичным разрушением технологического груза: дис... кандидата техн. наук: 05.02.09 / Грабовский Андрей Владимирович. – Харків, 2010. – 181 с. 3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1977. – 224 с. 4. Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1979. – 384 с. 5. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулдер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

*Поступила в редколлегию 02.06.2011*