

Запропоновано оптимальні величини натягів при прокатці жерсті №20 на стані №1 комбінату "Запоріжсталь".

**Ключові слова:** контактні напруження, сила, рівновага, сталій процес, модель тертя.

In paper, on the basis of a new technique of an estimation of stability of process of a strain, boundary conditions in the established regime are theoretically analysed at simple process of rolling and different regimes of a friction. It is theoretically investigated agencies of a tension on stability of process and the total moment of a strain. Optimum magnitudes of tension are offered at rolling of a tin №20 on a mill №1 integrated works "Zaporozhstal".

**Keywords:** Contact voltages, force, equilibrium, resistant to process, a friction sample piece.

УДК 621.771

**А. В. НОГОВИЦЫН**, докт. техн. наук, Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины, Киев

**И. Р. БАРАНОВ**, ведущий инженер, Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины, Киев

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ РАСПЛАВА МЕТАЛЛА ПРИ ВАЛКОВОЙ РАЗЛИВКЕ-ПРОКАТКЕ

Предложена математическая модель течения расплава металла в межвалковом зазоре при валковой разливке. Жидкий металл рассматривали как линейную вязкую среду. Методом конечных разностей решали систему, состоящую из уравнения Лапласа для функции тока и уравнения Пуассона для напряженности вихря, преобразованную для бицилиндрических координат. Приведены результаты расчета скоростей течения.

**Ключевые слова:** валковая разливка металла, уравнения Лапласа и Пуассона, бицилиндрическая система координат, метод конечных разностей.

**Введение.** При валковой разливке жидкий металл увлекается в сильно сужающийся межвалковый зазор ("комиль-зону") вращающимися валками, что дает основание предполагать о наличии в нем достаточно сложного по характеру течения. В работе [1] дан критический анализ работ, посвященных теоретическому описанию параметров тепломассопереноса в расплаве между вращающимися валками-кристаллизаторами, и отмечена актуальность дальнейшего развития теоретических основ процесса валковой разливки.

**Применение бицилиндрической системе координат.** Для случая валковой разливки наиболее подходящей криволинейной системой координат является бицилиндрическая. Окружности валков-кристаллизаторов могут являться координатными линиями этой системы. Бицилиндрическая система координат применялась в работах [2-5] для исследования параметров вязкопластического течения в очаге деформации при плоской прокатке и показала ряд преимуществ перед декартовой системой координат.

Представим "комиль-зону" в бицилиндрических координатах  $\xi$  и  $\eta$  (рис. 1).

Связь декартовых координат  $X$  и  $Y$  с бицилиндрическими  $\xi$  и  $\eta$  выражается соотношениями:

$$X = \frac{a \cdot \sin \xi}{ch\eta - \cos \xi}, \quad Y = \frac{a \cdot sh\eta}{ch\eta - \cos \xi}, \quad (1)$$

где  $a$  – расстояние от начала декартовых координат по оси  $OX$  до полюса  $F$ .

Линии  $\xi = \text{const}$  являются окружностями, включающими хорду  $FF_1$ , а линии  $\eta = \text{const}$  – ортогональными окружностями, уравнения которых имеют вид:

$$(X - a \cdot cth\eta)^2 + Y^2 = \frac{a^2}{sh^2\eta}, \quad (2)$$

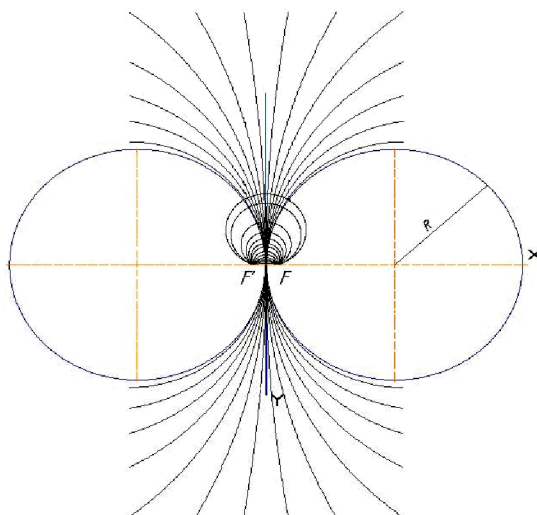


Рис. 1 – Схема валковой разливки в бидилиндрической системе координат

Из этого уравнения следует, что радиусы упомянутых окружностей выражаются формулой:

$$r = \pm \frac{a}{sh\eta}, \quad (3)$$

а их центры лежат на оси ОХ на расстоянии  $b$  от начала координат О, где

$$b = a \cdot ch\eta. \quad (4)$$

"Комиль-зона" со стороны входа ограничена координатой  $\xi_0$ , со стороны выхода – координатой  $\xi_1$ . Окружности валков с радиусом  $R$  являются координатными линиями  $\pm\eta_0$ . Центр окружности валка расположен на расстоянии  $b=R+H_1$  от начала координат, где  $H_1$  – половина толщины полосы на выходе из валков-кристаллизаторов.

Выведем формулы для определения  $a$ ,  $\eta_0$  и  $\xi_0$ . Из (3), (4) имеем:

$$R = \frac{a}{sh\eta_0}, \quad (R+H_1) = a \cdot ch\eta_0. \quad (5)$$

Разделим второе равенство из (5) на первое:

$$\frac{R+H_1}{R} = ch\eta_0. \quad (6)$$

Из (6) получим выражение для  $\eta_0$ :

$$\eta_0 = \ln \left( 1 + \frac{H_1}{R} \pm \sqrt{\left( 1 + \frac{2H_1}{R} \right)^2 - 1} \right). \quad (7)$$

Очевидно, что на оси симметрии "комиль-зоны" ( $Y=0$ ) координата  $\eta$  равна 0. Подставив во второе выражение (1)  $X=H_0$  и  $\eta=\eta_0$  получим формулу для определения входной границы "комиль-зоны":

$$\xi_0 = \arccos \left( ch\eta_0 - a \frac{sh\eta_0}{H_0} \right), \quad (8)$$

где  $H_0$  – половина ширины "комиль-зоны" на входе в межвалковый зазор.

На выходе из "комиль-зоны" ( $\xi = \xi_1$ ) координата  $\xi$  равна  $\pi$ .

С целью получения формулы для определения величины  $a$  возведем в квадрат первое равенство (5) и выражение (6) и вычтем из второго первое:

$$ch^2\eta_0 - sh^2\eta = \left( 1 + \frac{H_1}{R} \right)^2 - \frac{a^2}{R^2}. \quad (9)$$

Поскольку левая часть полученного выражения равна единице, то после несложных преобразований получим:

$$a = \sqrt{H_1(2R + H_1)}. \quad (10)$$

Последовательность графического построения бицилиндрической системы такова. После определения межфокусного расстояния  $2a$  отмечаем на оси  $OX$  точки  $F$  и  $F_1$  и проводим через них серию окружностей с центрами на оси  $OY$ . Затем, изменяя координату  $\eta$  от  $O$  до  $\eta_0$  с выбранным шагом, определим радиусы ортогональных окружностей  $r$  ( $R \leq r < \infty$ ) по формуле (3) и местонахождение центров этих окружностей на оси  $OX$  по формуле (4). После проведения этого семейства окружностей построение криволинейной системы координат закончено.

Плоская "комиль-зона" в бицилиндрической системе координат представляет собой криволинейную ортогональную область  $\{0 < \eta < \eta_0; -\pi \leq \xi \leq \xi_0\}$ .

**Уравнения вязкого течения в бицилиндрических координатах.** Для перевода дифференциальных уравнений течения сплошной среды в частных производных для вязкой жидкости из декартовой системы координат  $(x, y)$  в ортогональную криволинейную систему  $(\xi, \eta)$  имеются установленные соотношения.

