

Н.Н. ТКАЧУК, канд. техн. наук, м. н. с. каф. „КГМ им. А.А. Морозова”

НТУ „ХПИ”, Харьков;

Н.А. ТКАЧУК, докт. техн. наук, проф., зав. каф. ТММ и САПР НТУ „ХПИ”, Харьков;

О.В. КОХАНОВСКАЯ, науч. сотр. каф. ТММ и САПР НТУ „ХПИ”, Харьков;

Н.Б. НЕГРОБОВА, препод.-стажер каф. ТММ и САПР НТУ „ХПИ”, Харьков;

А.А. ЗАРУБИНА, канд. техн. наук, доц., проф. каф. ТММ и САПР НТУ „ХПИ”, Харьков

СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ДЛЯ КОНТАКТИРУЮЩИХ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ТЕЛ

У статті описані методи аналізу напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл, що знаходяться в контактi. У єдиній зв'язці використовуються модель Герца, метод скінченних елементів, метод граничних елементів. Для розв'язання задачі геометричного синтезу розроблений підхід на основі методу граничних елементів.

В статті описані методи аналізу напружено-деформованого стану складнопрофільних тіл, що знаходяться в контактi. В єдиній зв'язці використовуються модель Герца, метод скінченних елементів і метод граничних елементів. Для рішення задачі геометричного синтезу розроблений підхід на основі методу граничних елементів.

The methods of stressed-deformed state analysis of geometrically complex bodies being in a contact are described in the paper. The Hertz model, finite element method and boundary element method are used in unified connection. The approach at the basis of boundary element method is developed for solution of geometrical synthesis task.

Введение. В конструкциях машин, оборудования и оснастки для осуществления связанных движений и усилий сопряжения традиционно применялись различные виды подвижных соединений. Однако тенденции усложнения кинематических схем, а также интенсификация условий нагружения приводят к неприменимости как известных конструктивных решений, так и методов их расчета. В связи с этим для современного машиностроения характерным является широкое применение машин, в которых передача требуемых сложных видов движения и значительных рабочих усилий осуществляется посредством контакта сложнопровильных деталей. При этом форма рабочих поверхностей этих деталей определяется, во-первых, условиями кинематического сопряжения, а во-вторых, требованиями обеспечения прочности с учетом реальных распределений контактных давлений. Соответственно, при проектировании таких элементов машин возникает две различные задачи: анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) сложнопровильных тел (СПТ) с учетом их контактного взаимодействия (I) и синтеза геометрической

формы сопряженных кинематически генерируемых поверхностей (КГП) (II). Эти две задачи являются связанными, поскольку в каждой из них в качестве исходных данных выступает решение другой задачи, а сами задачи включены в цепь последовательных итерационных многовариантных расчетов для определения рациональных параметров проектируемых элементов машиностроительных конструкций. Такая взаимосвязанность присутствует, к примеру, в задачах определения рациональной формы элементов штампов, пресс-форм, гидромашин, трансмиссий, двигателей внутреннего сгорания, подшипников, зубчатых передач и других конструкций. При проектировании и расчете приведенных выше элементов машин, оборудования и оснастки (и в ряде других практически важных случаев), форма деталей не является заранее заданной и не может быть описана только набором конструктивных параметров, а определяется в ходе проведения многовариантных исследований из кинематических и прочностных критериев.

Существующие методики решения задач I и II не обеспечивают *вариативности* при описании формы тел, не имеют механизмов *интеграции* геометрических и расчетных моделей и не являются *сбалансированными* по точности и уровню вычислительных затрат на различных этапах исследовательского цикла. Вследствие первого обстоятельства возникают сложности автоматизации процесса создания моделей для анализа контактного взаимодействия проектируемых деталей при проведении многовариантных исследований. Второе служит препятствием для установления обратной связи задачи анализа НДС с исходной задачей геометрического синтеза при организации процедуры итерационного поиска формы элементов машин, удовлетворяющей заданным кинематическим и прочностным критериям. Третий фактор является причиной неоправданного увеличения вычислительных затрат и, соответственно, потери оперативности на начальных этапах решения, либо низкой точности конечного результата вследствие нерационального выбора исследовательских методов. В связи с этим совершенствование методов анализа контактного взаимодействия и синтеза геометрии сложнопровильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями представляет собой *актуальную и важную* научную и практическую задачу.

Анализ методов решения контактных задач и геометрического синтеза. Развитие методов решения контактных задач связано как с практическими потребностями техники, так и теоретическими разработками в области математики и математического моделирования. В последнее время значительные достижения в области исследования контактного взаимодействия также связаны с прогрессом численных методов и ростом вычислительных возможностей: с одной стороны, неизменно расширяется круг инженерных приложений, в которых востребованы знания о поведении тел, пребывающих в контакте; с другой стороны, постоянно возникают новые и находят применение известные математические и численные методы, предназначенные для анализа контакта тел с учетом большего числа физико-механических процес-

сов, связанных с этими явлениями.

Первый результат, относящийся к механике контактного взаимодействия деформируемых тел, принадлежит Г. Герцу [1]. Его решение справедливо только для идеально упругих тел с первоначальным точечным контактом в случае, когда размер зоны контакта мал по сравнению с размерами самих тел, а поверхностное трение отсутствует. В дополнение к использованному Герцем аппарату теории электростатического потенциала Буссинеск и Черрути предложили общее решение для полупространства, основанное на введенных ими упругих потенциалах действующего на границе полупространства давления [2]. Как отдельные классы контактные задачи были выделены и сформулированы в работе Синьорини [3], в которой дана общая постановка задачи контакта двух упругих тел с гладкой границей в отсутствие трения, получившая название задачи Синьорини.

Применение новых методов математической физики обусловило дальнейшее развитие механики контактного взаимодействия. Фундаментальные результаты здесь были получены Н.И. Мусхелешвили и представителями его научной школы. Им были разработаны эффективные методы функции комплексного переменного, нашедшие, в частности, применение для решения плоских задач теории упругости. Помимо этого, был в значительной мере развит аппарат теории интегральных уравнений, теории интегральных преобразований и теории потенциала. Во многом именно на этих результатах основаны последующие исследования контактных задач как смешанных краевых задач целого ряда авторов: В.М. Александрова, Е.В. Коваленко, С.М. Мхитаряна, Д.А. Пожарского, Б.Л. Ромалиса, Б.Н. Смета-нина, Б.В. Соболя, Н.Х. Арутюняна, А.В. Манжирова, В.Э. Наумова, В.А. Бабешко, Е.В. Глушкова, Ж.Ф. Зинченко, И.И. Воровича, О.Д. Пряхиной, Л.А. Галина, А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлаковского, И.Г. Горячевой, М.Н. Добычина, В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, В.И. Довноровича, Н.А. Кильчевского, В.И. Моссаковского, Н.Е. Ка-чаловской, С.С. Голикова, В.С. Никишина, Г.С. Шапиро, В.В. Панасюка, В.З. Пар-тона, П.И. Перлина, А.Н. Подгорного, П.П. Гонтаровского, Г.Я. Попова, В.Б. Поручикова, В.Л. Рвачева, В.С. Проценко, В.С. Саркисяна, В.М. Сеймова, М.И. Теплового, Я.С. Уфлянда, И.Я. Штаермана (см. [4, 5]). Дальнейшее развитие аналитических методов решения контактных задач можно проследить по работам [2, 6, 7].

Аналитические решения получены для разных типов контакта тел разнообразной формы. Разнообразны также и использованные авторами математические методы, относящиеся к целому ряду областей математической физики и функционального анализа, в т.ч. асимптотические методы [8], методы однородных решений [9], методы парных уравнений [10], метод R-функций [11] и др.

Несмотря на все преимущества подобного рода аналитических методов, их применение в инженерных приложениях в значительной степени ограничено, а большинство из них справедливо лишь для областей канонической формы (преимущественно, двумерных). Плохо поддаются решению аналитическими методами задачи с неизвестной границей (в особенности пространственные), а зачастую они сложны математически и не пригодны для пара-

метрического анализа. Все это делает указанный класс методов малоприменимым для анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел, форма поверхностей которых обычно является вариативной и находится путем многовариантных расчетов.

Гораздо более универсальными и гибкими являются методы, основанные на дискретизации тел и их границы. Применительно к контактным задачам наиболее часто употребляемыми являются метод граничных элементов, метод Галеркина и метод конечных элементов (МКЭ), последний из перечисленных являются вариационными. Первая постановка контактной задачи как вариационной предложена в работе [12], впоследствии было предложено и обосновано большое число ее формулировок на базе вариационных неравенств [13-17].

Вариационным принципам в статических консервативных задачах посвящены работы [18, 19]. Для случая контакта нелинейно упругих тел такой принцип предложен в [20].

В стационарных задачах интерес представляет вариационные постановки, в которых варьируемыми являются не перемещения, а усилия. Примером может служить вариационный принцип для контактных давлений, справедливый для случая взаимодействия жесткого штампа с упругим полупространством [21]. В этих задачах вариационное неравенство может быть приведено к проблеме поиска стационарной точки некоторого функционала.

