

Н.М. БОРОДАЧЕВ, д.т.н., проф., проф. каф. ТМ НАУ, Киев;
Г.П. ТАРИКОВ, д.т.н., проф., проф. каф. ДМ, ПиСМ БелГУТ, Гомель,
 Республика Беларусь;
В.В. КОМРАКОВ, к.т.н., доц., доц. каф. ИТ, ГГТУ им. П.О. Сухого,
 Гомель, Республика Беларусь;
Е.М. АКУЛОВА, асп., ГГТУ им. П.О. Сухого, Гомель, Республика Беларусь

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЛЬСА И КОЛЕСА

Предложен метод решения пространственной контактной задачи при рассмотрении взаимодействия колеса и рельса. Получены формулы, позволяющие исследовать влияние износа контактирующих поверхностей колеса и рельса на размеры площадки контакта и напряженно-деформированное состояние в области их контакта. Приведены числовые примеры решения рассматриваемой задачи. На примере решения задачи с учетом износа контактирующей поверхности колеса показано увеличение размеров площадки контакта.

Ключевые слова: колесо, рельс, износ, контактные напряжения, площадка контакта, контактирующие поверхности.

Введение и актуальность задачи. Механическое взаимодействие колеса и рельса является физической основой движения поездов по железным дорогам. Именно это взаимодействие определяет скорость и безопасность движения поездов. Требования к характеристикам контактного взаимодействия рельса и колеса противоречивые. С одной стороны, сцепление колес с рельсами должно обеспечивать малое сопротивление движению состава. С другой стороны, для обеспечения требуемой силы тяги необходимо иметь высокий уровень сцепления локомотивных колес с поверхностью рельса.

В связи с ростом грузонапряженности на железных дорогах резко увеличился выход из строя рельсов по наиболее опасному дефекту – контактно-усталостному повреждению головки рельса. В связи с этим исследования контактных задач применительно к системе колесо – рельс являются актуальными. Об этом свидетельствует большое количество работ, посвященных этой проблеме [1-4].

Цель статьи. Целью статьи является получение решения контактной задачи применительно к системе колесо-рельс, в том числе с учетом износа контактирующих поверхностей, исследование напряжений под площадкой контакта, получение формул для решения задач инженерной практики и рассмотрение конкретных примеров решения задач.

Постановка задачи. В соответствии с гипотезой Герца при определении напряженно-деформированного состояния контактирующие тела заменяются упругими полупространствами, прижатыми друг к другу по площадке контакта. Поэтому, сначала необходимо получить решение статической краевой задачи теории упругости для полупространства. Контактующие тела бочкообразной формы, рассматриваемые в этой работе, показаны на рис. 1. Здесь использованы следующие обозначения: R_1'' – больший радиус первого тела, R_1' – больший радиус второго тела; R_2'' – меньший радиус второго тела, R_2' – меньший радиус первого тела.

© Н.М. Бородачев, Г.П. Тариков,
 В.В. Комраков, Е.М. Акулова, 2014

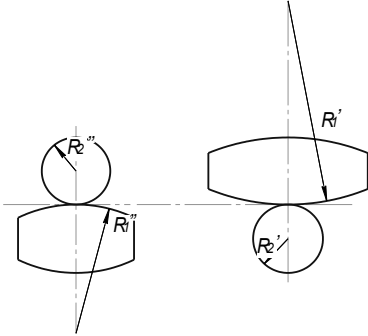


Рисунок 1 – Эскиз контактирующих тел

Материалы исследований. Дифференциальное уравнение равновесия в перемещениях при отсутствии массовых сил имеет вид [5]:

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = 0, \quad (1)$$

где \vec{u} – вектор перемещений, ν – коэффициент Пуассона, Δ – оператор Лапласа, ∇ – набла-оператор.

Воспользуемся прямоугольной системой координат x_1, x_2, x_3 .