Для скоростей деформаций:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\xi\xi} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_\xi}{\partial \xi}; \quad \dot{\epsilon}_{\eta\eta} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta}; \\ \dot{\gamma}_{\xi\eta} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{V_\eta}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\xi}{H_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Для условия несжимаемости:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (H_2 V_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (H_1 V_\eta) = 0. \quad (12)$$

Для составляющих скорости:

$$V_\xi = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}; \quad V_\eta = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \quad (13)$$

Для напряженности вихря:

$$\omega = \frac{1}{2H_1 H_2} \left[ \frac{\partial (H_1 V_\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial (H_2 V_\xi)}{\partial \eta} \right]. \quad (14)$$

Для уравнения связи между напряженностью вихря и функцией тока:

$$-\frac{1}{2H_1H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right] = \omega. \quad (15)$$

Для уравнения напряженности вихря:

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \xi} (v\omega) \right] - \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \eta} (v\omega) \right] = 0. \quad (16)$$

где  $v$ - кинематическая вязкость разливаемого металла.

В системе бицилиндрических координат параметры Ляме  $H_1$  и  $H_2$  принимают следующие значения:

$$H_1 = H_2 = H = \frac{a}{ch\eta - \cos\xi}, \quad (17)$$

При  $v = \text{const}$  и с учетом большой вязкости жидкого металла основная система кинематических уравнений (15)-(16) вязкой среды приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial \psi^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \psi^2}{\partial \eta^2} + 2H^2\omega = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} = 0. \quad (19)$$

Для расчета напряжений будем использовать известные соотношениями Коши-Римана для линейно вязкой среды :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} &= -\mu \frac{\partial \omega}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial P}{\partial \eta} &= \mu \frac{\partial \omega}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость разливаемого металла.

Для перехода к безразмерной задаче введем безразмерные координаты:

$$\bar{\xi} = \frac{\xi + \pi}{\xi_0 + \pi}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\xi_0 + \pi}, \quad \bar{H} = \frac{H}{a}.$$

Это позволяет преобразовать область интегрирования в прямоугольник со сторонами:

$$0 < \bar{\xi} < 1, \quad 0 < \bar{\eta} < \eta_0.$$

Безразмерные скорости течения металла представим в отношении к скорости вращения вала  $V_B$ :

$$\bar{V}_\xi = \frac{V_\xi}{V_B}, \quad \bar{V}_\eta = \frac{V_\eta}{V_B}.$$

Тогда уравнения (18) и (19) примут вид:

$$\frac{\partial \bar{\psi}^2}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial \bar{\psi}^2}{\partial \bar{\eta}^2} + 2\bar{H}^2 \bar{\omega} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \bar{\eta}^2} = 0, \quad (22)$$

где

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{aV_B(\xi_0 + \pi)}, \quad \bar{\omega} = \frac{a(\xi_0 + \pi)}{V_B} \omega.$$

**Граничные условия для кинематической задачи.** Дифференциальные уравнения в частных производных (21–22) представляют собой математическую модель внутреннего механизма изучаемых процессов и дают сравнительно мало информации о решении. Так, все многообразие течений сплошных сред (газов, жидкостей, металлов) описывается решениями одних и тех же дифференциальных уравнений. Различные течения (т.е. решения) отличаются только граничными и начальными условиями, а также параметрами динамического и реологического подобия, такими, как число Рейнольдса для вязкой среды. Опыт показывает, что решающее влияние на достоверность решения рассматриваемой задачи оказывает правильное задание кинематических граничных условий [3, 4].

Область интегрирования представляет собой половину "комиль-зоны", которая ограничена координатными линиями  $\eta = 0$  (ось симметрии),  $\eta = \eta_0$  (дуга окружности валка-кристаллизатора),  $\xi = \xi_0$  (входное сечение "комиль-зоны"),  $\xi = -\pi$  (выходное сечение "комиль-зоны").

Определим значения и выражение для функции тока  $\Psi$  и напряженности вихря  $\omega$  на указанных границах.

Линия симметрии ( $\eta = 0$ ).

Естественно предположить, что вдоль оси симметрии течения функция тока имеет постоянное значение, поскольку с физической точки зрения она представляет собой расход металла между линиями тока. Для выбранной системы отсчета получаем, что

$$\psi|_{\eta=0} = 0. \quad (23)$$

Граничное условие для вихря имеет также очень простой вид:

$$\omega|_{\eta=0} = 0.$$

Линия контакта с валком ( $\eta = \eta_0$ ).

