

УДК 624.04:539.4:519.853

*О. А. ЛЯШЕНКО*, канд. техн. наук, доц., ГВУЗ «УГХТУ», Днепропетровск;  
*Н. Ю. НАУМЕНКО*, канд. техн. наук, доц., ГВУЗ «УГХТУ», Днепропетровск;  
*Л. В. НОВИКОВА*, ассист., ГВУЗ «УГХТУ», Днепропетровск

## АНАЛИЗ ОСНОВНЫХ АСПЕКТОВ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЁТОМ ОБЩЕЙ И ЛОКАЛЬНОЙ КОРРОЗИИ. ЧАСТЬ 2. ВЛИЯНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ НА СКОРОСТЬ КОРРОЗИИ

Предлагается анализ проблемных аспектов задачи, обусловленных влиянием напряжений на скорость коррозии. Показано, что использовавшиеся ранее численные методы решения систем дифференциальных уравнений применительно к данным задачам ненадёжны, неэффективны и неустойчивы относительно входных данных. Из.: 5. Библиогр.: 5 назв.

**Ключевые слова:** оптимизация, стержневая конструкция, коррозионный процесс

### Введение

Практически во всех известных научных исследованиях долговечность стержневых конструкций определялась моментом выхода из строя какого-либо её элемента. В реальных условиях эксплуатации конструкции могут разрушаться вследствие коррозии в местах соединения их элементов. При этом характер протекания коррозии обусловлен, прежде всего, наличием концентраторов напряжений в виде отверстий и, возможно, сварных швов. Эти факторы приводят к тому, что поле напряжений в местах соединений может быть существенно неоднородным и гипотеза о том, что коррозионный процесс протекает, так же как и для стержня в целом, очевидно, неприемлем. В связи с этим представляется актуальной проблема разработки эффективных моделей и алгоритмов оптимизации корродирующих стержневых конструкций, которые позволили бы определять их оптимальные параметры с учётом локальной коррозии в местах соединения стержней.

### Постановка проблемы

В первой части статьи [1] предложена обобщённая постановка и математическая формулировка задачи оптимального проектирования корродирующих стержневых конструкций в виде задачи нелинейного математического программирования (НЛП), которая принципиально отличается от существующих тем, что вычисление функций ограничений предполагает учёт локальной коррозии в местах соединения стержней. Там же выделены основные особенности, характеризующие задачи оптимизации конструкций такого класса, и проведен анализ проблемных аспектов задачи, вызванных, в первую очередь, появлением второй расчётной схемы, обусловленной условиями закрепления. В данной статье предлагается анализ проблемных аспектов задачи, вызванных

влиянием напряжений на скорость коррозии.

### Анализ проблемных аспектов задачи, обусловленных влиянием напряжений на скорость коррозии

Необходимость учёта механических напряжений, которые изменяются со временем, независимо от той или иной расчётной схемы объекта, при моделировании процесса коррозии приводит к появлению обратной связи в моделях расчёта долговечности и оптимального проектирования корродирующих конструкций.

На рис. 1 изображена схема расчёта напряжённо-деформированного состояния (НДС) и долговечности корродирующего элемента. Предполагается, что для моделирования коррозионного процесса в нём достаточно одной расчётной схемы.

Здесь  $\bar{x}$ ,  $\bar{z}$  – векторы геометрических характеристик и напряжений; {A} – блок расчёта НДС; {B} – блок решения систем дифференциальных уравнений (СДУ), описывающих процесс накопления геометрических повреждений.

Процедура вычисления долговечности корродирующего элемента или определение его НДС в какой-либо момент времени предполагает совместное использование какого-либо численного метода расчёта НДС (блок {A}) и численного же метода решения задачи Коши для СДУ, описывающих процесс накопления повреждений (блок {B}).

Расчёт НДС нагруженных корродирующих конструкций многими авторами сводится к использованию метода конечных элементов (МКЭ) [2]. Наряду с очевидными преимуществами, использование МКЭ при расчёте НДС и долговечности конструкций с учётом происходящих в них коррозионных процессов предполагает разрешение целого ряда проблем.

