

**В. Н. СТРЕЛЬНИКОВ**, д-р техн. наук, гл. инженер проекта ПАО НКМЗ, Краматорск,  
**Ю.В. СТРЕЛЬНИКОВ**, аспирант каф. машиноведения ВНУ им. Даля, Луганск

**ПОЛУЧЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ КОМПОНЕНТАМ ВЕКТОРА СМЕЩЕНИЯ РОЛИКА ПЕРЕДАЧИ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ**

*Отримані рівняння пружності задовольняють компонентам вектора зміщення, що визначає напружено - деформований стан порожнистого циліндричного ролика – проміжного елемента передачі зацеплення. Отримані дифференціальні рівняння також використовуються для вирішення контактної задачі опукло – ввігнутих поверхонь близької кривизни.*

*Полученные уравнения упругости удовлетворяют компонентам вектора смещения, определяющего напряженно-деформированное состояние полого цилиндрического ролика – промежуточного элемента передач зацепления. Полученные дифференциальные уравнения также используются для решения контактной задачи выпукло-вогнутых поверхностей близкой кривизны.*

*The elasticity equations satisfying to components of the displacement vector defining tensely - the deformed condition of a hollow cylindrical roller - an intermediate element of transmissions are received by linkage. The received differential equations also are used at the decision of a contact problem is convex - concave surfaces of close curvature.*

**Введение.** В передачах с промежуточными телами качения используются ролики, представляющие либо однослойную, либо многослойную конструкцию, собранную из коаксиально расположенных оболочек. Поперечное сечение ролика представляет кольцевую область. Дуга внешней окружности нагружена контактными усилиями. Условия контакта определяются смещениями точек дуги внешней окружности, которые зависят от действующей нагрузки. Связь между перемещениями и нагрузкой устанавливается в результате решения системы дифференциальных уравнений, описывающих деформированное состояние оболочки под действием нагрузки.

Целью исследований является получение системы дифференциальных уравнений упругости, которым удовлетворяют компоненты вектора смещения полого цилиндрического ролика, служащего промежуточным элементом для передачи зацеплением.

**Содержание работы.** Общая теория тонких оболочек строится на основании гипотез, которые устанавливаются с учетом геометрии оболочки: толщина оболочки мала по сравнению с другими ее размерами. Исходя из допущений [1, 2]:

1. Линии, нормальные к срединной поверхности до деформации, преобразуются в прямые линии, нормальные к деформированной срединной поверхности.
2. Компоненты напряжений, направленные по нормали к срединной по-

верхности, малы по сравнению с другими составляющими напряжений.

На основании первой гипотезы положение любой точки, принадлежащей оболочке, задается через положение точки на срединной поверхности и ее положением на нормали к срединной поверхности, определяем координатой  $Z$ . На срединной поверхности положение точки задаем криволинейными координатами  $\xi_1, \xi_2$ . В качестве координатных линий выбираем параметризованные линии кривизны. Линии кривизны образуют на поверхности ортогональную координатную сеть. Если срединной поверхностью является прямой круговой цилиндр радиуса  $a$ , то координатные линии получим, пересекая поверхность плоскостями,

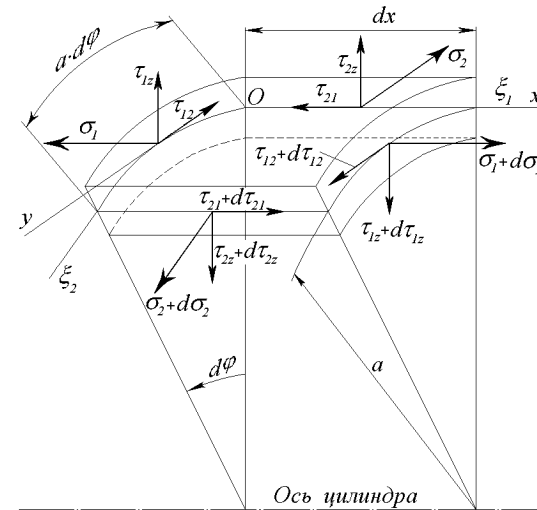


Рис. 1. Распределение внутренних сил в элементе цилиндрической оболочки

перпендикулярными оси цилиндра, и плоскостями, проходящими через его ось. Координатными линиями будут окружности и образующие цилиндра. В качестве координат примем  $\xi_1 = x, \xi_2 = \varphi$ .