На указанных выше вариационных принципах основана теория применения метода конечных элементов в контактных задачах, практические аспекты решения которых с использованием МКЭ связаны со следующими вопросами: интерпретацией контактных ограничений, их дискретизацией на границе контактирующих тел и алгоритмами поиска зоны контакта. Наиболее широко для описания контактных ограничений в вариационных формулировках и при численном решении контактных задач методом конечных элементов применяются следующие подходы [22]: метод множителей Лагранжа вместе с методами активных ограничений, методы штрафа, хорошо известные в теории оптимизации, и модифицированный метод Лагранжа. Последний дополняется известным алгоритмом Удзавы, эффективным при численном решении нелинейных задач.

Так называемые mortar-методы также предназначены для формулировки контактных ограничений в КЭМ с несопадающими сетками, основанные на применении специальных функций для дискретизации множителей Лагранжа на контактирующих поверхностях. Вопросы математического обоснования обоих подходов и численной реализации освещены в публикациях [23-24].

Из представленного анализа методов исследования контактного взаимодействия следует, что поскольку в процессе изучения форма поверхностей является вариативной, преимущество представляют более универсальные методы (из рассмотренных, например, – метод Герца, метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) и МКЭ). В то же время прямое их использование сдерживается спецификой исследуемых объектов, в первую очередь, формой кинематически генерируемых сопряженных поверхностей. Таким

образом, требуется взаимная адаптация методов анализа НДС сложнопрофильных тел с учетом контактного взаимодействия, с одной стороны, и геометрического синтеза КПП, – с другой.

Среди методов анализа контактного взаимодействия СПТ (метод Герца, МГИУ и МКЭ) нельзя выделить однозначного лидера, т.к. учитывая необходимость чрезвычайно большого количества исследований контактного взаимодействия (кроме умножения за счет количества задач анализа на каждом этапе синтеза, необходимо также произвести умножение на количество точек дискретизации взаимодействующих тел в парах сопряженных точек КПП ввиду того, что нельзя заранее в общем случае выделить наиболее неблагоприятную с точки зрения контактного давления пару), на первых этапах проектирования нужно отдать предпочтение методу Герца. С другой стороны, модель Герца имеет существенное ограничение на применение по отношению к свойствам сопряженных поверхностей, которых в значительной степени лишена модель метода граничных интегральных уравнений. И, наконец, для достижения наибольшей точности максимально подходит МКЭ (что особенно важно на завершающих этапах проектирования сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями), однако при этом требуя больших вычислительных затрат.

Общим заключением по результатам анализа методов исследования контактного взаимодействия СПТ с кинематически генерируемыми поверхностями является констатация ситуации, в которой нельзя просто рекомендовать для решения данной задачи единый метод для всех случаев сложнопрофильных тел, а построение расчетных моделей с применением каждого из рекомендованного набора (метод Герца, МГИУ и МКЭ) сопряжено для данного класса объектов со значительными затруднениями.

Это обстоятельство порождает новую задачу разработки подходов, обеспечивающих решение задачи анализа напряженно-деформированного состояния с учетом контактного взаимодействия тел по кинематически генерируемым поверхностям путем соединения различных методов на разных этапах исследований на основе единого описания используемых моделей. Кроме того, требуют развития методы конечных элементов, граничных интегральных уравнений и Герца при их применении с учетом специфики геометрической формы исследуемых элементов машиностроительных конструкций.

Под геометрическим синтезом понимается комплекс задач, связанных с нахождением *формы* элементов машин, обеспечивающей заданные свойства проектируемого изделия и позволяющей удовлетворить некоторым критериям.

Для решения подобного рода задач было разработано целое семейство методов геометрического синтеза, ставшее результатом теоретических исследований в области проектирования элементов машиностроительных конструкций и обобщения инженерной практики. Основное развитие эти методы получили в теории пространственных кулачков и зубчатых передач. При этом, вообще говоря, класс объектов, для которых справедливы методы геометрического синтеза сопряженных поверхностей, достаточно широк и постоянно увеличивается.

Первое научное исследование сопряженных поверхностей было проведено выдающимся математиком и механиком Л. Эйлером. Им же было предложено эвольвентное зацепление для цилиндрических колес, являющееся и по сей час одним из наиболее часто используемых в механических приводах, а также получен ряд результатов общего характера, относящихся к геометрическим свойствам контактирующих профилей. В их число входит уравнение Эйлера-Савари, устанавливающее в плоском случае связь между кривизнами соприкасающихся поверхностей. При их получении был преимущественно задействован аппарат аналитической геометрии и элементы дифференциального исчисления.

Среди исследователей, впоследствии занимавшихся геометрическим синтезом сопряженных поверхностей, следует выделить Х.Ф. Кетова, Я.И. Дикера, В.Н. Кудрявцева, В.А. Гавриленко [25]. В их работах значительное внимание было уделено разработке зацеплений с улучшенными параметрами. Дальнейшее развитие в этой области связано с именем французского геометра Оливье и русского ученого Х.И. Гохмана [26], в трудах которых были заложены основы пространственной теории зацепления. Т. Оливье ввел способ огибающих поверхностей для определения сопряженных поверхностей зубьев. Заслугой Х.И. Гохмана является разработка основ общей аналитической теории.

В работах В.А. Шишкова, Я.С. Давыдова и Ф.Л. Литвина [27] был предложен новый, более простой и универсальный, чем предложенный Х.И. Гохманом, способ получения уравнения определения характеристик взаимоогibaемых поверхностей. В них для исследования геометрии этих поверхностей используется условие ортогональности вектора относительной скорости точек контакта зубьев общему вектору нормали рабочих поверхностей в рассматриваемом сопряжении $(\mathbf{n}, \mathbf{v}_{1,2}^{omu}) = 0$, где $\mathbf{v}_{1,2}^{omu}$ – скорость относительного движения двух сопряженных точек, а \mathbf{n} – общий вектор нормали поверхностей зубьев в этих точках.

На основании этой идеи было предложено целое семейство методов исследования пространственного зацепления, получившее общее название „кинематических“. А.Ф. Николаев, Я.С. Давыдов и Ф.Л. Литвин разработали способ образования сопряженных точечных сопряжений с помощью двух связанных между собой производящих поверхностей. Эти и другие теоретические результаты в области геометрического синтеза сопряженных поверхностей и применения кинематического метода можно найти в работах [28-29].

Соотношения связи между кривизнами взаимоогibaющих поверхностей были получены Ф.Л. Литвином, исходя из зависимостей, связывающих скорости движения по взаимоогibaющим поверхностям точки контакта и конца орта нормали. Другим аспектам, рассмотренным авторами с применением кинематического метода, является подрезание огибающей поверхности, которая сводится к определению на ней особых точек. Решению этой задачи посвящена работа [30]. В работе Ф.Л. Литвина [27] было показано, что линия особых точек определяется соотношением $v_r^1 + v_{omu}^{12} = 0$, где v_r^1 – скорость движения точки

контакта по огибаемой поверхности, а $v_{отн}^{12}$ – относительная скорость точек в контакте. Во избежание подрезания огибающей поверхности из огибаемой нужно исключить не только точки линии, удовлетворяющие этому соотношению, но и всю часть огибаемой поверхности, лежащую за этой линией. Позднее этот подход был распространен и на случай подрезания огибающей поверхности при двухпараметрическом огибании. Последнее нашло применение в задачах синтеза сопряжения с точечным и линейным контактом.

Начало современного этапа развития методов геометрического синтеза связано с развитием и внедрением средств автоматизированного анализа и компьютерных технологий в проектирование и исследование элементов машин с улучшенными характеристиками. Возможность выполнения большого числа вычислений, приближенного решения уравнений и оптимизационных задач, использование аппроксимационных подходов в описании геометрии и современных разработок в области информационных технологий обусловили создание большого числа новых методик конструирования и расчета сложных сопряженных поверхностей. В их рамках было предложено большое число новых постановок задач синтеза, решение которых стало возможным благодаря использованию точных соотношений и средств их численного анализа [31].

Анализ литературы, посвященной геометрическому синтезу сопряженных поверхностей элементов машин, позволяет сделать следующие выводы: для геометрического синтеза тел с кинематически сопряженными поверхностями применяются различные методы, среди которых одним из наиболее эффективных и универсальных является кинематический метод Литвина; с его помощью можно не только определять форму сопряженных поверхностей, но и проводить анализ их геометрических свойств; данный метод допускает возможность численной реализации и может быть интегрирован со средствами автоматизированного проектирования; кинематический метод Литвина является достаточно универсальным и может быть применен для геометрического синтеза не только рабочих поверхностей зубьев в зацеплении, но и более широкого класса сопряженных тел; актуальными являются задачи разработки методики геометрического синтеза сопряженных поверхностей с точечным контактом по кинематическим и прочностным критериям и ее численной реализации, поскольку эти поверхности имеют сложную форму, не допускающую в общем случае получения решения в аналитическом виде.

Анализ публикаций по методам анализа контактного взаимодействия и геометрического синтеза кинематически генерируемых поверхностей позволяет сделать следующие выводы.

1. В настоящее время существует достаточно широкий спектр методов моделирования контактного взаимодействия, обладающих соответствующими областями применения, преимуществами и недостатками, что не дает возможности установления однозначных критериев при выборе только одного из них.