Для решения СДУ используются, как правило, одношаговые методы типа Рунге-Кутты. Процесс деформирования конструкций моделируется путём численного решения задачи Коши для данной системы. При этом возникает погрешность  $v$  решения СДУ (рис. 1). СДУ в общем случае имеет вид:

$$\frac{dC}{dt} = \Psi[\bar{\rho}, \sigma(C)], \quad C|_{t=0} = C_0, \quad (1)$$

где  $\bar{\rho}$  – вектор параметров среды,  $\bar{\rho} = (v_0, k)$ ;  $C = [C]_{n \times N}$ ,  $\Psi = [\Psi]_{n \times N}$  – матрицы изменяющихся параметров конструкции и известных функций размерности  $n \times N$ ;  $\sigma$  – напряжение;  $t$  – время;  $n$  – число изменяющихся параметров конечных элементов (КЭ);  $N$  – количество элементов.

Любой параметр КЭ в произвольный момент времени при использовании, например, метода Эйлера определяется по формуле:

$$C_{ij}^s = C_{ij}^{s-1} + \Delta t^s \Psi_{ij}[\bar{\rho}, \sigma_i(C^{s-1})]; \quad i = \overline{1, N}; j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где  $s$  – номер шага по времени. Таким образом, значение матрицы  $C$  на данном шаге определяется по её значению на предыдущем.

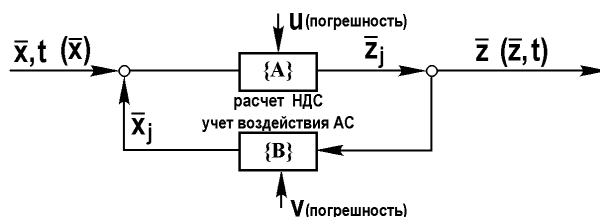


Рис. 1. Схема решения задачи расчёта НДС и долговечности

Расчёт НДС и долговечности нагруженных конструкций, которые подвержены влиянию агрессивных сред, является связанной задачей, в которой совместно решаются задачи блоков {А} и {В}. А, значит, в каждом узле временной сетки на каждом шаге решается задача с помощью МКЭ. Это объективно обуславливает невысокую эффективность алгоритма.

Многошаговые методы имеют более высокую скорость расчёта, чем одношаговые. Но они обладают рядом недостатков, подробно описанных в работе [3], существенных для решения задачи.

Рассмотрим основные требования к алгоритму решения поставленной задачи, без удовлетворения которых её решение не представляется целесообразным.

Надёжность алгоритма. Основной причиной нарушения требования надёжности алгоритма является наличие точки разрыва второго рода функции напряжений. В окрестности этой точки решение становится неустойчивым (малому приращению аргумента  $\Delta t$  соответствует большое приращение функции  $\Delta \sigma$ ). При использовании методов типа Рунге-Кутты, возможно возникновение аварийного завершения работы программы вследствие системных ошибок (деление на ноль, изменение знака геометрических размеров, переполнение, извлечение корня из отрицательного числа).

Пусть изменение некоторого обобщённого геометрического параметра стержня, однозначно определяющего его площадь,  $h$  согласно (2) описывается зависимостью:

$$h^s = h^{s-1} - \Delta t^s v_0 (1 + k \sigma(h^{s-1})),$$
 то есть функцией  $h^s = func(h^{s-1}, \Delta t^s, v_0, k, \sigma(h^{s-1}))$  пяти аргументов. Здесь  $\sigma(h^{s-1}) = \frac{Q}{A(h^{s-1})}$  – значение

напряжения на предыдущем шаге, где  $Q$  – осевое усилие в стержне. В процессе решения задачи сочетание значений аргументов функции может оказаться таковым, что значение геометрического размера стержня станет меньше некоторой положительно заданной малой величины  $\lambda$ :  $h^s < \lambda$ . Тогда:  $\lim_{h^s \rightarrow 0} \sigma(h^s) = \infty$ , а, значит, вследствие превышения максимальной теоретической емкости ячейки, работа программы завершается аварийно.

Также может возникнуть ситуация, когда значение геометрического параметра стержня станет не просто меньшим некоторой заданной малой величины, а будет иметь отрицательное значение ( $h^s < 0$ ), если существующий алгоритм не предусматривает ограничение по изменению величины геометрических характеристик корродирующих элементов конструкций.