В работе [6] показано, что уравнение (1) может быть удовлетворено, если положить

$$\vec{u} = \vec{B} - \frac{1}{2 \cdot (1-2\nu)} x_3 \nabla \varphi, \quad \Delta \vec{B} = 0, \quad \Delta \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \frac{2 \cdot (1-2\nu)}{3-4 \cdot \nu} \nabla \vec{B}. \quad (2)$$

Здесь \vec{B} – гармонический вектор, а φ – гармонический скаляр. В компонентах декартовой системы координат выражение (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= B_1 - \frac{1}{2 \cdot (1-2\nu)} x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad u_2 = B_2 - \frac{1}{2 \cdot (1-2\nu)} x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \\ u_3 &= B_3 - \frac{1}{2 \cdot (1-2\nu)} x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Гармонические функции B_1, B_2, B_3 и φ находятся из решения краевой задачи.

Пусть на плоскости $x_3 = 0$ заданы нормальные напряжения:

$$\sigma_{33} = \begin{cases} -f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega, \end{cases}$$

а касательные напряжения σ_{31} и σ_{32} отсутствуют (здесь Ω – область нагружения в плоскости $x_3 = 0$).

Удовлетворяя этим граничным условиям и используя формулы (3), находим гармонические функции B_i ($i=1, 2, 3$) и φ :

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial N}{\partial x_1} + 2a\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}; \quad B_2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial N}{\partial x_2} + 2a\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}; \\ B_3 &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial N}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \varphi; \quad \varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}; \quad a = \frac{1}{2 \cdot (1-2\nu)}; \quad \varphi = \frac{1-2\nu}{\mu} \frac{\partial N}{\partial x_3}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$N(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} f(y_1, y_2) \ln(x_3 + r) dy_1 dy_2; \quad r = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2 \right]^{1/2}.$$

Здесь μ – модуль сдвига.

Подставляя выражение (4) в (3), получаем формулы для определения компонент вектора перемещений:

$$u_1 = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial N}{\partial x_1} + 4\nu\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial x_3} \right); u_2 = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial N}{\partial x_2} + 4\nu\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_2 \partial x_3} \right);$$

$$u_3 = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial N}{\partial x_3} + (1-2\nu) \frac{\partial N}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} \right). \quad (5)$$

Далее имеем: $\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \frac{1-2\nu}{\mu} \frac{\partial N}{\partial x_3}$. Следовательно:

$$\Phi = \frac{1-2\nu}{\mu} N. \quad (6)$$

С учетом соотношения (6) формулы (5) принимают такой вид:

$$u_1 = -\frac{1}{2\mu} \left[(1-2\nu) \frac{\partial N}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial x_3} \right], u_2 = -\frac{1}{2\mu} \left[(1-2\nu) \frac{\partial N}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_2 \partial x_3} \right],$$

$$u_3 = \frac{1}{2\mu} \left[2(1-\nu) \frac{\partial N}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} \right]. \quad (7)$$

Зная компоненты вектора перемещений, можно найти компоненты тензора напряжений по формулам:

$$\sigma_{11} = 2\mu \left(\frac{\nu\Theta}{1-2\nu} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right); \sigma_{22} = 2\mu \left(\frac{\nu\Theta}{1-2\nu} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right); \sigma_{33} = 2\mu \left(\frac{\nu\Theta}{1-2\nu} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right);$$

$$\sigma_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \sigma_{23} = \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right); \sigma_{31} = \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right). \quad (8)$$

Формулы для напряжений будут использованы при определении наибольшего расчетного напряжения на глубине под площадкой контакта.

Интегральное уравнение контактной задачи и его решение. Так как $\frac{\partial}{\partial x_3} \ln(x_3 + r) = \frac{1}{r}$, то третья формула (7) принимает вид:

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{1-\nu}{\pi} \iint_{\Omega} f(y_1, y_2) \frac{1}{r} dy_1 dy_2 - x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \iint_{\Omega} f(y_1, y_2) \frac{1}{r} dy_1 dy_2 \right].$$

Частный случай этой формулы при $x_3 = 0$:

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \iint_{\Omega} f(y_1, y_2) \frac{1}{R} dy_1 dy_2, \quad (9)$$

где $R = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}$.