Задание граничного значения для функции тока здесь также не представляет серьезных затруднений. Если учесть, что поверхность валка непроницаема для разливаемого металла, то значение функции тока на ней должно соответствовать половине расхода металла ( $Q$ ) в данном сечении ( $\xi$ ) "комиль-зоны":

$$\psi|_{\eta=\eta_0} = -\frac{1}{2}Q(\xi). \quad (24)$$

Выведем формулу для расчета вихря на границе металла с валком с учетом наличия зон прилипания и скольжения. Запишем разложение функции тока  $\Psi$  в окрестности точки  $(\xi, \eta_0)$ :

$$\psi(\xi, \eta_0 - d) \approx \psi(\xi, \eta_0) + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Big|_{\xi, \eta_0} d + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \Big|_{\xi, \eta_0} \times d^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} d^3.$$

С учетом того, что 
$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = HV_\xi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2H^2 \omega,$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2H^2 \omega \right), \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta_0 \partial \xi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (-HV_\eta),$$

в разностной форме получим:

$$\begin{aligned} \omega_{i,m} = & \frac{3}{2H_{i,m}^2 d^2} (\psi_{i,m-1} - \psi_{i,m}) - \frac{3}{2H_{i,m} d} V_{\xi_{i,m}} + \frac{3}{4H_{i,m}} \frac{\psi_{i+1,m} - 2\psi_{i,m} + \psi_{i-1,m}}{h} + \\ & + \frac{d}{4H_{i,m}^2} \frac{(HV_\eta)_{i+1,m} - 2(HV_\eta)_{i,m} + (HV_\eta)_{i-1,m}}{h^2} - \frac{\omega_{i,m-1}}{2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Граничное условие (25) решающим образом определяет характер пластического течения в очаге деформации, достоверность которого зависит от правильности задания скорости  $V_{\xi_{i,m}}$  на линии контакта металла с валком [4]. Очевидно лишь, что в зоне прилипания относительное скольжение металла отсутствует и  $V_{\xi_{i,m}} = 0$ .

Входное и выходное сечения ( $\xi = \xi_0$ ;  $\xi = \xi_1$ ).

При постановке кинематических граничных условий в сечении входа в "комиль-зону" исходили из того, что за ее пределами составляющая скорости  $V_\eta$  разливаемого металла равна нулю ( $V_\eta = 0$ ), а компонента скорости  $V_\xi$  свободно развивается. Поэтому применили так называемые "свободные" условия, рекомендуемые П. Роучем [6]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0. \quad (26)$$

Физический смысл условий (26) состоит в том, что за пределами "комиль-зоны" вертикальная составляющая скорости прокатываемого металла равна нулю ( $V_\eta = 0$ ), а горизонтальная ( $V_\xi$ ) свободно развивается.

На выходе металла из валков-кристаллизаторов предположили, что закристаллизовавшийся металл является твердым телом, т.е. скорость  $V_\eta$  металла равны нулю, а  $V_\xi$  – постоянна по толщине полосы. В этом случае:

$$\psi = \int_0^h HV_\xi \cdot d\eta, \quad \omega = 0. \quad (27)$$

**Метод решения кинематической задачи.** Решим систему уравнений (21) – (22) конечно-разностным методом. Область интегрирования  $\Omega$  представляет собой криволинейный прямоугольник:

$$\Omega = \{0 < \bar{\xi} < 1; 0 < \bar{\eta} < \eta_0\}$$

Разобьем сторону  $0 < \bar{\xi} < 1$  на  $N$  равных частей с шагом  $h = 1/N$ , а сторону  $0 < \bar{\eta} < \eta_0$  на  $M$  равных частей с шагом  $d = \eta_0/M$ . Проведем из полученных точек два семейства координатных кривых. Точки пересечения этих кривых ( $\xi_i, \eta_j$ ) являются узлами разностной сетки, причем  $\xi_i = ih$  и  $\eta_j = jd$ , где  $i = 0, 1, \dots, N$ ;  $j = 0, 1, \dots, M$ . Полученная сетка имеет равномерный шаг по каждой переменной (рис. 2).