Исследуем распределение внутренних сил. Выделим элемент оболочки, ограниченный поверхностями  $x = const, x + dx = const, \varphi = const, \varphi + d\varphi = const, z = \pm 0,5h$ , где  $h$  – толщина оболочки (рис. 1). Координатная линия  $\xi_1$  — прямолинейная и совпадает с осью  $X$ ,

координатная линия  $\xi_2$  – окружность, ось  $Y$  направлена по касательной к ней. Радиусы кривизны координатных линий равны  $R_1 = \infty, R_2 = a$ . По плоским граням элемента действуют нормальные и касательные напряжения.

Введем усилия, отнесенные к единице длины координатных линий срединной поверхности. Для этого напряжения, распределенные по плоским граням элемента, суммируем по толщине оболочки

$$\begin{cases} N_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 (1 - \frac{Z}{a}) dZ; & N_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 dZ; & N_{1,2} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{1,2} (1 - \frac{Z}{a}) dZ; \\ N_{2,1} = \int \tau_{2,1} dZ; & Q_1 = \int \tau_{1z} (1 - \frac{Z}{a}) dZ; & Q_2 = \int \tau_{2z} dZ. \end{cases} \quad (1)$$

Составим выражения для изгибающих и крутящих моментов

$$\begin{cases} M_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 \left(1 - \frac{Z}{a}\right) Z dZ, & M_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_2 Z dZ, \\ M_{1;2} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{1,2} \left(1 - \frac{Z}{a}\right) Z dZ, & M_{2;1} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{2,1} Z dZ. \end{cases} \quad (2)$$

Знак (-) перед интегралом для  $M_{1,2}$  поставлен потому, что при положительных  $\tau_{1,2}$  и  $z$  моменты  $M_{1,2}$  направлены по часовой стрелке и берутся со знаком минус.

Рассмотрим равновесие двумерного элемента оболочки, вырезанного из срединной поверхности (рис. 2).

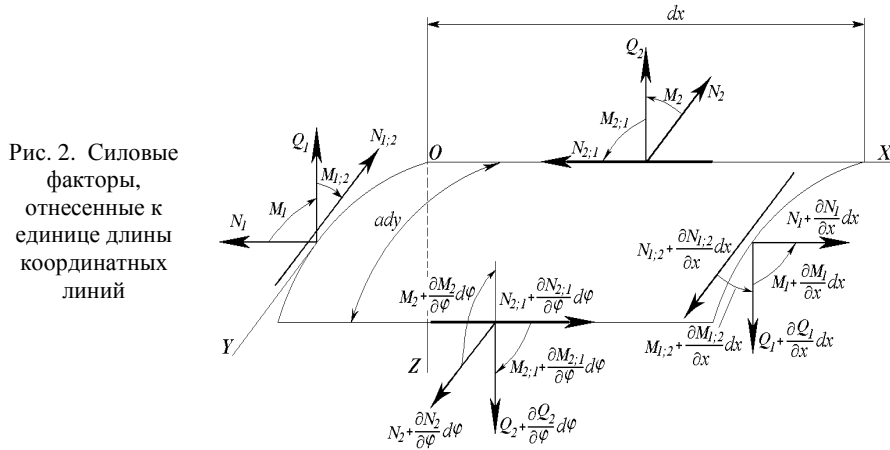
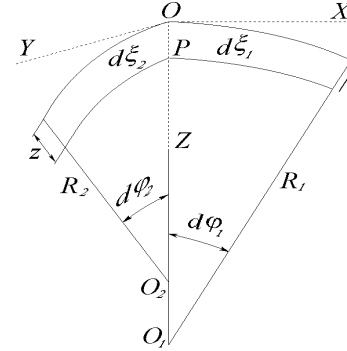


Рис. 2. Силовые факторы, отнесенные к единице длины координатных линий

На рис. 2 момент  $M_{1,2}$  показан положительным. Тогда в силу закона парности касательных напряжений момент  $M_{2,1}$  надо показать отрицательным: при взгляде с положительного направления оси  $Y$  вращение видим по часовой стрелке. Чтобы привести формулу для  $M_{2,1}$  в соответствие с направлением, показанным на рисунке, ставим перед интегралом знак (-). В соответствии с направлениями сил и моментов (рис. 2) составляем уравнения равновесия для элемента оболочки