2. Поскольку в работе исследуются сложнопрофильные тела с кинемати-

чески генерируемыми поверхностями, для которых характерен локальный контакт в сопряжении, то рекомендуемыми являются метод Герца, метод граничных интегральных уравнений и метод конечных элементов.

3. Рекомендованные вышеперечисленные методы, расположенные именно в таком порядке, характеризуются возрастанием точности, расширением области применения и увеличением вычислительных затрат, в связи с чем в таком разрезе нельзя выделить доминирующий, универсальный, сбалансированный по всем критериям метод.

4. В общем случае при формальном применении кинематического метода генерируемые поверхности не имеют аналитического представления, а получаются как облако сопряженных пар точек, определяемых в ходе решения специальной нелинейной системы уравнений, что создает определенные сложности при использовании этой информации для оценки контактного взаимодействия: для метода Герца локальные свойства геометрии несогласованных (по терминологии Джонсона [21]) сопряженных поверхностей (их кривизны) определяются численно, что приводит к потенциальным погрешностям; для метода граничных интегральных уравнений по этим же соображениям неточно представляется функция зазора между сопряженными телами; точно так же для метода конечных элементов с неконтролируемой погрешностью описывается глобальная геометрия (т.е. собственно положение точек на истинных поверхностях сопряжения).

5. Учитывая, что при проектировании СПТ с кинематически генерируемыми поверхностями в общем случае форма деталей является не заданной (известной), а искомой (неизвестной), не конструктивной (посредством традиционных операций с примитивами), а аппроксимационной (по облаку точек), то применение напрямую для создания их геометрических и конечно-элементных моделей инструментария универсальных CAD/CAM/CAE-систем неэффективно.

Цель данной работы состоит в совершенствовании и реализации методов решения связанной задачи анализа НДС с учетом контактного взаимодействия и геометрического синтеза сопряженных поверхностей сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически генерируемыми поверхностями на основе их единого параметрического описания и интеграции расчетных моделей различного уровня.

Постановка задач. Основными источниками проблем при исследовании контактного взаимодействия сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями являются следующие факторы: на начальной стадии проектирования необходим умеренно точный, но очень оперативный инструмент определения напряженно-деформированного состояния; на этапе оптимизации конструкции необходим точный метод определения контактных нагрузок в локальной области контакта и оперативный инструмент определения НДС во всем объеме; взаимосвязанность задач определения формы, эксплуатационных режимов и НДС посредством общих параметров (для СПТ,

форма которых не может быть описана при помощи элементарных профилей, приходится решать отдельно задачу нахождения их границ).

В ходе изложения в работе предлагается новый подход к решению связанных задач анализа НДС сложнопрофильных тел и синтеза сопряженных кинематически генерируемых поверхностей с локальным контактом. Ниже описано решение отдельных подзадач: формирование конечно-элементных моделей СПТ с кинематически генерируемыми поверхностями; кинематический метод геометрического синтеза КПП; разработка варианта метода граничных интегральных уравнений для моделирования контактного взаимодействия тел с кинематически генерируемыми поверхностями; формирование разрешающих уравнений напрямую связанной задачи НДС и геометрического синтеза сложнопрофильных тел с КПП. Это составляет покомпонентно математическую формулировку задач исследований.

Общий подход к решению связанной контактной задачи для сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями. Задачи анализа напряженно-деформированного состояния СПТ с учетом контактного взаимодействия вдоль КПП (задача I) и геометрический синтез этих поверхностей (задача II) являются связанными. Их связанность определяется несколькими факторами. Во-первых, для решения задачи I требуется знание геометрической формы сопряженных поверхностей, т.е. вначале необходимо решить задачу II. Однако однократное решение данной последовательности задач ($II \rightarrow I$) с передачей информации о КПП S в сторону задачи I, как показывает практика, не имеет особой ценности, поскольку выходные данные задачи I служат для оценки прочности тел, находящихся в контакте, и для последующего принятия решения о необходимости изменения геометрической формы (или для обеспечения прочности, или для уменьшения массы контактирующих СПТ). В связи с этим в условиях реального проектирования происходит многократный итерационный процесс последовательного решения задач I и II, связанных между собой посредством изменяемой, уточняемой, искомой формой поверхностей сопряжения. Этот фактор определяется самой сутью и структурой проектно-исследовательских работ.

Во-вторых, при формировании расчетных моделей контактного взаимодействия СПТ с КПП возникает проблема точности задания локальных и глобальных характеристик этих поверхностей (т.е. тензора кривизн, зазора между поверхностями и координат точек на контактирующих поверхностях). Это обусловлено тем, что при решении задачи геометрического синтеза КПП в общем случае решение получается в виде облака пар сопрягаемых точек, принадлежащих поверхностям разных тел. Дальнейшая численная обработка этой информации привносит дополнительные погрешности при вычислении компонент тензора кривизн и использовании процедуры для численного дифференцирования. Это может привести к искажению приведенных радиусов кривизны в формуле Герца при вычислении контактных зон и давлений. Кроме того, при определении положений точек КПП и зазоров между ними может использоваться сплайн- или иная аппроксимация этих поверхностей с последующим вычислением аппроксимирующих выражений в промежуточных точках.

Данная операция может сильно повлиять на условия в контакте, записываемые для некоторого дискретного набора точек, а, значит, и на точность определения контактных зон и давлений. Таким образом, при численном решении задачи I необходимо не просто единоразовое задание синтезированной КПП на первом этапе расчета, а требуется обеспечение возможности постоянного обращения к задаче уточнения локальных и глобальных характеристик. Иными словами, необходимо „во внутреннем цикле” постоянно и многократно обращаться к задаче II, т.е. решать задачи I и II совместно. Данный фактор обусловлен спецификой описания геометрической формы КПП, которая по сравнению с традиционными способами задания не может сводиться к рутинным операциям с геометрическими примитивами или операциями, а требует решения отдельной специальной задачи.

В-третьих, при разработке математических моделей задач I и II следует иметь в виду, что в конечном итоге создаваемые базы данных необходимо на определенном этапе интегрировать в одну или несколько CAD/CAM/CAE-систем. Поскольку и в геометрической, и в конечно-элементной моделях однозначно прогнозируются проблемы оперирования с геометрическим представлением СПТ, получаемым в виде облака точек, то требуется создание единых способов оперирования и общих форматов задания этих поверхностей. Эти способы и форматы должны быть, с одной стороны, внешними по отношению к CAD/CAM/CAE-системам, но, во-вторых, позволять интегрировать первичную геометрическую информацию в эти системы. Этот фактор обусловлен необходимостью интеграции информации о КПП в современные CAD/CAM/CAE-системы.

Подводя итог, можно заключить, что сформулированная в работе задача анализа НДС СПТ с учетом контактного взаимодействия по КПП и геометрического синтеза последних является связанной логикой процесса проектирования машиностроительных конструкций, спецификой геометрической формы КПП и необходимостью интеграции с CAD/CAM/CAE-системами. Все эти аспекты не нашли своего полного решения у других исследователей, и поэтому требуется разработка новых подходов к решению поставленной задачи. При этом необходимо отметить, что специфика исследования контактного взаимодействия сложнопрофильных деталей при наличии связанной с ним задачи моделирования рабочего процесса, описания формы контактирующих поверхностей и определения НДС взаимодействующих тел не позволяет эффективно применять ни традиционные схемы линейно-последовательного проектирования, ни механическое встраивание в среду универсальных САПР. В связи с этим предлагается альтернативная схема организации единого связанного проектно-исследовательско-технологического процесса, основанного на едином параметрическом подходе.

Рассмотрим исследуемую систему взаимодействующих тел как единство физико-механического процесса (рабочий цикл механизма, узла, агрегата, машины), формы границы S исследуемых тел Ω и их НДС. На рис. 1 укрупненно представлены информационные потоки в случае использования предложенного подхода. Предполагается, что существует некоторое множество параметров, однозначно описывающих исследуемый объект и процесс. Выделив в нем удобный

для оперирования базис параметров p , $p \in V$ (этап I), можно инициировать процесс моделирования, состоящий из этапов II-VII:

$$C(N, \omega, t) = 0; \quad (1) \quad R(q, F, S, t) = 0 \Rightarrow S(\alpha), f(F, S, t); \quad (2)$$

$$L(u, F, \Omega(S), t) = 0; \quad (3) \quad \Delta p: \{K(p + \Delta p) \leq 0, I(p + \Delta p) < I(p)\}. \quad (4)$$

Здесь оператор C описывает исходные функциональные требования к исследуемой системе взаимодействующих тел относительно характеристик N, ω , а оператор R – рабочий процесс как некоторый физико-механический процесс (q – вектор обобщенных координат системы; F – усилия взаимодействия; S – поверхность контакта). S представляет собой параметрическую запись поверхностей в пространстве и времени

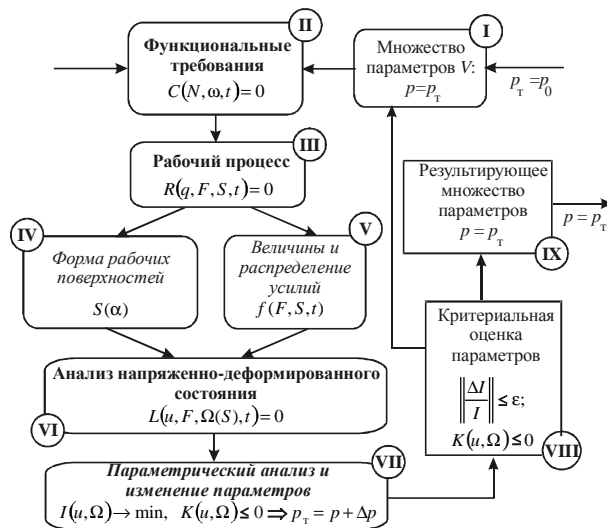


Рис. 1. Параметрическое описание рабочего процесса, формы поверхностей и НДС взаимодействующих тел

t ; L – оператор начально-краевой задачи теории упругости (u – переменные состояния, $\Omega(S)$ – области, занимаемые исследуемыми телами и ограниченные поверхностями S); I – функция качества системы (массовые, прочностные или другие характеристики); K – ограничения на определяющие параметры исследуемой системы.