В качестве иллюстрации приведём результаты решения некоторых модельных задач для сжатого стержня кольцевого поперечного сечения с использованием известных алгоритмов. Стержень с площадью поперечного сечения  $A_0 = 8,64 \text{ см}^2$  (внешний диаметр  $D = 6,0 \text{ см}$ ) и коэффициентом слитности (отношение величины начального периметра к начальной площади сечения)  $\eta = P_0/A_0 = 2,18 \text{ см}^{-1}$  сжимается продольной силой  $Q = 50 \text{ кН}$ . Изменение внешнего диаметра сечения стержня во времени показано на рис. 2. Результаты решения приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Решение задачи долговечности

$t, лет$	$\delta, см$	$\sigma, МПа$
0,0	0,000	57,9
0,5	0,059	66,3
1,0	0,119	77,7
1,5	0,182	93,9
2,0	0,246	119,5
2,5	0,316	166,7
3,0	0,394	294,5
3,5	0,506	-4997,5
4,0	0,188	96,0
4,5	0,253	123,0
5,0	0,323	174,0
5,5	0,403	322,5

Погрешность численного решения в сравнении с аналитическим [4] составила при этом 79%. Это связано с тем, что в некоторый момент времени ( $t = 3,5 года$ ), значение величины внешнего диаметра стало меньше внутреннего. Соответственно значение толщины стенки профиля кольцевого сечения принимает отрицательное значение, то есть точка разрыва второго рода оказывается внутренней точкой временного интервала, что не было учтено данным алгоритмом. При этом условие исчерпания несущей способности по критерию прочности  $\sigma^s < [\sigma]$  выполняется на всех итерациях. Избежать такой ситуации можно предусмотрев в алгоритме расчёта долговечности логический блок, позволяющий учесть смену знака геометрического размера, либо изменив длину шага интегрирования СДУ. В последнем случае требуется наличие дополнительной процедуры, позволяющей осуществлять выбор такого шага, при котором данная ситуация была бы невозможной, что представляет собой самостоятельную задачу.

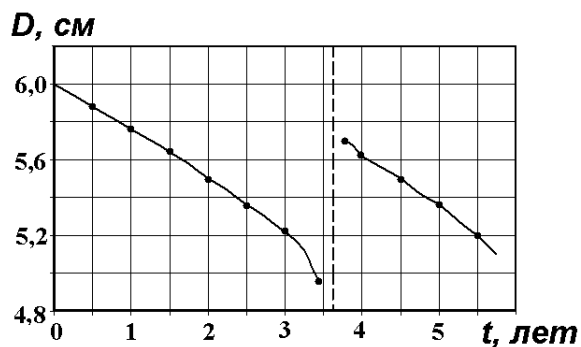


Рис. 2. Изменение значений внешнего диаметра сжатого стержня во времени

#### Обеспечение надёжности

численного алгоритма, таким образом, возможно за счёт введения дополнительных логических блоков (контроль знака геометрических размеров, ввода значений исходных данных и так далее), которые, тем не менее, не гарантируют невозможность аварийного завершения работы программы вследствие системных ошибок.

Достоверность решения. Под достоверностью решения в дальнейшем подразумевается получение результата с погрешностью, не превышающей некоторой ограниченной величины. Рассмотрим те ситуации, когда численные алгоритмы позволяют получить некоторый результат, который не может рассматриваться даже как приближённое решение задачи.

Долговечность конструкции определяется моментом времени, когда напряжения в каком-либо элементе достигнут своих предельных значений. Элемент, в котором в данный момент времени запас несущей способности имеет наименьшее значение, в дальнейшем будем называть ведущим элементом. В ходе решения задачи может возникнуть ситуация, когда в какой-то момент времени произойдет смена ведущего элемента. При использовании методов типа Рунге-Кутта предусмотреть такую ситуацию без усложнения алгоритма весьма затруднительно. Предположительно, любой элемент в произвольный момент времени может стать ведущим, следовательно, на каждом шаге решения задачи необходимо отслеживать изменение напряжений в каждом из них и сохранять эту информацию, что привело бы к существенному увеличению размерностей рабочих массивов.

В качестве иллюстрации того, что методы типа Рунге-Кутта не всегда позволяют получить достоверный результат решения задачи долговечности, рассмотрим ферму, расчётная схема и нагрузка которой представлены на рис. 3. Элементы фермы имеют кольцевое поперечное сечение. Параметры конструкции:  $L = 125 \text{ см}$ ;  $Q = 50 \text{ кН}$ . Материал конструкции: сталь ВСтЗпсб-1. Параметры коррозионного износа:  $v_0 = 0,075 \text{ см/год}$ ;  $k = 0,005 \text{ МПа}^{-1}$ .