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{2,1}}{\partial \varphi} + P_1 &= 0, & \frac{\partial N_{1,2}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} - \frac{Q_2}{a} + P_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{a} N_2 + P(x, \varphi) &= 0, & \frac{\partial M_{1,2}}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + Q_2 &= 0, \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_{2,1}}{\partial \varphi} - Q_1 &= 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Определение компонент тензора деформации рассмотрим в общем виде. Пусть срединной поверхности соответствует сетка координатных линий, которыми являются линии кривизны. Запишем линейный элемент срединной поверхности оболочки



$$dS^2 = \alpha_1^2 d\xi_1^2 + \alpha_2^2 d\xi_2^2. \quad (4)$$

Дугам координатных линий, которыми являются линии кривизны, соответствуют центральные углы  $d\varphi_1, d\varphi_2$ , проведенные из центров кривизны

$$d\varphi_1 = \frac{\alpha_1 d\xi_1}{R_1}, \quad d\varphi_2 = \frac{\alpha_2 d\xi_2}{R_2}. \quad (5)$$

Рис. 3. К расчету элемента длины координатной линии, эквидистантной поверхности оболочки

Найдем элемент длины соответствующей эквидистантной поверхности на расстоянии от координатной поверхности (рис. 3)

$$dS^2 = \alpha_1^2 \left( \frac{R_1 - Z}{R_1} \right)^2 d\xi_1^2 + \alpha_2^2 \left( \frac{R_2 - Z}{R_2} \right)^2 d\xi_2^2 + dZ^2. \quad (6)$$

Делается допущение, что компоненты напряжений, направленные по нормали к срединной поверхности, малы и их можно не учитывать [3].

По закону Гука получим

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)} [(\epsilon_{10} + \nu\epsilon_{20}) - Z(\chi_1 + \nu\chi_2)], \\ \sigma_2 = \frac{E}{(1-\nu^2)} [(\epsilon_{20} + \nu\epsilon_{10}) - Z(\chi_2 + \nu\chi_1)], \\ \tau_{1,2} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\gamma_0 - 2Z\chi_{1,2}). \end{cases} \quad (7)$$

При расчете усилий пренебрегаем малыми по сравнению с единицей слагаемыми  $\frac{Z}{R_1}$  и  $\frac{Z}{R_2}$ . Тогда

$$N_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 dZ = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{10} + \nu\epsilon_{20}), \quad N_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_2 dZ = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{20} + \nu\epsilon_{10}),$$

$$\begin{aligned}
N_{1,2} = N_{2,1} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{1,2} dZ = \frac{Eh\gamma_0}{2(1+\nu)} (\varepsilon_{10} + \nu\varepsilon_{20}), \\
M_1 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 Z dZ = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E}{(1-\nu^2)} [(\varepsilon_{10} + \nu\varepsilon_{20}) - Z(\chi_1 + \nu\chi_2)] Z dZ = -D(\chi_1 + \nu\chi_2), \\
M_2 &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_2 Z dZ = -D(\chi_{21} + \nu\chi_1), \\
M_{1,2} = M_{2,1} &= - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{1,2} Z dZ = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \chi_{1,2} = D(1-\nu)\chi_{1,2}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Найдем силовые факторы для круговой цилиндрической оболочки. Полагаем  $U_{1,0} = U$ ,  $U_{2,0} = \nu$ . Так как  $dS^2 = dx^2 + a^2 d\varphi^2$ , то  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = a$ .

Для координатных линий цилиндрической системы координат получим

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_{10} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_{20} = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} - w \right), \quad \gamma_0 = a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\nu}{a} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (U) = \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial \nu}{\partial x}, \\
\chi_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_2 = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad \chi_{1,2} = \frac{1}{2a} \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x}.
\end{aligned} \right\} \tag{9}$$