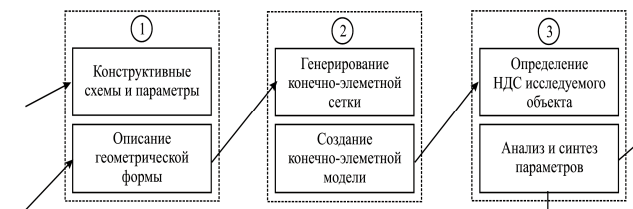
Поскольку все соотношения (1)–(4) содержат неявно заданные связи в параметрическом пространстве V между некоторыми состояниями системы (текущим и предлагаемым), то, в конечном итоге, важны следующие требования: задание набора $p \in V$ однозначно определяет совокупность единичных решений задач анализа II, III (IV, V), VI; существует некоторая область G в пространстве V , такая, что из $p_0 \in G$ следует существование и единственность предела итерационной последовательности VII. На этапе VIII производится проверка выполнения заданных ограничений K при текущих параметрах, а также по заданной величине ϵ – скорости улучшения функции качества. В случае выполнения этих требований на этапе IX формируется выходной результирующий набор параметров p . Достоинствами предложенной технологии является ее гибкость, управляемость, прозрачность информационных потоков и наличие инструментов для ес-

тественной интеграции в процесс проектирования, исследования и технологической подготовки производства элементов исследуемых систем, представляющих собой тела со сложнопрофильными поверхностями.

Для проведения многовариантных исследований напряженно-деформированного состояния с учетом контактного взаимодействия СПТ необходимы эффективные методы геометрического синтеза и анализа НДС, которые бы одновременно обеспечивали должную точность и обладали высокой скоростью выполнения с учетом специфики КТП. В связи с этим является *актуальным оптимальный выбор метода*, который бы позволял проводить анализ контактных напряжений в большом числе точек сопряжения СПТ в процессе многовариантных исследований.

Распространенный аналитический метод расчета пространственного контактного взаимодействия, основанный на известном решении задачи Герца [3], обладает определенными достоинствами и может быть применен на первом, оценочном этапе исследований. Он отличается предельной простотой и экономными требованиями к ресурсам, применим для тел с дискретно заданной геометрией. В данной работе он дополнен методом аналитического вычисления кривизн сопряженных кинематически генерируемых поверхностей.

Рис. 2. Традиционная схема конечно-элементного моделирования НДС элементов машиностроительных конструкций



МКЭ является наиболее мощным современным методом моделирования НДС СПТ с учетом контактного взаимодействия. Однако, учитывая специфику формы КТП, в работе предложен новый метод генерирования их конечно-элементных (КЭ) моделей. Метод граничных интегральных уравнений является мощным, но менее используемым, по сравнению с МКЭ, методом решения подобных задач. В связи с этим в работе поставлена и решена задача его модификации применительно к определению НДС сложнопрофильных тел с КТП.

Соответственно решены отдельные задачи: разработка методов автоматизированного создания КЭМ сложнопрофильных тел с КТП; разработка методов их геометрического синтеза, встроенных в общую схему исследований; модификация МГИУ для исследования НДС и контакта сложнопрофильных тел с КТП.

Конечно-элементные модели сложнопрофильных тел: методы автоматизированной генерации и параметризованного описания. Существующая в настоящее время традиционная технология конечно-элементного моделирования НДС элементов сложных механических систем (рис. 2) предполагает следующие этапы: 1) описание геометрии исследуемого объекта; 2) генерирование на этой основе КЭМ, в том числе КЭ сетки; 3) определение напряженно-деформированного состояния, анализ прочностных, жесткостных характеристик с возможным последующим изменением конструктивных схем

и параметров, а также дальнейшим выполнением этапа 1.

Во многом данная схема исследований НДС, встроенная в процесс проектирования машиностроительных конструкций, сохраняется и в среде САПР, представленной в настоящее время совокупностью систем CAD/CAM/CAE. При этом происходит сложный направленный процесс оптимизации проектных решений в автоматизированном режиме, сопровождаемый генерацией, трансформацией и перестройкой моделей объекта (конструкторской, технологической и конечно-элементной формы описания проектируемой конструкции или ее частей) (рис. 3). Описанному здесь процессу проектирования, несмотря на высокую степень автоматизации и развитие средств моделирования, присущи определенные недостатки.

Цикл обратной связи ③ → ① (см. рис. 2), неизбежно присутствующий в том или ином виде в процессе оптимального синтеза элементов исследуемого объекта с учетом прочностных и жесткостных ограничений, требует, как правило, *перестройки* их КЭМ.

Данный этап достаточно *трудоемок* и *ответственен*. Зачастую сетки КЭ *не регулируются* исследователем, а их генерация „отдается на откуп” специальным подсистемам – „мешерам”. Особенно это характерно для интегрированных CAD/CAM/CAE-систем. *Параметризация* КЭМ даже в системах высокого уровня (ANSYS, NASTRAN, Abaqus) в силу высокой сложности этой задачи несовершенна, что прерывает попытки параметризации всего цикла исследований. Попытки создания *управляемых* разбинок наталкиваются на отсутствие, во-первых, автоматических универсальных процедур разбивки произвольных 3D-областей на конечные элементы, а во-вторых, на потерю автоматизации и увеличении трудоемкости при создании управляемых разбинок, построенных вручную. Ситуация усложняется при исследовании *сложнопрофильных пространственных элементов* конструкций, когда уже сам этап описания геометрии настолько сложен, что об автоматизации, параметризации и управляемости сеток не может быть и речи, особенно если идет речь о призматических КЭ. Зачастую они просто исключают друг друга (рис. 4). Еще большую сложность и актуальность проблема приобретает при проектировании новых оригинальных конструкций, когда *изначально неизвестна* окончательная геометрия области, занимаемой исследуемым телом, или, что еще более усложняет задачу, когда геометрия определяется явно или неявно порождаемыми требованиями в ходе самого процесса проектирования. Попытка создания „надстроек” над описанным процессом ситуацию только усугубляет, добавляя еще проблему *согласования* форматов данных с различными CAD/CAM/CAE-пакетами.



Рис. 3. Схема обмена информацией между различными САПР

Анализ представленной на рис. 4 схемы, а именно *парных отношений* соответствующих характеристик, позволяет вскрыть присущие рассматриваемому процессу противоречия: попытка улучшить одну из характеристик модели, как правило, вступает в конфликт с требованием сохранить другую. Важно отметить, что, во-первых,

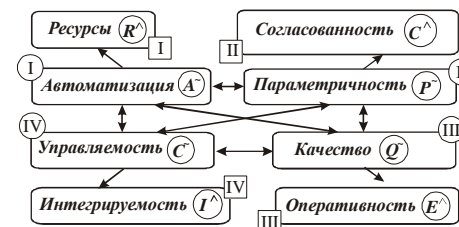


Рис. 4. Качественные характеристики КЭМ и соответствующие проблемные ограничения: I – автоматизация процесса создания КЭМ; II – параметричность КЭМ; III – качество КЭМ; IV – управляемость сеток КЭМ

компромиссные варианты при этом не дают удовлетворительного решения ни по одному из критериев, а во-вторых, даже при установлении приоритета одной из характеристик I-IV вступает в игру соответствующее ограничение I-IV.

Таким образом, комплексный всесторонний анализ ситуации позволяет сделать вывод о том, что в настоящее время сложилась актуальная, важная и сложная задача разработки технологии конечно-элементного моделирования СПТ, характеризующейся соединением свойств *параметричности, автоматизации, управляемости и качества*

(критерий $K^- = \{P^- - A^- - C^- - Q^-\}$, см. рис. 4) при обеспечении требований *оперативности* проектирования, *согласованности* форматов моделей ограничениям по вычислительным *ресурсам* и *интегрируемости* в среды систем CAD/CAM/CAE различного типа (критерий $K^+ = \{E^+ - C^+ - R^+ - I^+\}$, см. рис. 4).