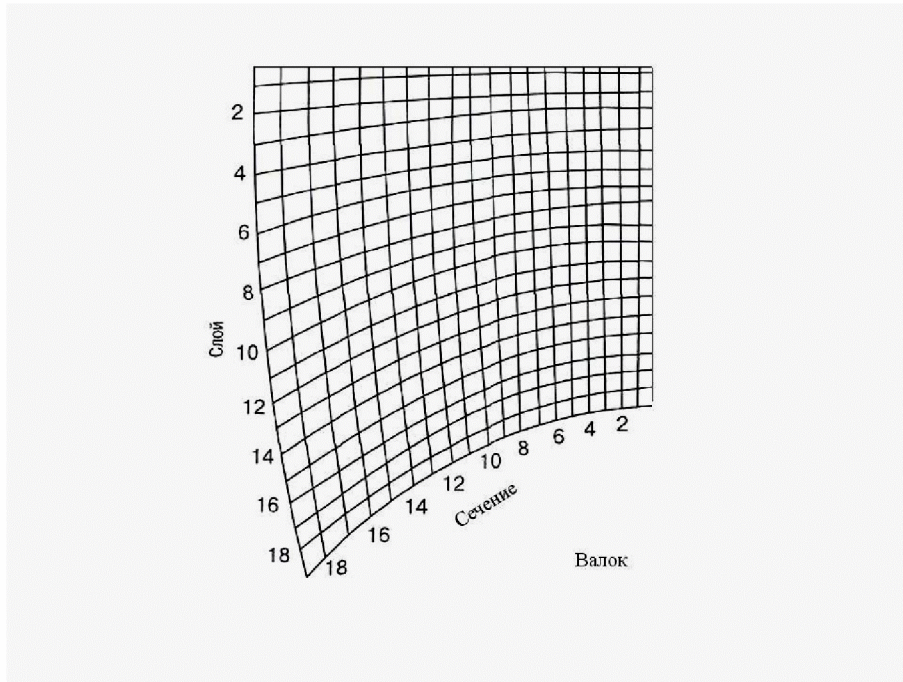


Рис. 2 – Разностная сетка правой половины "комиль-зоны"

Заменяем каждую из первых и вторых производных, входящих в уравнения (21), (22) и (20) разностными уравнениями вида:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} \approx \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{d}.$$

Тогда дифференциальные уравнения (21) и (22) будут иметь следующие разностные аналоги:

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{d^2} + 2H_{i,j}^2 \omega_{i,j} = 0$$

$$\frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{d^2} = 0. \tag{28}$$

Замена дифференциальных уравнений разностными (28), естественно, приводит к погрешности аппроксимации. Порядок этой погрешности в конкретном случае составляет  $O(h^2+d^2)$  [7].

Для одной и той же дифференциальной задачи можно построить много различных разностных схем. Наиболее простой алгоритм для вычисления разностного решения системы (28) – у явных схем. Разностная схема в этом случае представляет собой формулу для явного выражения решения, соответствующего  $n$ -му итерационному (временному) шагу, через известные его значения на предыдущих итерациях. Явным схемам присущи определенные недостатки, к числу которых относятся ограничения по их устойчивости и сходимости. Выполнение требований устойчивости и сходимости приводят к необходимости мелкой дискретизации итерационной переменной и увеличивает время счета. Хотя в нашем случае расчет одного варианта занимает доли секунды и не является лимитирующим фактором.