Подставим значения  $\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}, \gamma_0, \chi_1, \chi_2$  из формул (9) в выражения (8) для  $N_1, N_2, N_{1,2}, M_1, M_2, M_{1,2}$ . Обозначим  $N_1 = N_x, N_2 = N_\varphi, N_{1,2} = N_{x,\varphi}$ ,  $M_1 = M_x, M_2 = M_\varphi, M_{1,2} = M_{x,\varphi}$ . После подстановки получим представление силовых факторов через деформации

$$\begin{aligned}
N_x &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{1}{a} \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} - \frac{w}{a} \right], \quad N_\varphi = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \left[ \frac{1}{a} \left( \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} - w \right) + \nu \frac{\partial U}{\partial x} \right], \\
N_{x\varphi} = N_{\varphi x} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right], \quad M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \left( \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\
M_\varphi &= -D \frac{1}{a^2} \left[ \left( \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \quad M_{x\varphi} = (1-\nu) D \left[ \frac{1}{2a} \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right].
\end{aligned} \tag{10}$$

Запишем уравнения равновесия, заменив цифровые индексы буквенными

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} + P_x &= 0, \quad \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{Q_\varphi}{a} + P_\varphi = 0, \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{a} N_\varphi + P_Z &= 0, \\
\frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + Q_\varphi &= 0, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} - Q_x = 0.
\end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Из последних двух уравнений системы (11) находим  $Q_\varphi$  и  $Q_x$

$$Q_\varphi = \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x}, \quad Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi}. \tag{12}$$

Подставим  $Q_\varphi$  и  $Q_x$  во второе и третье уравнения системы (11)

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{a} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} \right) + P_\varphi &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} \right) + \frac{1}{a} N_\varphi + P_Z &= 0.
\end{aligned} \right\} \tag{13}$$

После дифференцирования (13) получим систему уравнений, в которую включим также и первое уравнение системы (11)

$$\left\{ \begin{aligned}
a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} + a P_x &= 0, \\
a \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + a P_\varphi &= 0, \\
a \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{x\varphi}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + N_\varphi + a P_Z &= 0.
\end{aligned} \right. \tag{14}$$

В формулах (14) заменим силовые факторы через перемещения и их производные. Получим систему уравнений в перемещениях, описывающих деформированное состояние полого цилиндрического ролика

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\nu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{Eh} P_x = 0, \\
& \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \varphi} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{h^2}{12a^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} \right) + \\
& + \frac{h^2}{12a^2} \left( \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{1-\nu^2}{Eh} P_\varphi = 0, \\
& \nu \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{a} - \frac{h^2}{12} \left( a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{a} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) - \\
& - \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} \right) + a \frac{1-\nu^2}{Eh} P_z = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В случае передачи с промежуточными телами качения ролик можно рассматривать в виде длинной цилиндрической оболочки при  $P_x = P_\varphi = 0$  и симметричной относительно среднего поперечного сечения нагрузке  $P_z$  можно вблизи этого сечения принять  $U = 0$ , а также равными нулю все частные производные по  $x$ . Первое уравнение системы (15) обращается в тождество. Из второго и третьего уравнений (15) получим систему уравнений, содержащих функции  $v$  и  $w$

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{h^2}{12a^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) = 0, \\
& \frac{\partial v}{\partial \varphi} - w - \frac{h^2}{12a^2} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \left( v + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + a^2 \frac{1-\nu^2}{Eh} P_z = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Введем обозначение  $\xi^2 = \frac{h^2}{12a^2}$  и перепишем уравнения (16)

$$(1 + \xi^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \xi^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} = \frac{\partial v}{\partial \varphi} - w - \xi^2 \left( \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) + \frac{(1-\nu^2)a^2}{Eh} P_z = 0. \quad (17)$$

Производство передач с ПТК на ПАО "НКМЗ" представлено на рис. 4.

**Выводы.** Полученная система уравнений упругости в перемещениях опи-

сывает деформированное состояние полого цилиндрического ролика под действием радиальной нагрузки, действующей в зацеплении. Напряженно-деформированное состояние ролика зависит от компонент вектора смещения радиальной  $w$  и тангенциальной  $v$ , удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (17).



Рис. 4. Производство передач с промежуточными телами качения для механических приводов рудоразмольного оборудования

- Список литературы.** 1. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. – Л.: Судостроение, 1962. – 431 с. 2. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С.П. Войновский – Кригер. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с. 3. Ван Цзи Де. Прикладная теория упругости / Ван Цзи Де. – М.: Физматгиз, 1959. – 400 с.

Поступила в редколлегию 27.09.11