Функция $f(y_1, y_2)$ представляет собой нормальное давление $p(x_1, x_2)$ в области Ω . Формула (9) относится к одному упругому телу. Когда рассматривается контакт двух тел, то [5]:

$$u_3(x_1, x_2, 0) = u_3^{(1)}(x_1, x_2, 0) + u_3^{(2)}(x_1, x_2, 0) = \delta - \varphi_1(x_1, x_2) - \varphi_2(x_1, x_2) \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Здесь δ – сближение упругих тел, $\varphi_i(x_1, x_2)$ – уравнения поверхностей соприкасающихся тел. Поэтому, в случае контакта двух упругих тел уравнение (9) будет иметь вид:

$$\delta - \varphi_1(x_1, x_2) - \varphi_2(x_1, x_2) = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{1}{R} p(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (10)$$

$$\vartheta_i = \frac{1 - \nu_i}{\mu_i}, \quad (i = 1, 2).$$

Уравнение (10) является двумерным интегральным уравнением первого рода. При выводе этого уравнения касательные напряжения в области контакта не учитывались. Решая уравнение (10), можно найти закон распределения нормального давления на площадке контакта Ω .

Ограничиваясь в уравнении (10) рассмотрением лишь локальных эффектов, получаем:

$$\delta - \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{1}{R} p(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (11)$$

Вопросы, связанные с определением величин R_1 и R_2 , подробно рассматриваются в монографии [5]. В данном случае контактного взаимодействия колеса и рельса будет иметь место контакт поверхности вращения с осями, расположенными накрест при внешнем соприкосании (см. рис. 1).

$$\text{В этом случае} \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2''}; \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_1''}. \quad (12)$$

Здесь R_2'' – радиус бандажа, R_2' – радиус головки рельса.

Для неизношенных колеса и рельса полагают, что $R_1' = \infty$ и $R_1'' = \infty$. Если колесо и рельс изношены, то в этом случае $R_1' \neq \infty$ и $R_1'' \neq \infty$.

Считая величины R_1 и R_2 известными, можно приступить к решению интегрального уравнения (11). Решение этого уравнения в замкнутом виде можно получить полагая, что областью контакта Ω является эллиптическая площадка, ограниченная эллипсом E_0 : $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, $a \geq b$, $b^2 = a^2(1 - e^2)$, где a , b – полуоси эллипса, а e – эксцентриситет эллипса E_0 . Величины a , b первоначально неизвестны, они определяются в процессе решения задачи.

Решение уравнения (11) будем искать в таком виде:

$$p(x_1, x_2) = p_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} \quad \text{при } (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (13)$$

Подставляя формулу (13) в уравнение (11), получаем:

$$\delta - \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} = p_0 \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\pi} (I_0 - I_1 x_1^2 - I_2 x_2^2), \quad (14)$$

где $I_0 = bK(e)$, $I_1 = \frac{b}{e^2 a^2} [K(e) - E(e)]$, $I_2 = \frac{b}{e^2 a^2} \left[\frac{a^2}{b^2} E(e) - K(e) \right]$, $K(e), E(e)$ – полные эллиптические интегралы.

Уравнение равновесия – $P = \iint_{\Omega} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$, где P – нормальная сила, прижимающая упругие тела. Подставляя формулу (13) в уравнение равновесия, находим: $p_0 = (3/2)p_c$, $p_c = P/(\pi ab)$.

Формулу (13) можно записать в виде:

$$p(x_1, x_2) = \frac{3}{2} p_c \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right)^{1/2} \quad \text{при } (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (15)$$

Наибольшее давление на площадке контакта: $p_{\max} = (3/2)(P/\pi ab)$. Используя соотношение (14), находим:

- большую полуось эллипса E_0

$$a = \left[\frac{P(1-\nu)}{\mu} R_1 \right]^{1/3} \alpha_a; \quad \alpha_a = \left[\frac{3}{2\pi} D(e) \right]^{1/3};$$

- сближение упругих тел (колеса и рельса)

$$\delta = \left[\frac{P(1-\nu)}{\mu R_1^{1/2}} \right]^{2/3} \alpha_{\delta}; \quad \alpha_{\delta} = \left[\frac{9}{32\pi^2 D(e)} \right]^{1/3} K(e); \quad D(e) = \frac{1}{e^2} [K(e) - E(e)]$$

Эксцентриситет e эллипса E_0 можно найти из соотношения:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{(1-e^2)[K(e)-E(e)]}{E(e)-(1-e^2)K(e)}.$$

Малую полуось b эллипса E_0 находим по формуле: $b = a\sqrt{1-e^2}$. Ось x_1 направлена параллельно продольной оси рельса.