Ставится задача разработки технологии конечно-элементного моделирования, которая в сочетании с современными средствами в среде CAD/CAM/CAE-систем обеспечивает удовлетворение комплексному критерию K^- и комплексному ограничению K^+ , что в конечном итоге ликвидирует проблемное „узкое место” в автоматизированном, интегрированном, качественном, параметрическом проектировании сложных конструкций с учетом их НДС. Поскольку существующая система противоречий, описанных выше, делает поставленную задачу в общем случае неразрешимой внутренними средствами даже мощных современных систем CAD/CAM/CAE, требуется поиск новых путей ее решения. В связи с этим предлагается решать задачу не „извне” дополнением существующего инструментария автоматизированного проектирования, а „изнутри”, изменяя сам способ описания и создания моделей исследуемых объектов, в т.ч. их КЭМ. С другой стороны, внедрение при этом в традиционную схему CAD/CAM/CAE-системы новых качеств предполагается осуществлять при помощи дополнительных модулей. Кроме того, поскольку существующие даже самые мощные универсальные системы автоматизированного проектирования и исследования (Pro/ENGINEER, CATIA, SolidWorks, ANSYS, NASTRAN, LS-DYNA) не предоставляют способов решения поставленной задачи в общем случае, представляется целесообразным обойти эту проблему,

предлагая *общий подход*, но реализуемый каждый раз для определенного класса исследуемых конструкций (т.е. вместо отсутствующего *универсального* инструмента предлагается реально осуществимая *технология*, характеризующая общими приемами при работе с *конкретными* объектами).

Центральной задачей этой проблемы является технология автоматизированного генерирования КЭМ. Рассмотрим отдельные аспекты решения задачи автоматизированного генерирования КЭ моделей тел с КПП. На рис. 5 приведена структурная схема проектных исследований для тел с различными способами описания геометрической и КЭ моделей. Если в операторном виде уравнения состояния записать как $L(\Omega, u, p, r, t) = 0$, где Ω – область, занимаемая телами; u – переменные состояния; r, t – пространственная и временная координаты; то можно выделить 2 (I и III) основных традиционных способов описания Ω , когда она конструируется из заранее известных примитивов и операций, т.е. описывается в виде совокупности подобластей простой формы Ω_i или операций с ними. Более сложным является способ II – алгоритмический, когда решение задачи анализа НДС и геометрического синтеза записывается в виде последовательности операторов

$$L_1|_{\Omega}(u, p, r, t) = 0; \quad (5) \quad L_2|_{\Omega}(\Omega, p, r, t) = 0. \quad (6)$$

В этом случае расчет НДС элементов исследуемых тел затруднен не только сложностью области Ω , но и тем, что сама эта область является искомой, причем для ее синтеза необходимо решение довольно сложной нелинейной задачи. В этом случае связанность задачи можно осуществить в виде последовательности решений задач (6), (5) (именно в такой последовательности). При этом на первом этапе Ω – искомая, $p = \text{const}$; на втором – u – искомая, $\Omega = \text{const}$, потом $p = \text{var}$. Соответственно само решение разбивается на последовательность хоть и зависимых этапов, но эта зависимость проявляется только в моменты передачи данных между этапами исследований (см. рис. 5).

В качестве оператора L_2 задачи геометрического синтеза сопряженных поверхностей первого тела по заданной форме $\bar{\Omega}$ второго тела выступает условие компланарности вектора относительной скорости V_0 точек первого тела касательной плоскости к поверхности другого тела: $\mathbf{n}(\mathbf{a}) \times \mathbf{V}_0(\mathbf{b}) = 0$, где \mathbf{n} – вектор нормали, определяющий касательную плоскость. Каждый из векторов в этом векторном произведении определяется параметрически через 2 параметра каждый: \mathbf{a} – двухкомпонентный вектор известных параметров; \mathbf{b} – искомым. Тогда в виде облака точек T_k можно представить искомую область $\Omega = \{T_k(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k): \mathbf{n}(\mathbf{a}_k) \times \mathbf{V}_0(\mathbf{b}_k) = 0\}$. Поскольку область $\bar{\Omega}$ представима в виде топологически регулярной сетки, то можно ожидать, что и система сопряженных точек будет обладать аналогичным свойством. В этом случае можно пропустить этап аппроксимации области Ω и последующей ее разбивки на КЭ (см. рис. 2, 3, 5) и сразу использовать получаемую топологически регулярную сетку для формирования конечно-элементной. В результате фрагмент исследуемого тела представим в виде регулярной сетки КЭ, топологически эквивалентной разбивке куба на элементы с числом узлов n_1, n_2, n_3 элементов на каждом из направлений. Эти числа, а также законы их сгущения-разрежения, задаваемые принудительно, будут теми дополнительными обобщенными параметрами, которые обеспечивают решение задачи “ $P^- - A^- - C^- - Q^-$ ” с удовлетворением ограничений “ $E^{\wedge} - C^{\wedge} - R^{\wedge} - I^{\wedge}$ ” (см. рис. 5).

зультате фрагмент исследуемого тела представим в виде регулярной сетки КЭ, топологически эквивалентной разбивке куба на элементы с числом узлов n_1, n_2, n_3 элементов на каждом из направлений. Эти числа, а также законы их сгущения-разрежения, задаваемые принудительно, будут теми дополнительными обобщенными параметрами, которые обеспечивают решение задачи “ $P^- - A^- - C^- - Q^-$ ” с удовлетворением ограничений “ $E^{\wedge} - C^{\wedge} - R^{\wedge} - I^{\wedge}$ ” (см. рис. 5).

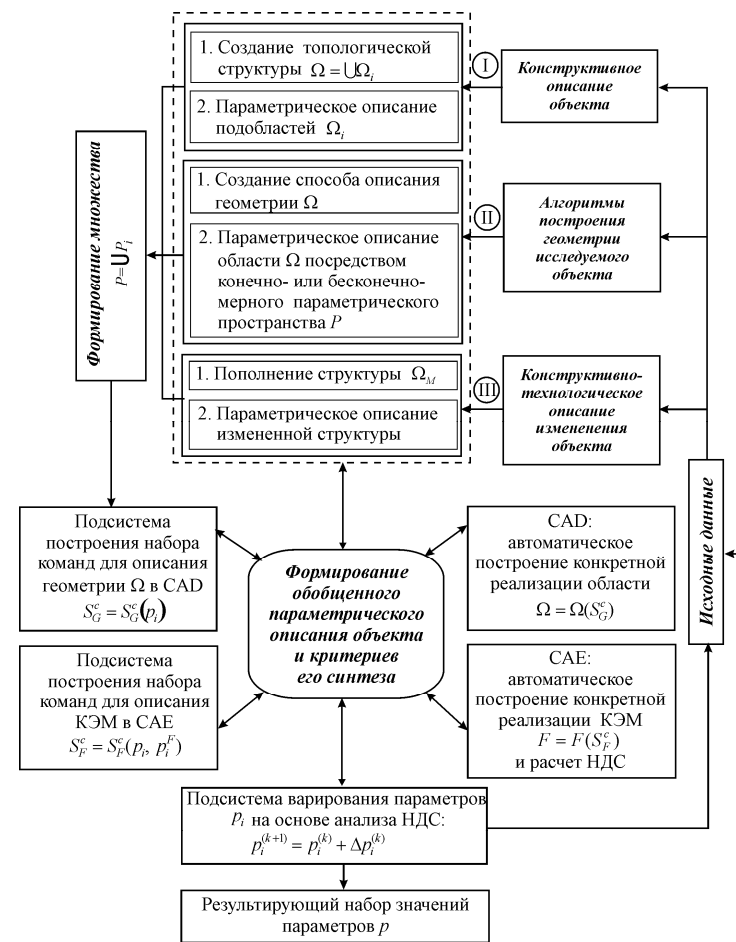


Рис. 5. Структура системы автоматизированного генерирования моделей исследуемых объектов

Таким образом, в данном случае с учетом требований “ $K^- + K^{\wedge}$ ” реализован синтез КЭМ для фрагмента конструкции. Однако, учитывая, что остальные части тел

тоже могут быть соответственно разбиты на топологически эквивалентные кубу фрагменты, задачу в принципе можно считать решенной для всей конструкции.

Постановки задач синтеза сопряженных поверхностей, кинематический метод и его реализация. Метод геометрического синтеза состоит в том, что по заданной поверхности одного из контактирующих тел $r_2(\alpha, \theta)$ в системе криволинейных координат (α, θ) с нормалью $n_2(\alpha, \theta)$ по условию ортогональности относительной скорости точек поверхности второго тела $V^{omt} = (v_u^{omt}, v_{\varphi_1}^{omt})$, где $v_{\varphi_1}^{omt}$ и v_u^{omt} – относительные скорости контактирующих точек, соответствующие возможным двум движениям первого тела, поточечно восстанавливается ее форма в виде

$$r_1(\varphi_1, u) = M_{1,2}(\varphi_1, u)r_2(\alpha(\varphi_1, u), \theta(\varphi_1, u)). \quad (7)$$

Здесь r_1 и r_2 – радиус-векторы точки контакта зубьев в локальных системах координат первого и второго колес.