На рис. 4 показаны кривые изменения напряжений во времени для стержневых КЭ (1) и (2). В начальный момент времени максимальное значение напряжения было в КЭ (2). Однако, начиная с некоторого момента времени, его превысило значение напряжения в КЭ (1).

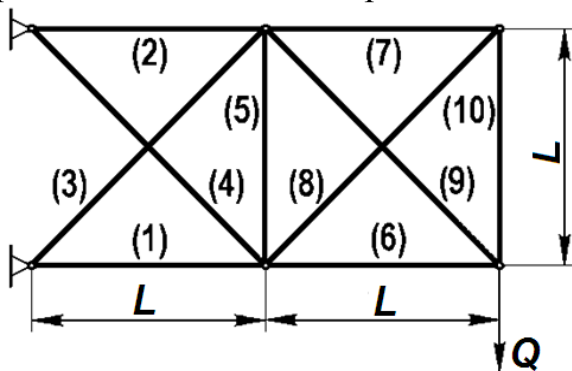


Рис. 3. Десятиэлементная консольная ферма

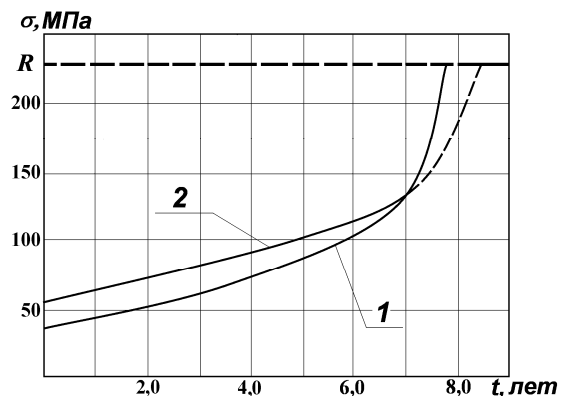


Рис. 4. Рост напряжений в КЭ

В условиях данной модельной задачи, когда алгоритм не предусматривает возможную смену ведущего элемента, значение долговечности конструкции, соответствующее долговечности КЭ (2), составило  $8,507 \text{ лет}$ . Долговечность конструкции, определённая с учётом возможной смены ведущего элемента, составляет  $7,816 \text{ лет}$ . Погрешность решения при этом составила около  $8,12\%$ . Для учёта смены ведущего элемента необходимо сохранять информацию о величине текущих и критических напряжений во всех элементах конструкции. Такое, на первый взгляд, несущественное усложнение алгоритма может оказаться весьма неудобным при расчёте конструкций (не только стержневых), в которых количество элементов исчисляется десятками, а часто и сотнями.

Из решения описанной выше задачи, которое получено после адаптации

алгоритма, следует, что в процессе эксплуатации происходит смена ведущего элемента. Результаты решения представлены в табл. 2. Решение 1 получено при игнорировании смены ведущего элемента, решение 2 – с учётом его смены.

Таблица 2 - Значения долговечности и вид активного ограничения

Метод решения		Активное ограничение	
		$R=240 \text{ МПа}$	$[f]=1/400 L$
Численное решение		1. $t^* = 8,507 \text{ лет}(9,33\%)$	$t^* = 7,314 \text{ лет}(0,04\%)$
$\Delta t = 0,1 \text{ года}$	$n = 85 \quad (n = 73)$	2. $t^* = 7,816 \text{ лет}(0,45\%)$	
Эталонное решение		$t^* = 7,781 \text{ лет}$	$t^* = 7,311 \text{ лет}$
$\Delta t = 0,005 \text{ лет}$	$n = 1557 \quad (n = 1460)$		

Следует отметить, что при активном ограничении по жёсткости расхождение результатов находится в рамках приемлемой погрешности. Это обусловлено тем, что предельное состояние в данном случае определяется не напряжением, а перемещением, и смена ведущего элемента не оказывает влияния на результат решения задачи.

Таким образом, игнорирование смены ведущего элемента, очевидно, может привести к серьезному искажению полученных результатов. Гарантировать достоверность решения задачи долговечности при использовании методов типа Рунге-Кутта без усложнения логики алгоритма или увеличения размерностей рабочих массивов невозможно.