Полученные выше формулы для определения p_{\max}, δ, a, e справедливы для неизношенных колеса и рельса. Однако эти формулы можно использовать также и при наличии некоторых повреждений колеса и рельса. На рис. 2 представлены графики изменения величин $R_2/R_1, \alpha_a$ и α_{δ} в зависимости от e^2 .

Для численных расчетов использовались следующие данные. Рельс Р65 изготовлен из стали марки М76: предел прочности $\sigma_b = 1175$ МПа, предел текучести $\sigma_t = 795$ МПа, относительное удлинение 6%, относительное сужение 25%. Радиус головки рельса Р65 равен 80 мм.

Колеса грузовых и пассажирских вагонов имеют диаметр, равный 950 мм. Предел прочности стали ободов вагонных колес $\sigma_b = 880-1100$ МПа. Упругие характеристики: модуль Юнга $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,28$, модуль сдвига $\mu = 8,1 \cdot 10^4$ МПа. При проведении численных расчетов необходимо сначала проверить прочность металла в центре площадки контакта, а затем – на некоторой глубине под этой площадкой.

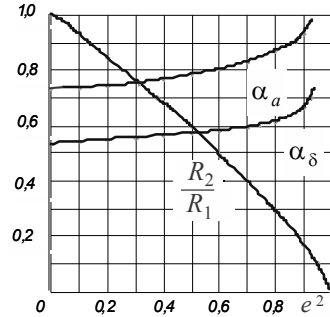


Рисунок 2 – Графики изменения величин R_2/R_1 , α_a и α_δ в зависимости от e^2

Применение полученных результатов к изношенному рельсу и колесу.

Внешняя поверхность бандажа называется поверхностью катания, ее делают двойной конической с конусностями 1:10 и 1:3,5. Рабочей поверхностью катания является участок с конусностью 1:10. Как показано в работе Н.М. Беляева [7], в процессе эксплуатации вагонов рабочая поверхность катания искривляется и поэтому $R_1'' \neq \infty$ (см. рис. 1). Профиль бандажа можно измерить и, следовательно, определить величину R_1'' . Этот радиус R_1'' обычно больше, чем радиус головки рельса R_2' .

В процессе эксплуатации рельсы также изнашиваются. Один из основных дефектов – это отслоение и выкрашивание металла на поверхности катания головки рельса. Этот дефект может быть глубиной до 3 мм, что изменяет профиль головки рельса и, следовательно, величину R_2' .

Возможна также волнообразная деформация головки рельса (волны длиной 25–150 см) в продольном направлении. В этом случае радиус $R_1' \neq \infty$. Его можно определить в результате обработки натуральных измерений рельса.

Имеются и другие дефекты рельса и колеса, которые можно учесть, используя приведенное выше решение контактной задачи.

Для того, чтобы воспользоваться приведенным выше решением контактной задачи, нужно определить сначала величины R_1 и R_2 по формулам (12). Однако для этого нужно знать величины R_1', R_1'', R_2', R_2'' . Для неизношенных рельса и бандажа $R_1' = \infty$ и $R_1'' = \infty$.

Проверка прочности материала в центре площадки контакта. Известно, что наибольшее расчетное напряжение (по третьей или четвертой теории прочности) имеют место на некоторой глубине под площадкой контакта. Для того, чтобы определить наибольшее расчетное напряжение, необходимо иметь формулы для нахождения нормальных и касательных напряжений на глубине упругого полупространства. Получить формулы для нормальных и касательных напряжений можно на основании выражений (7) и (8). Имеем:

$$\Theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{1-2\nu}{\mu} \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2}; \quad \sigma_{11} = 2\nu \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 N}{\partial x_1^2} - x_3 \frac{\partial^3 N}{\partial x_1^2 \partial x_3};$$

$$\sigma_{22} = 2\nu \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 N}{\partial x_2^2} - x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_2^2 \partial x_3}; \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} - x_3 \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^3};$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = - \left[(1-2\nu) \frac{\partial^2 N}{\partial x_1 \partial x_2} + x_3 \frac{\partial^3 N}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} \right]; \quad (16)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = -x_3 \frac{\partial^3 N}{\partial x_2 \partial x_3^2}; \quad \sigma_{31} = \sigma_{13} = -x_3 \frac{\partial^3 N}{\partial x_1 \partial x_3^2}.$$