Матрица $M_{1,2}$ есть матрица преобразования систем координат, реализующая связь

$$\{\alpha = \alpha(\varphi_1, u); \theta = \theta(\varphi_1, u)\}. \quad (8)$$

Таким образом, обе сопряженные поверхности получаются в виде двух облаков точек, определяемых в системе своих криволинейных координат

Данный модифицированный вариант кинематического метода Литвина отличается от других вариантов его применения тем, что изначально нацелен не только на восстановление геометрической формы сопрягаемых рабочих поверхностей или на формообразование этих поверхностей и вычисление траекторий движения инструмента, а также и на подготовку геометрической модели как основы построения конечно-элементной, гранично-элементной или герцевской. В связи с этим производится вычисление не только координат сопряженных точек на рабочих поверхностях, но и локальных геометрических свойств их окрестностей. Таким образом, в отличие от способов аппроксимации сеточно заданной поверхности и конечно-разностного дифференцирования, в данном варианте кинематического метода геометрического синтеза обеспечивается практически точное определение положений узлов КЭМ, зазоров между КПП и тензора кривизн. Описанный на примере рабочих поверхностей зубьев двухпараметрических передач (ДПП) метод геометрического синтеза обладает высокой степенью общности для всего класса СПТ с КПП. Естественно, что для более простых способов сопряжения тел упрощаются и способы описания их геометрии.

Условия контактного сопряжения определяют кинематически генерируемые поверхности тел 1 и 2 – S_1, S_2 . При этом явно или неявно задаваемые ограничения типа (3) или (6), (7) определяют подмножество G , конкретизируемое для того или иного объекта по-разному.

Таким образом, формально кинематически генерируемые поверхности $S_1,$

S_2 можно определить как подмножество пар поверхностей, удовлетворяющих кинематическим условиям G сопряжения абсолютно твердых тел Ω_1 и Ω_2 .

Условия контакта сложнопрофильных тел. Учитывая, что в общем случае поверхности S_1, S_2 имеют сложную форму, то и, соответственно, тела Ω_1 и Ω_2 будут сложнопрофильными. Эти сложнопрофильные тела на этапе расчета напряженно-деформированного состояния с учетом контактного взаимодействия представимы в виде деформируемых гладких тел с непрерывно поворачивающейся нормалью на S_1, S_2 .

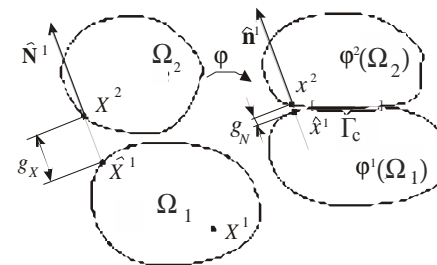


Рис. 6. Кинематика контакта тел 1 и 2 с гладкой границей: φ – отображение из начальной в актуальную конфигурацию; Γ_c – область контакта тел в актуальной конфигурации; $\Omega_1\Omega_2$ – области, занимаемые телами 1 и 2

Следуя [2], условие непроникновения можно представить в виде (рис. 6):

$$g_N = (x^2 - \hat{x}^1) \cdot \hat{n}_1 \geq 0. \quad (9)$$

Здесь g_N – зазор между поверхностями; \hat{n}_1 – нормаль к Γ_c . Выполнение условия неотрицательности этой функции и обеспечивает отсутствие взаимного проникновения тел (т.е. интерференции материалов тел 1 и 2).

При малых деформациях для геометрически линейной

модели деформирования можно записать условие непроникновения в виде:

$$(u^2 - \hat{u}^1) \cdot \hat{n}_1 + g_X \geq 0, \quad (10)$$

где $u^\alpha, \alpha = 1, 2$ – перемещения тел: $x^\alpha = X^\alpha + u^\alpha$, а $g_X = (X^2 - \hat{X}^1) \cdot \hat{N}^1$ – первоначальный зазор между телами 1 и 2 в начальной конфигурации.

Основными сложностями при включении условий (9), (10) в модели контакта является их нелинейность. Контактное взаимодействие является односторонним ограничением [2, 22]. Величина нормальных контактных давлений p_N (т.е. действующих по нормали к поверхности контакта) определяется как реакция в зоне контакта S и вычисляется по активным ограничениям в системе. Контактные давления в случае без адгезии должны быть сжимающими: $p_N = p_N^1 = p_N^2 \leq 0$. Таким образом, следуя [16, 20], обобщая оба возможных случая: контакта, когда $g_N = 0$ и $p_N < 0$, и отрыва, когда $g_N > 0$ и $p_N = 0$, можно записать следующие соотношения на границе:

$$g_N \geq 0; p_N \leq 0; p_N g_N = 0. \quad (11)$$

Они известны как условия Герца-Синьорини для нормального контакта тел без трения. Эта запись используется в различных постановках контактных задач

как задач минимизации с ограничениями. Соотношения (11) естественным образом повторяют условия Каруши-Куна-Таккера в задачах выпуклого программирования. При этом следует отметить их недифференцируемость, в результате чего многообразие допустимых состояний в слабых (вариационных) постановках контактных задач также является недифференцируемым.

Кинематическая модель контакта деформируемых тел приводит к соотношениям, относящимся лишь к границам S_1 и S_2 тел 1 и 2. Для построения замкнутой математической модели напряженно-деформированного состояния тел 1 и 2 с учетом контакта необходимо использовать уравнение состояния в самих телах. В случае контакта линейно упругих тел система соотношений теории упругости для каждого из тел имеет вид (индексы 1 и 2 опускаются):

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0, \quad X \in B; \quad (12) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) / 2; \quad (13) \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (14)$$

где $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, E$ – тензоры напряжений, деформаций и модулей упругости.

На границе тел 1 и 2 будем рассматривать три типа граничных условий:

- кинематические (типа Дирихле) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma, \quad X \in \Gamma_u; \quad (15)$

- силовые (типа Неймана) $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{t}_\Gamma, \quad X \in \Gamma_\sigma; \quad (16)$

- условия контакта (10),

где $u_N = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ – нормальное смещение точек поверхности, t_Γ – заданное внешнее давление на поверхностях тел.

Условия (10) задают вместе с классическими граничными условиями (15), (16) на подмножество K допустимых распределений перемещений \mathbf{u} . На этом множестве $\mathbf{u} \in K$ ищется решение задачи (u, p_N) . В частности, с применением теории вариационных неравенств [13, 20, 32] можно локальную постановку задачи анализа НДС с учетом контактного взаимодействия тел 1 и 2 свести к вариационному неравенству:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in K, \quad \mathbf{u} \in K. \quad (17).$$

Здесь $a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^2 a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha)$; $L(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^2 L_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)$. Т.е. a и L суть суммы билинейной и линейной форм для каждого из тел 1 и 2:

$$a_\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = \int_{\Omega_\alpha} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) d\Omega; \quad (18)$$

$$L_\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \int_{(\Gamma_\alpha)} t_\Gamma(\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\Gamma \quad (19)$$

(здесь индексы α в \mathbf{u}, \mathbf{v} опущены).

В свою очередь вариационное неравенство (17) имеет решением аргумент функционала I , на котором он достигает минимума

$$I(\mathbf{u}) = 1/2 a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{u} \in K. \quad (20)$$

Итак, описывая геометрическую форму взаимодействующих тел 1 и 2 в начальной конфигурации обычными или обобщенными параметрами $\bar{p}_1, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{N_p}$, которые формируют вектор $\bar{\mathbf{P}}$, получаем из условия кинематического сопряжения абсолютно твердых тел подмножество G , которое можно идентифицировать в виде системы ограничений

$$G(\bar{\mathbf{P}}) \geq 0. \quad (21)$$

При этом подразумевается справедливость прямого и обратного соответствий:

$$S_1 = S_1(\bar{\mathbf{P}}); \quad S_2 = S_2(\bar{\mathbf{P}}); \quad (22) \quad \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}(S_1, S_2). \quad (23)$$

Тогда (21) можно представить в виде:

$$G(\bar{\mathbf{P}}(S_1, S_2)) \geq 0. \quad (24)$$

В актуальной конфигурации деформируемые твердые тела удовлетворяют условию минимума функционала

$$I(\mathbf{u}, S_1, S_2) \rightarrow \min, \quad \mathbf{u} \in K(S_1, S_2), \quad (25)$$

где S_1, S_2 можно рассматривать как параметры, неявно присутствующие в определении форм a и L (через $\Omega_\alpha = \Omega_\alpha(S_\alpha)$; $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha(S_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$), а также K (через ограничения (10), записанные для функций \mathbf{u}_α , определенных на S_α , $\alpha = 1, 2$).

Таким образом, задачу определения НДС тел 1 и 2 с учетом контактного взаимодействия по кинематически генерируемым поверхностям S_1, S_2 можно представить как связанную задачу (25), (24). Ее можно сформулировать как задачу поиска \mathbf{u} , доставляющего минимум некоторому функционалу I на выпуклом множестве K при варьируемых в пределах подмножества G КП S_1 и S_2 .

Гранично-элементная формулировка связанной задачи. Сложность решения связанной задачи (24), (25) состоит, прежде всего, в трудностях при оперировании с геометрической информацией (т.е. определении S_1, S_2 , подмножества G , а также способа варьирования S_1 и S_2). В общем случае это можно осуществлять путем варьирования параметров $\bar{p}_i \in \bar{\mathbf{P}}$. Тогда S_1 и S_2 изменяются, влияя на НДС. Однако при таком способе варьирования трудно контролировать локальные и глобальные свойства поверхностей S_1 и S_2 . Наоборот, оперируя ими, сложно подчинять поверхность условиям кинематического сопряжения.