Используем метод установления [7], применяемый для решения задач в математической физике. Сущность его заключается в том, что исследуемое равновесное состояние рассматривают как результат установления развивающегося во времени

процесса, расчет которого часто оказывается проще, чем прямой расчет равновесного состояния. В рассматриваемом случае этот метод предполагает решение следующей нестационарной задачи:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2H^2 \omega, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2},\end{aligned}\quad (29)$$

которая приводит к получению явной разностной схемы:

$$\begin{aligned}\psi_{i,j}^{P+1} &= \psi_{i,j}^P + \tau \left( \frac{\psi_{i+1,j}^P - 2\psi_{i,j}^P + \psi_{i-1,j}^P}{h^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^P - 2\psi_{i,j}^P + \psi_{i,j-1}^P}{d^2} + 2H_{i,j}^2 \omega_{i,j}^P \right) \\ \omega_{i,j}^{P+1} &= \omega_{i,j}^P + \tau \left[ \frac{\omega_{i+1,j}^P - 2\omega_{i,j}^P + \omega_{i-1,j}^P}{h^2} + \frac{\omega_{i,j+1}^P - 2\omega_{i,j}^P + \omega_{i,j-1}^P}{d^2} \right],\end{aligned}\quad (29)$$

где  $p$  – номер итерации;  $\tau$  – итерационный параметр.

Известно [7], что явная разностная схема (29) является устойчивой и будет сходиться при условии:

$$\tau \leq \frac{l}{4},\quad (30)$$

где  $l$  – минимальный шаг сетки,  $l = \min(h, d)$ .

Для решения системы разностных уравнений (1.44 30) применили итерационный метод Зейделя, сущность которого заключается в том, что на очередном итерационном шаге в правой части уравнений наряду со значениями  $\Psi^p$  и  $\omega^p$ , полученными в предыдущем итерационном цикле, используются значения  $\Psi^{p+1}$  и  $\omega^{p+1}$ , рассчитанные на данном итерационном шаге.

Итерационный процесс решения системы (1.44 30) начинается с задания первого приближения для функции тока и напряженности вихря. Для рассматриваемого случая за первое приближение приняли линейное распределение функции тока вдоль координаты  $\xi$  от значения  $\Psi$  и  $\omega$  на границах  $\eta = 0$  до значений  $\Psi = \Psi(\xi, \eta_0)$ ,  $\omega = \omega(\xi, \eta_0)$ . Расчет заканчивается после выполнения условия сходимости:

$$\frac{1}{M+N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left( \frac{\psi_{i,j}^P - \psi_{i,j}^{P+1}}{\psi_{i,j}^P} \right) + \left( \frac{\omega_{i,j}^P - \omega_{i,j}^{P+1}}{\omega_{i,j}^P} \right) < \Delta.\quad (31)$$

При размере сетки 20x20 и точности 0,01 количество итераций счета одного варианта с заданными граничными кинематическими условиями составляет около 100 итераций.

В качестве исходных данных для моделирования приняты параметры, приведенные в работах [1,9]: внешний диаметр бандажа – 680 мм; длина зоны кристаллизации-деформации – 180 мм; скорость вращения вала – 7 об/мин, что соответствует темпу разлива около 6,5 м/мин; толщина готовой полосы – 3 мм.

Результаты расчета параметров течения металла в "комиль-зоне" представлены на рис. 4 в виде эпюр распределения продольных (б) и поперечных (в) скоростей течения металла в поперечных сечениях (номера сечений обозначены цифрами) "комиль-зоны".