Так как площадка контакта Ω представляет собой эллипс с полуосями a, b , то в более подробной записи выражение для $N(x_1, x_2, x_3)$ (4) будет иметь вид:

$$N(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b dy_2 \int_{-a\sqrt{1-y_2^2/b^2}}^{a\sqrt{1-y_2^2/b^2}} p(y_1, y_2) \ln(x_3 + r) dy_1.$$

С учетом формулы (13) окончательно получаем:

$$N(x_1, x_2, x_3) = \frac{p_0}{2\pi} \int_{-b}^b dy_2 \int_{-a\sqrt{1-y_2^2/b^2}}^{a\sqrt{1-y_2^2/b^2}} \left(1 - \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} \right)^{1/2} \ln(x_3 + r) dy_1. \quad (17)$$

В центре площадки контакта будет возникать наибольшее давление: $p_{\max} = 3P/2\pi ab$. В данном случае применять первую теорию прочности нельзя, то есть не следует сравнивать величину p_{\max} с временным сопротивлением σ_v . В окрестности центра площадки контакта будет иметь место сложное напряженное состояние, причем по абсолютной величине все три главных напряжения будут одного порядка. Поэтому для проверки прочности следует применить третью или четвертую теории прочности.

Сначала необходимо найти главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. В центре площадки контакта касательные напряжения равны нулю, поэтому напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ будут главными напряжениями. При $x_3 = 0$ имеем на основании (16)

$$\sigma_{11} = 2\nu \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 N}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{22} = 2\nu \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} - (1-2\nu) \frac{\partial^2 N}{\partial x_2^2}; \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2}. \quad (18)$$

На основании свойств нормальной производной потенциала простого слоя имеем:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{x_3 \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial x_3} \iint_{\Omega} \frac{1}{r} p(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \begin{cases} -f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega, \end{cases}$$

Вторая производная $\frac{\partial^2 N}{\partial x_3^2}$, входящая в формулу (18), таким образом определена. Осталось найти $\frac{\partial^2 N}{\partial x_1^2}$ и $\frac{\partial^2 N}{\partial x_2^2}$.

Имеем
$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \ln(x_3 + r) = \frac{r^2 - (x_2 - y_2)^2}{r^3(x_3 + r)} - \frac{(x_2 - y_2)^2}{r^3(x_3 + r)^2}.$$

Отсюда
$$\left. \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \ln(x_3 + r) \right|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0}} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^2}.$$

Следовательно, в центре площадки контакта

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(0,0,0) &= -2\nu p_0 + (1-2\nu)p_0\xi, \quad \sigma_{22}(0,0,0) = -2\nu p_0 - (1-2\nu)p_0\xi, \\ \sigma_{33}(0,0,0) &= -p_0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь
$$\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b dy_2 \int_{-a\sqrt{1-y_2^2/b^2}}^{a\sqrt{1-y_2^2/b^2}} \left(1 - \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2}\right)^{1/2} \frac{y_1^2 - y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^2} dy_1.$$

Введем безразмерные переменные v_1 и v_2 : $v_1 = \frac{y_1}{a}$; $v_2 = \frac{y_2}{a}$; $\beta = \frac{a}{b}$. Тогда

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta^{-1}}^{\beta^{-1}} dv_2 \int_{-\sqrt{1-\beta^2 v_2^2}}^{\sqrt{1-\beta^2 v_2^2}} (1 - v_1 - \beta^2 v_2^2)^{1/2} \frac{v_1^2 - v_2^2}{(v_1^2 + v_2^2)^2} dv_1. \quad (20)$$

Вычислив этот интеграл, получим значение ξ в зависимости от $\beta = a/b$. Интеграл (20) вычислялся численно на ЭВМ с помощью квадратурных формул. В табл. 1 приведены значения ξ в зависимости от величины β .