В то же время при некоторых условиях можно предложить способ прямого сопряжения геометрических данных и полевых распределений искомого компонента НДС. Так, например, если форма и размеры взаимодействующих тел удовлетворяют условиям гладкости S_1 и S_2 , а также возможности интерпретации Ω_1, Ω_2 как полупространств, можно использовать один из вариантов

метода граничных интегральных уравнений, описанный в [33]. В соответствии с [33] для описания зазора между контактирующими телами 1 и 2 вводится система координат, центр которой (точка O) традиционно располагается на линии действия прижимающей силы \mathbf{P} (рис. 7). Оси z_1 и z_2 имеют направление вовнутрь тел 1 и 2. Тогда уравнения каждой из поверхностей можно записать как $z_i = z_i(x, y)$,

$i=1,2$, а зазор – соответственно как $h = h(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y)$.

В деформированном состоянии оба тела 1 и 2 приводятся в контакт по некоторой площадке. При этом перемещение произвольной точки поверхностей S_i каждого из тел в направлении оси z складывается из смещения тела как жесткого – δ_i и отклонения u_{z_i} (рис. 8) от недеформированной формы соответствующей поверхности (соответствует деформациям, которые вызваны действием искомого контактного давления). Тогда приходим к следующей общепринятой записи нелинейных соотношений для нормального контакта:

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \delta_1 + \delta_2, S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) \text{ – в контакте;} \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2, S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) \text{ – вне зоны контакта.} \end{cases} \quad (26)$$

При этом для упругого полупространства известно интегральное соотношение между нормальным давлением и нормальными перемещениями точек границы (рис. 9) [34]:

$$u_z(x, y) = (1 - \nu^2) / \pi E \iint_S [p(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta; \quad \rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (27)$$

Выражая перемещения $u_{z_1}(x, y)$ и $u_{z_2}(x, y)$ через единую функцию распределения давления $p(x, y)$, получаем:

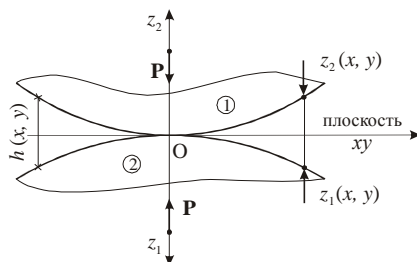


Рис. 7. Представление локального зазора между контактирующими телами

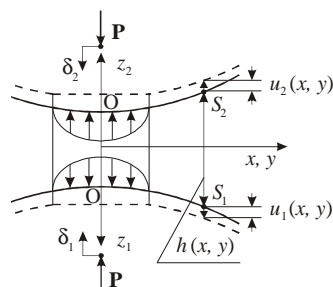


Рис. 8. Деформация тел и образование контактной площадки под действием нормального усилия

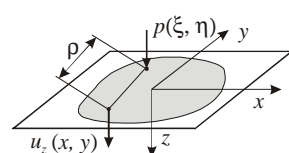


Рис. 9. Перемещение границы полупространства под действием нормального усилия

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta. \quad (28)$$

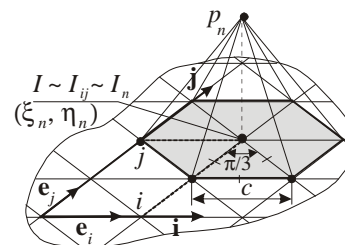


Рис. 10. Регулярная треугольная сетка и пирамидальный элемент давления

Здесь $\nu_i, E_i, i=1,2$ – упругие параметры материалов каждого из контактирующих тел. Площадка контакта S и распределение давлений $p_N = p(\xi, \eta)$ (здесь и ниже $p \geq 0$ с учетом принятых на рис. 8-10 направлений), фигурирующие в правой части равенства, являются искомыми неизвестными. Для дискретизации разрешающих соотношений используется кусочно-линейное представление распределения действующих усилий, которому отвечают непрерывные и гладкие смещения точек поверхности, что характерно для контакта

сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями. Искомая функция контактных давлений $p_N = p(x, y)$ аппроксимируется суперпозицией массива пирамидальных элементарных распределений с вершинами в узлах регулярной сетки с шагом c , состоящей из равно-сторонних треугольников (рис. 10, 11). При этом она полностью определяется дискретным набором конечного числа узловых значений давлений p_n :

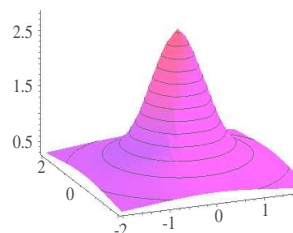


Рис. 11. Распределение перемещений точек поверхности полупространства от действия давления (см. рис. 10)

$p(\xi, \eta) \cong \sum_n \hat{p}(\xi - \xi_n, \eta - \eta_n) \cdot p_n$.

Для нахождения искомого величин усилий в узлах сетки, которые наилучшим образом удовлетворяют условиям на границе, применимы различные подходы [33], в частности, вариационный метод (принцип Калькера). При его использовании в качестве действительных принимаются такие узловые значения контактных давлений, которые минимизируют функционал энергии [21]. При этом требуется способ вычисления нормальных смещений (28) для используемого типа аппроксимирующих давлений. Такая задача эквивалентна определению перемещений u_z , которые отвечают каждой из базисных нагрузок. В работе [33] описан способ аналитического вычисления коэффициентов такого представления.

Для узловых точек с некоторым индексом n , соответствующим паре номеров (i, j) :

$$u_n = \sum_m C_{nm} p_m, \quad (29)$$

где C_{nm} – компоненты матрицы коэффициентов влияния C , которая связывает узловые значения перемещений точек границы S с узловыми значениями контактных давлений.

Согласно принципу Калькера [21], для истинных областей контакта и контактного давления, действующего в сопряжении тел 1 и 2, достигается минимум функционала полной дополнительной работы Φ на множестве всех возможных неотрицательных распределений давлений p . Вид этого функционала:

$$\left\{ \Phi(p) = \frac{1}{2} \int_S p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \int_S p(h - \delta) dS \rightarrow \min; p(\xi, \eta) \geq 0 \text{ в } S. \right.$$

Из этого условия с учетом (29) получаем:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ узел } J_n - \text{ в контакте;} \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ узел } J_n - \text{ вне зоны контакта,} \end{cases} \quad (30)$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$ – суммарное сближение тел как жестких; $h_n = h(x_n, y_n)$ – узловые значения первоначального зазора.

Условие неотрицательности контактных давлений накладывает на искомые узловые значения следующие ограничения:

$$p_m \geq 0, m = 1, N. \quad (31)$$

Кроме того, вне зоны контакта контактные давления должны быть нулевыми, откуда

$$p_m = 0, J_m - \text{ вне зоны контакта.} \quad (32)$$

$$\text{Интегральное соотношение для } p_m: \sum_m \sqrt{3} c^2 p_m / 2 = P. \quad (33)$$

Система соотношений (30)-(33) разрешается единственным образом относительно искомых неизвестных $\{p_m\}_{m=1}^N$ и δ . При их определении форма и размеры области контакта S обычно неизвестны. Поэтому для начала обычно строится сетка и делается начальное предположение о текущем (начальном) приближении области контакта S таким образом, чтобы принадлежащие ей узлы заведомо покрывали настоящую область контакта. В ходе последующей итерационной процедуры одновременно уточняются как форма области контакта, так и значения контактных узловых давлений. На каждом шаге итерационного уточнения имеется множество N_c , состоящее из текущих индексов n_c тех узлов, которые предположительно входят в контакт. Для этих узлов должны выполняться уравнения из системы (30), а также равенство (33):

$$\left\{ \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c} p_{m_c} - \delta = h_{n_c}, n_c \in N_c; \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3} c^2 p_{m_c} / 2 = P. \right. \quad (34)$$

Последнее равенство в полученной системе записано с учетом условия (32): $p_m = 0, m \notin N_c$. Соотношения (34) образуют систему линейных алгебраических уравнений из $(N_c + 1)$ -го уравнения относительно такого же числа неизвестных. Матрица этой системы формируется из коэффициентов матрицы влияния C_{nm} и весовых множителей из равенства (33). Данная система имеет единственное решение. Полученные как ее текущее решение узловые значения $\{p_{m_c}\}_{m_c \in N_c}$ могут быть такими, что будут нарушать условие (31). Это будет означать, что текущие размеры зоны контакта завышены. Тогда индексы узлов, в которых это нарушение зафиксировано, исключаются из множества N_c , и производится следующий шаг итерации. Так происходит до той поры, пока решение системы (34) даст отрицательные искомые узловые давления в зоне контакта.

В большинстве случаев этот результат является окончательным. Однако при этом требуется дополнительная проверка на выполнение второго типа из условий, представленных в (30). Вне зоны контакта S не должно наблюдаться взаимного проникновения взаимодействующих тел. Если же в части узлов, не вошедших в текущее приближение области контакта, не будут соблюдаться указанные неравенства, то их индексы включаются во множество N_c и повторяется итерационная процедура.

Связанная формулировка задачи анализа контактного взаимодействия и геометрического синтеза. Анализ представленных выше соотношений дает основание для следующих выводов.