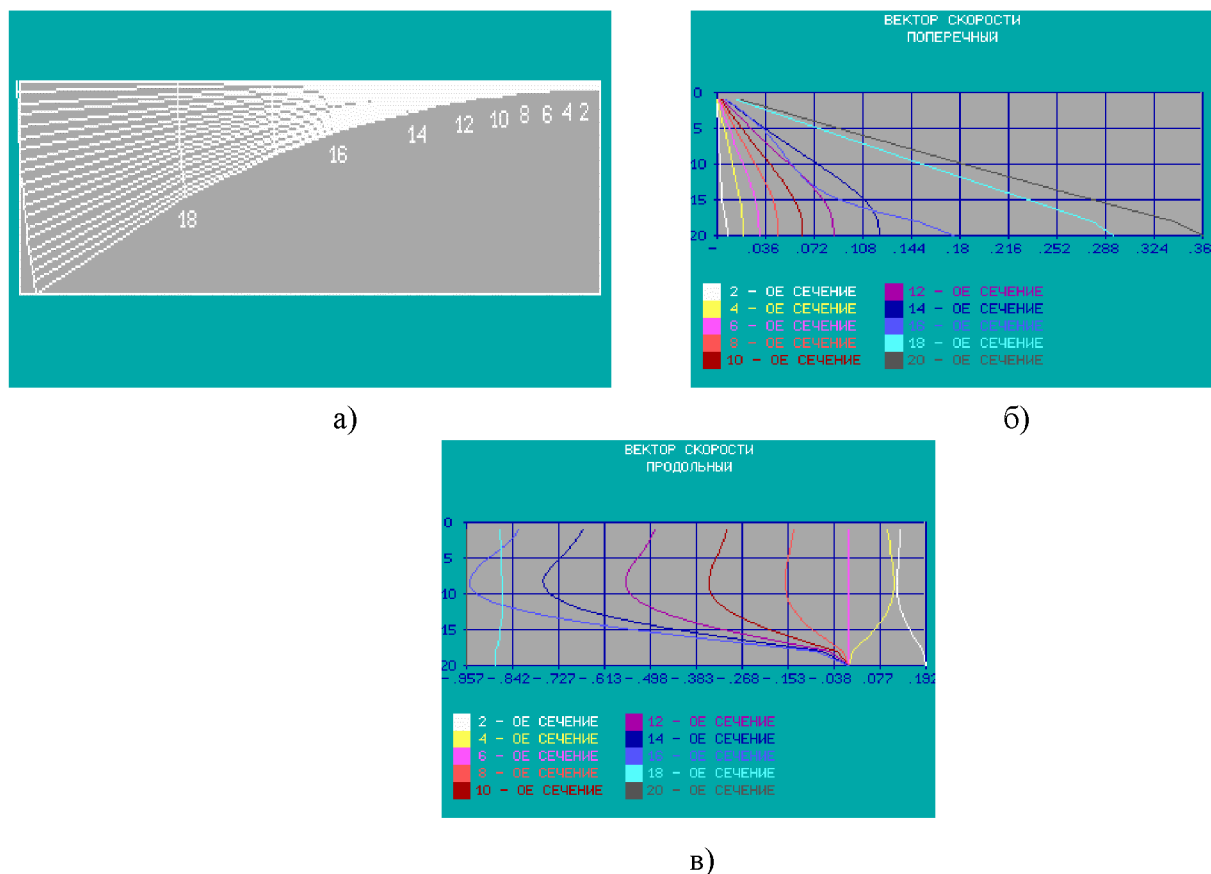


Рис. 3 – Результаты расчета распределения продольных  $V_z$  (б) и поперечных  $V_n$  (в) скоростей течения металла в поперечных сечениях (номера сечений обозначены цифрами) "комиль-зоны"(а) при валковой разливке. Условия разливки приведены в тексте.

Анализ расчетных данных показывает, во-первых, на значительную неравномерность распределения скоростей течения в поперечных сечениях "комиль-зоны". Жидкий металл центральной части верхней половины "комиль-зоны" находится в состоянии, близком к застойному, а на поверхности налива даже есть попятное движение металла. В слоях металла, прилегающих к валку, наблюдаются значительные градиенты продольной скорости течения.

**Выводы:**

1. В работе жидкий металл рассматривали как линейную вязкую среду. Важным этапом решения системы уравнений движения, неразрывности и теории вязкого течения является их преобразование в систему, состоящую из уравнения Лапласа для функции тока и уравнения Пуассона для напряженности вихря.
2. Следующим этапом является выбор подходящей криволинейной системы координат, которая позволяет преобразовать область интегрирования (геометрический очаг деформации) в ортогональную (прямоугольную) область, что существенно упрощает задание граничных условий и построение разностной сетки для численного решения задачи.
3. Постановка краевой задачи для уравнений Лапласа и Пуассона предполагает задание кинематических граничных условий по контуру геометрического очага деформации. Решающим, как показал наш опыт, является задание скорости течения металла на контакте с валком с учетом наличия зоны прилипания.
4. Краевая задача решалась конечно-разностным методом (МКР), включающем построение разностной сетки в геометрическом очаге деформации, замену дифференциальных операторов разностными, выбор разностной схемы, выбор метода решения конечно-

разностной задачи. Время счета одного варианта на современном ПК при сетке 20x20 составляет доли секунды, что позволяет выполнять неограниченное число вычислительных экспериментов.