Таблица 1 – Значения величины ξ в зависимости от величины $\beta = a/b$

β	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
ξ	0,00	0,607	0,667	0,719	0,75	0,778	0,80	0,818	0,833
β	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0
ξ	0,857	0,867	0,875	0,882	0,889	0,895	0,90	0,905	0,909

Так как $\xi \geq 0$, то на основании формул (19) имеем: $\sigma_{11}(0,0,0) = -2\nu p_0 + (1-2\nu)p_0\xi$, $\sigma_{22}(0,0,0) = -2\nu p_0 - (1-2\nu)p_0\xi$, $\sigma_{33}(0,0,0) = -p_0$. При проверке прочности материала в контактных задачах обычно используют третью теорию прочности. Условие прочности по третьей теории имеет вид: $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$, где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение при одноосном сжатии.

В данном случае условие прочности:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = p_0(1-2\nu)(1+\xi) \leq [\sigma]. \quad (21)$$

В случае круговой площадки контакта: $p_0(1-2\nu) \leq [\sigma]$. Формула (21) получена для площадки контакта в форме эллипса. В дальнейшем будем применять $\nu = 0,28$. Поэтому условие прочности (21) примет такой вид:

$$0,44p_0(1+\xi) \leq [\sigma]. \quad (22)$$

Здесь коэффициент ξ учитывает форму эллипса, то есть отношение полуосей a к b . Формула (22) будет положена в основу числовых расчетов по проверке прочности рельса и колеса при их контактном взаимодействии.

Числовые примеры на проверку прочности материала в центре площадки контакта. В основу положим формулу (22).

Пример 1. Неизношенные рельс и бандаж. Сначала определяем величины R_1 и R_2 . Радиус головки рельса Р65 равен 300 мм. Величины R_1 и R_2 находим по формулам (12). Следовательно, $R_1' = 300$ мм, $R_1'' = \infty$. Диаметр бандажа равен 950 мм. Тогда $R_2' = 475$ мм, $R_2'' = \infty$. По формулам (12) находим $R_1 = 475$ мм; $R_2 = 300$ мм; $R_2/R_1 = 0,632$. По рис. 2 находим: $e^2 = 0,46$; $\alpha_a = 0,775$; $\alpha_\delta = 0,565$.

Пусть $P=80$ кН. Тогда $a = 5,4$ мм, $\delta = 5,77 \cdot 10^{-2}$ мм, $b = a\sqrt{1-e^2} = 3,97$ мм, $p_{\max} = 1782$ МПа, $\beta = 1,36$. По таблице находим $\xi = 0,504$. $0,44p_{\max}(1+\xi) = 1,18 \cdot 10^3$ МПа. При этом для рельса $\sigma_b = 1175$ МПа.

Так как расчетное напряжение почти совпало с пределом прочности материала рельса, то в процессе эксплуатации будет наблюдаться отслоение и выкрашивание металла на поверхности катания головки рельса.

Пример 2. Неизношенный рельс, а колесо изношено. Как показал Н.М. Беляев [7], в процессе эксплуатации вагона рабочая поверхность катания бандажа искривляется. При этом поверхность катания искривляется выпуклостью вверх. Радиус рабочей поверхности катания несколько больше радиуса головки рельса.

В данном случае $R_2' = 300$ мм, $R_1'' = -1200$ мм (знак минус учитывает новую форму поверхности катания бандажа). По формулам (12) находим: $R_1 = 475$ мм;

$\frac{1}{R_2} = 0,0025$; $R_2 = 400$ мм. В этом случае $\frac{R_1}{R_2} = 0,842$. По рис. 2 находим $e^2 = 0,21$; $\alpha_a = 0,742$; $\alpha_\delta = 0,545$. Далее $a = 5,168$ мм, $\delta = 5,565 \cdot 10^{-2}$ мм, $b = a\sqrt{1-e^2} = 4,593$ мм, $p_{\max} = 3P/2\pi ab = 1610$ МПа, $0,44p_{\max}(1+\xi) = 929$ МПа.

В примере 2 по сравнению с примером 1 величины p_{\max} и δ получились меньше. При этом площадка контакта в примере 2 увеличилась, что должно оказать положительное влияние на работу системы рельс–колесо.

Известные теории прочности не вполне адекватно отражают работу металла при всестороннем сжатии, когда главные напряжения по величине одного порядка.

Выводы. Предложен метод решения пространственной контактной задачи применительно к системе колесо–рельс, позволяющий исследовать влияние износа контактирующих поверхностей на размеры площадки контакта и

напряженно-деформированное состояние области контакта. Получены соответствующие формулы, удобные для проведения инженерных расчетов. Приведены числовые примеры решения рассматриваемой задачи.