1. Формально уравнения (34) объединяют в прямом «сконденсированном» виде физико-механические характеристики исследуемой системы (они представлены матрицей коэффициентов влияния C_{nm}); НДС (в виде распределений контактных давлений p_m , через которые по известным соотношениям восстанавливаются все компоненты векторов перемещений, напряжений и деформаций на границах и внутри областей Ω_1, Ω_2); интегральное усилие P ; сближение тел как жестких – δ ; геометрическая форма сопряженных поверхностей (натянуты на дискретное множество ординат h_1, h_2 в узловых точках).

2. Полученная система уравнений является линейной по узловым контактным давлениям p , суммарным зазорам h , смещениям δ и силе P .

3. Формально решение (p_m, δ) не зависит от распределения узловых значений расстояний до поверхности S_1 и S_2 (т.е. h_1, h_2 соответственно), а только от их суммы $h = h_1 + h_2$. Таким образом, при предложенном подходе система не отражает индивидуальность каждой из сопряженных поверхностей, а только суммарность зазора между ними. Иными словами, распределение контактного давления «индифферентно» по отношению к условному «переносу» тонкого поверхностного слоя из одного тела на другое. В частности, одну из поверхностей (S_1 или S_2) можно «уплосить» за счет такой процедуры,

отнеся все их суммарные отступления от плоской формы на другую.

4. Система уравнений (34) относительно искомым (p_m, δ) хотя и выглядит идентично линейным алгебраическим уравнениям, не является линейной в силу ограничений на неотрицательность p_m внутри области контакта, их обнуление вне этой зоны, а также в силу недопустимости контакта вне этой области.

5. Формально систему (34) можно «инвертировать», т.е. трактовать ее как уравнения относительно неизвестных (p_m, δ), доставляющих системе заданное сближение δ и навязанное распределение p_m .

Последний из выводов отображает свойство обратимости и связанности, выраженное в системе уравнений (34) в явном виде. Действительно, при анализе напряженно-деформированного состояния (т.е. когда искомыми являются (p_m, δ) при заданных (h_m, P)) геометрическую форму поверхностей (в смысле интегральную функцию зазора, см. вывод 3) задает набор h_m , при этом варьирование геометрической формы осуществляется путем покомпонентного изменения h_m . С другой стороны, при определении формы зазора в сопряжении контактирующих тел (т.е. когда искомые и заданные величины меняются местами) можно задавать желательное распределение контактного давления p_m путем назначения его узловых значений, а также варьировать его, просто меняя покомпонентно массив этих узловых контактных давлений. При этом следует заметить, что и прямая (см. вывод 4), и обратная трактовка системы уравнений (34) не позволяет оперировать с ними как линейными, поскольку действует, кроме них, еще и множество ограничений (30)–(32).

Таким образом, предложенная система соотношений дает возможность, оперируя в основном только с ней, организовать решение связанной задачи анализа НДС и геометрического синтеза. При этом в качестве исходной информации задается кинематическое ограничение G . Кроме того, естественным условием выступает $h_\mu = 0$, где индекс μ соответствует узлу-точке первоначального контакта тел 1 и 2. При этом $\delta = \sum_m C_{\mu m} p_m$.

Таким образом, задавая некоторое ограничение или критерий (по напряжению, контактному давлению, перемещениям), можно непосредственно из той же разрешающей системы уравнений, что и для задачи анализа НДС, определять решение задачи геометрического синтеза.

Предложенный в статье подход объединяет в едином цикле, причем на базе одной и той же системы разрешающих соотношений, процедуры анализа НДС и геометрического синтеза СПТ, контактирующих с возможностью взаимного движения или без него. Эти особенности отличают данную постановку от традиционных, обеспечивая большую эффективность численных исследований.

Заключение. Описанный в работе подход к формулировке и решению задач анализа контактного взаимодействия и геометрического синтеза кинематически генерируемых поверхностей и сложнопрофильных тел позволяет не только ставить и решать одиночные задачи данного типа, но и организовывать в автоматизированном режиме компьютерные многовариантные расчеты в среде современных CAD/CAM/CAE-систем. При этом обеспечивается расширение функций данных систем за счет интеграции новых разработок, реализовываемых в виде специализированных модулей, которые интегрируются с универсальными программными комплексами. В итоге создается мощный инструмент компьютерного моделирования для оперативного решения проектных задач обоснования конструктивных схем и параметров элементов машиностроительных конструкций. В частности, предложены два альтернативных алгоритма геометрического синтеза СПТ с кинематически генерируемыми поверхностями. Первый предлагает принятие корректирующих решений после каждого шага решения задачи анализа НДС. Второй подход декларирует прямое совмещение процедур анализа и синтеза в процессе удовлетворения системе разрешающих соотношений.

В дальнейшем планируется применить предложенный подход к решению ряда прикладных задач для элементов конкретных машиностроительных конструкций.

Список литературы: 1. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper / H. Hertz // J. Reine Angew. Math. – 1881. – Vol. 92. – S. 156-171. 2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 509 с. 3. Signorini A. Sopra alcune questioni di elastostatica / A. Signorini // Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze. – 1933. – P. 513-533. 4. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 303 с. 5. Моссаковский В.И. Контактные задачи математической теории упругости / В.И. Моссаковский, Н.Е. Качаловская, С.С. Голикова. – Киев: Наукова думка, 1985. – 176 с. 6. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 493 с. 7. Gladwell G.M.L. Contact problems in the classical theory of elasticity / G.M.L. Gladwell. – Alphen an den Rijn: Sijthog and Noordhoff. – 1980. – 717 p. 8. Александров В.М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости / В.М. Александров // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32. – вып. 4. – С. 672-683. 9. Стеклов В.А. О равновесии упругих тел вращения / В.А. Стеклов // Сообщения Харьк. мат. об-ва. Сер. 2. – 1982. – Т. 3. – №4-5. – С. 172-251. 10. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1977. – 220 с. 11. Рвачев В.Л. Метод R-функций в контактных задачах термоупругости для тел конечных размеров / В.Л. Рвачев, Н.С. Синюков, И.П. Молотков // Докл. АН СССР. – 1991. – №4. – С. 701-704. 12. Signorini A. Questioni di elasticitanon linearizzata o semilinearizzata e semilinearizzata / A. Signorini // Rend. di Matem. e delle sue appl. – 1959. – Т. 18. – № 1-2. – P. 95-139. 13. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.–Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 383 с. 14. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости / Г. Фикера. – М.: Мир, 1974. – 159 с. 15. Киндерлерер Д. Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья. – М.: Мир, 1983. – 256 с. 16. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / А.С. Кравчук. – М.: Изд-во Московской государственной академии приборостроения и информатики, 1997. – 339 с. 17. Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. Численные методы / Н.В. Баничук, Ф.Л. Черноусько. – М.: Наука, 1973. – 238 с. 18. Kikuchi N. Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods / N. Kikuchi, J.T. Oden // SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics, Philadelphia. – 1986. – Vol. 8. – P. 156-161. 19. Solution of Variational Inequalities in Mechanics / I. Hlavacek, J. Haslinger, J. Necas [and oth.]. – Berlin, New York: Springer-Verlag, 1988. – 327 p. 20. Кравчук А.С. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров / А.С. Кравчук // Прикладная математика и механика. – Том 41. – 1977. – с. 329-337. 21. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics / J.J. Kalker // J. Inst. Math. and Appl. – 1977. – Vol. 20. – P. 199-221. 22. Wriggers P. Computational Contact Mechanics / P. Wriggers. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. –

518 p. **23. McDevitt T.W.** A mortar-finite element formulation for frictional contact problems / T.W. McDevitt, T.A. Laursen // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2000. – Vol. 48. – P.1525-1547.

24. Wohlmuth B.I. A mortar finite element method using dual spaces for the lagrange multiplier / B.I. Wohlmuth // *SIAM, Journal of Numerical Analysis*. – 2000. – Vol. 38. – P. 989-1012. **25. Кудрявцев В.Н.** Зубчатые передачи / В.Н.Кудрявцев.– М.: Машгиз, 1959. – 263 с. **26. Гохман Х.И.** Теория зацеплений, обобщенная и развитая путем анализа. – Одесса, 1886. – 7 с. **27. Литвин Ф.Л.** Теория зубчатых зацеплений / Ф.Л. Литвин. – М.: Наука, 1968. – 584 с. **28. Павлов А.И.** Современная теория зубчатых зацеплений / А.И. Павлов. – Харьков: ХНАДУ, 2005. – 100 с. **29. Шишов В.П.** Теоретические основы синтеза передач зацеплением / В.П. Шишов, П.Л. Носко, Н.В. Филь. – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2006. – 408 с. **30. Литвин Ф.Л.** Применение кинематического метода для определения кривизн и условий отсутствия подрезания огибающей двухпараметрического семейства инструментальных поверхностей / Ф.Л. Литвин, М.Л. Ерихов // В сб.: *Механика машин*. – М.: Наука, 1966. – Вып. 3-4. – С. 152-157. **31. Litvin F.L.** Computerized Simulation of Meshing and Contact of Enveloping Gear Tooth Surfaces / F.L. Litvin, C.-L. Hsiao // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993. – Vol. 102. – p. 337-366. **32. Гловински Р.** Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.Л. Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979 – 574 с. **33. Ткачук М.М.** Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями”: дисс. ... кандидата техн. наук: 05.02.09 / Ткачук Микола Миколайович. – Харків, 2010. – 203 с. **34. Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с.

Поступила в редколлегию 10.02.12