**Список литературы:** 1. Гридин А.Ю. Математическое моделирование температурного поля металла и валков в процессе валковой разливки-прокатки // Обработка материалов давлением. – 2009. – №1 (20). – С. 75-83. 2. Ноговицын А.В. Исследование вязкопластического течения металла при плоской прокатке // Известия АН СССР. Металлы. – 1986. – №3. – С.88-96. 3. Ноговицын А.В. Влияние кинематических граничных условий на напряженно-деформированное состояние при плоской прокатке // Известия вузов. Черная металлургия. – 1988. – №7. – С.50-55. 4. Ноговицын А.В. Исследование кинематических параметров контактного взаимодействия металла и валка при прокатке с помощью математической модели вязкопластического течения // Известия вузов. – Черная металлургия. – 1987. – №12. – С.63-68. 5. Ноговицын А.В. Прогнозирование напряженно-деформированного и структурного состояния стали при горячей прокатке. // Черные металлы. – Апрель 2000. С.16-20. 6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с. 7. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы.- М.: Наука, 1977. – 440 с. 8. Тепловые процессы при обработке металлов давлением//М.Л.Яловой, М.А.Тылкин, П.И.Полухин и др.- М.: Высшая школа,1973. – 632 с. 9. Гридин А.Ю. Влияние температурно-скоростных параметров процесса непрерывной валковой разливки на тепловое состояние металла // Теория и практика металлургии. – 2009. – №3. С. 71-75.

*Надійшла до редколегії 15.10.2012*

**Математическое моделирование гидродинамики расплава металла при валковой разливке-прокатке. / Ноговицын А.В., Баранов И.Р. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №47(953). – С. 144-153. – Бібліогр.: 9 назв.**

Запропоновано математичну модель течії розплаву металу в міжвалковому зазорі при валковій розливці. Рідкий метал розглядали як лінійну в'язку середу. Методом скінченних різниць вирішували систему, що складається з рівняння Лапласа для функції струму та рівняння Пуассона для напруженості вихору, перетворену для біциліндричних координат. Наведено результати розрахунку швидкостей течії.

**Ключові слова:** валкова разливка металу, рівняння Лапласа і Пуассона, біциліндрична система координат, метод скінченних різниць.

A mathematical model of the flow of molten metal in the roll gap in the roll casting. The liquid metal is considered as a linear viscous medium. Finite difference method to solve the system consisting of the Laplace equation for the stream function and the Poisson equation for the strength of the vortex, converted to bicylindrical coordinates. The results of the calculation of the flow velocity.

**Keywords:** roller casting metal, Laplace and Poisson bicylindrical coordinate system, the method of finite differences.

УДК 621.771.073: 621.771.237

*А. Г. ПРИСЯЖНЫЙ*, ст. препод., ГВУЗ «ПГТУ», Мариуполь

### **РАСЧЕТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕЖВАЛКОВОЙ ПОГОННОЙ НАГРУЗКИ В КЛЕТЯХ «КВАРТО» СТАНОВ ХОЛОДНОЙ ПРОКАТКИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПРОФИЛИРОВКИ И ПРОТИВОИЗГИБА РАБОЧИХ ВАЛКОВ**

В статье приведена математическая модель, предназначенная для расчета межвалковой погонной нагрузки в клетях «кварто» станов холодной прокатки тонких полос с учетом профилировки и противоизгиба рабочих валков. Полученные в результате численной реализации представленной математической модели расчетные распределения межвалковой погонной нагрузки по длине контакта опорных и рабочих валков соответствуют имеющимся в литературе экспериментальным данным.

**Ключевые слова:** валки, межвалковая погонная нагрузка, профилировка, противоизгиб, упругое сжатие.

© А. Г. Присяжный, 2012