Устойчивость алгоритма относительно входных данных. При решении оптимизационной задачи заранее неизвестны конкретные значения варьируемых параметров (ВП), которые будут реализованы на данном шаге поиска оптимального проекта. Как правило, величина шага интегрирования СДУ является параметром, который не изменяется во время работы программы. Следовательно, число итераций при постоянном значении заданной долговечности также постоянно. В этом случае погрешность численного решения будет существенно зависеть от конкретных значений ВП на данном шаге задачи НПП. Таким образом, алгоритм, основанный на использовании методов типа Рунге-Кутта, при всех вышеперечисленных недостатках может оказаться неустойчивым относительно входных данных.

Для численной иллюстрации нарушения устойчивости известных алгоритмов относительно входных данных, предлагается решение задачи долговечности стержня растянутого силой  $Q$ . На рис. 5 приведены кривые роста напряжений для стержней с различными площадями поперечных сечений и осевой нагрузкой. Рассматривались размеры поперечного сечения и величина расчётной нагрузки, для которых долговечность стержня, определённая по аналитической формуле, была равна  $t^* = 8,00$  годам. Затем задача решалась численно. Оценивались значения напряжений в момент времени  $t^*$ . При использовании методов типа Рунге-Кутта для вычисления долговечности при величине шага по времени  $\Delta t = 0,25$  года погрешность численного решения составила 0,34% при  $R/\sigma_0 = 2$  (кривая 1), 2,44% при  $R/\sigma_0 = 6$  (кривая 2) и 25,06%

при  $R/\sigma_0=16$  (кривая 3). При этом для  $A_0=52,89 \text{ см}^2$ ;  $\eta=0,49 \text{ см}^{-1}$  (кривая 1) значения напряжений оказались равными  $\sigma=239,18 \text{ МПа}$ ; для  $A_0=9,36 \text{ см}^2$ ;  $\eta=1,16 \text{ см}^{-1}$  (кривая 2) –  $\sigma=234,14 \text{ МПа}$ ; для  $A_0=4,83 \text{ см}^2$ ;  $\eta=1,61 \text{ см}^{-1}$  (кривая 3) –  $\sigma=179,85 \text{ МПа}$ . Такое расхождение численных решений связано, очевидно, с использованием равномерной временной сетки.

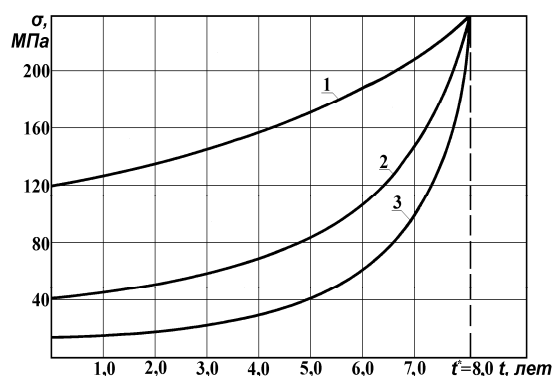


Рис. 5. Зависимость напряжений от времени

Таким образом, традиционные алгоритмы, основанные на одношаговых методах, могут оказаться неустойчивыми относительно входных данных. Этой ситуации можно избежать при увеличении числа итераций (уменьшении шага интегрирования  $\Delta t$ ) или использования неравномерного шага  $\Delta t$ .

**Эффективность.** Если при решении задачи расчёта НДС поведение конструкции в агрессивной среде исследуется путём численного решения задачи Коши для СДУ (3) с помощью одношаговых методов, а для обеспечения приемлемой точности решения задачи долговечности, шаг по времени  $\Delta t$  приходится принимать достаточно малым, причём в каждом узле временной сетки решается задача с помощью МКЭ, то общее число обращений к процедуре МКЭ может достигать нескольких десятков, а в некоторых случаях и сотен. В этом случае возможно накопление погрешности вычислений при решении систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами [5]. Для того, чтобы получить для всех случаев, рассматриваемых в предыдущем примере, результат с погрешностью не более 0,35%, необходимо выполнить не менее 200 итераций методом Эйлера. Следовательно, возникает проблема уменьшения числа итераций при численном решении задачи Коши и одновременно снижения размерности задачи МКЭ.

Задача долговечности (блоки {A} и {B}) решается на каждом шаге поиска оптимального проекта при проверке функций ограничений. Число же шагов итерационного процесса при решении задачи НЛП исчисляется десятками тысяч. Проблема повышения эффективности вычислительных алгоритмов может оказаться не менее значимой, чем вышеперечисленные проблемы.