Список литературы: 1. *Богданов В.М.* Моделирование процессов контактирования, изнашивания и накопления повреждений в сопряжении колесо-рельс / В.М. Богданов // Трение и износ. – 1996. – Том 17. – № 1. – С.12-26. 2. *Вериго М.Ф.* Взаимодействие пути и подвижного состава / М.Ф. Вериго, А.Я. Коган. – М.: Транспорт, 1986. – 559 с. 3. *Яковлев В. Ф.* Контактно-усталостная прочность рельсов и прогнозирование их работы / В. Ф. Яковлев // Сб. научн. тр. Петербург. ин-т инженеров ж.-д. трансп.; Под ред. В.Ф. Яковлева. – СПб.: ПИИТ, 1992. – С.21-43. 4. *Горячева И.Г.* Трибодинамическое моделирование эволюции профилей колес и рельсов и контактно-усталостной поврежденности при некоторых параметрах пути и экипажа / И.Г. Горячева, С.М. Захаров, С.Н. Сошенко и др. // Вестник Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. – 2010. – № 2. – С. 19-26. 5. *Лурье А.И.* Теория упругости / А.И. Лурье – М.: Наука, 1970. – 939 с. 6. *Бородачев Н.М.* Об одном методе решения пространственной задачи теории упругости в перемещениях / Н.М. Бородачев, В.В. Астанин // Проблемы прочности. – 2003. – №3. – С. 62-69. 7. *Беляев Н.М.* Труды по теории упругости и пластичности / Н.М. Беляев – М.: Гостехиздат, 1957. – 632 с.

Поступила в редакцию 11.05.2014

УДК 539.375

Контактное взаимодействие рельса и колеса / **Н.М. Бородачев, Г.П. Тариков, В.В. Комраков, Е.М. Акулова** // Вісник НТУ “ХПІ”. Серія: Машинознавство та САПР. – Х.: НТУ “ХПІ”. – 2014. – № 29 (1072). – С.18-27. – Бібліогр.: 7 назв. *ISSN 2079-0075.*

Запропонований метод розв’язання просторової контактної задачі при розгляді взаємодії колеса і рейки. Отримано формули, що дозволяють досліджувати вплив зношування контактуючих поверхонь колеса і рейки на розміри площадки контакту і напружено-деформований стан в області їх контакту. Наведено числові приклади розв’язання розглянутої задачі. На прикладі розв’язання задачі з урахуванням зношування контактуючої поверхні колеса показано збільшення розмірів площадки контакту.

Ключові слова: колесо, рейка, зношування, контактні напруження, площадка контакту, контактуючі поверхні

The method of solution of three-dimensional contact problem with interaction between wheel and rail was suggested. The formulas were found allowing us to research the influence of wear on the contact surfaces of the wheel and rail on dimensions of the contact area and the stress-strain state. Numerical examples of the problem were given. It was shown increasing the size of the contact area by solution of the problem, considering the wear of the contact surface of the wheel.

Keywords: wheel, rail, wear, contact stresses, contact area, contact surfaces

УДК. 539.3:612.76:616.001

О.В. ВЕРЕТЕЛЬНИК, м.н.с. каф. ТММиСАПР НТУ „ХПІ”;

Н.А. ТКАЧУК, д.т.н., проф., зав. каф. ТММиСАПР НТУ „ХПІ”;

И.Б. ТИМЧЕНКО, с.н.с. лаб. ортезирования и биоматериалов Ин-та

патологии позвоночника и суставов им. проф. Ситенко АМН Украины;

А.А. ДЫННИК, к.м.н. лаб. ортезирования и биоматериалов Ин-та патологии

позвоночника и суставов им. проф. Ситенко АМН Украины, Харьков;

А.В. ПОГОРЕЛАЯ, м.н. с.лаб. ортезирования и биоматериалов Ин-та патологии позвоночника и суставов им. проф. Ситенко АМН Украины, Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ОРТЕЗОВ ПРИ СПОНДИЛОДЕЗЕ ШЕЙНОГО ОТДЕЛА ПОЗВОНОЧНИКА

© О.В. Веретельник, Н.А. Ткачук, И.Б. Тимченко,
А.А. Дынник, А.В. Погорелая, 2014