Совершенно очевидно, что вычислительные алгоритмы, основанные на непосредственном использовании методов типа Рунге-Кутты в той их реализации, которая использовалась до настоящего времени, зачастую, ненадёжны, неэффективны, неустойчивы относительно входных данных, а в ряде случаев не гарантируют получение приемлемого результата.

### Основные результаты и выводы

На основании проведенного анализа проблем, вызванных влиянием напряжений на скорость коррозионного процесса, можно сделать следующий вывод. Непосредственное использование существующих численных методов решения СДУ применительно к поставленной задаче не только не является

ефективним, но, в ряду випадків не дозволяє отримати її рішення навіть для стержневої конструкції. При наявності розрахункової схеми плосконапруженої пластини вказані недоліки методу будуть, очевидно, проявлятися ще сильніше.

Для успішного рішення поставленої задачі необхідно наявність такого алгоритму рішення СДУ, який мав би не тільки більш високу ефективність порівняно з відомими, але й забезпечував надійне рішення при наявності точки розриву другого роду функції напружень.

**Список літератури:** 1. *Ляшенко, О. А.* Аналіз основних аспектів задачі оптимізації стержневих конструкцій з урахуванням загальної та локальної корозії. Частина 1. Постановка задачі і проблеми, викликані наявністю двох розрахункових схем [Текст] / *О. А. Ляшенко, Н. Ю. Науменко, Л. В. Новикова* // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ» – 2012. – №34. – С. 17-26. 2. Метод кінцевих елементів: [Учеб.посібник для вузів] / [Варвак П.М., Бузун І. М., Городецький А. С. і др.]; під ред. Варвака П. М. – Київ: Вища Школа, 1981. – 176 с. 3. *Мак-Кракен, Д.* Чисельні методи і програмування на ФОРТРАНЕ [Текст] / *Д. Мак-Кракен, У. Дорн*; пер з англ. *Б. Н. Казака*, під ред. і з доповненням *Б. М. Наймарка*. – М.: Мир, 1977. – 580 с. 4. *Зеленцов, Д. Г.* Розрахунок конструкцій з змінюваною геометрією в агресивних середовищах. Стержневі системи [Текст] / *Д. Г. Зеленцов*. – Дніпропетровськ: УГХТУ, 2002. – 168 с. 5. *Колесник, І. А.* Про похибку кінцево-елементних процедур в задачах довговічності багатоелементних конструкцій, які підлягають корозійному зносу. [Текст] / *Колесник І. А., Зеленцов Д. Г., Храпач Ю. О.* // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2002. – № 70. – С. 176–181.

---

УДК 624.04:539.4:519.853

**Аналіз основних аспектів задачі оптимізації стержневих конструкцій з урахуванням загальної та локальної корозії. Частина 2. Вплив напруги на швидкість корозії** / *Ляшенко О. А., Науменко Н. Ю., Новикова Л. В.* // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Нові рішення в сучасних технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. - № 44(950). С. 3-10

Пропонується аналіз проблемних аспектів задачі, обумовлених впливом напружень на швидкість корозії. Показано, що чисельні методи розв'язання систем диференціальних рівнянь, що використовувалися раніше, стосовно цих задач ненадійні, неефективні і нестійкі відносно вихідних даних. Из.: 5. Бібліогр.: 5 назв.

**Ключові слова:** оптимізація, стержнева конструкція, корозійний процес

UDK 624.04:539.4:519.853

**The analysis of the main aspects concerning rod-shaped construction optimization problem condering general and local corrosion. Part 2. Problems arising from the influence of stress on the velocity of corrosion** / *Liashenko O. A., Naumenko N. J., Novikova L.V.* / Bulletin of NTU “KhPI”. Subject issue: New desicions of modern technologies. – Kharkov: NTU “KhPI”. – 2012. - № 44(950). P. 3-10

The analysis of problematic aspects of the task, caused by the influence of stress on the velocity of corrosion, has been proposed. It has been shown that numerical methods, that have been used for solving systems of differential equations, in the context of considered task are unreliable, inefficient and unstable against the input data. Im.: 5; Bibliogr.: 5

**Keywords:** optimization, rod-shaped construction, corrosion process

*Надійшла до редакції 30.06.2012*