Карвацький А. Я., Пулінець І. В., Шилович І. Л // Восточно-Европейский журнал передових технологий. — 2012. - №1/4(55). — С.33 — 37. **3.** Magnussen B. F. On mathematical models of turbulent combustion with special emphasis on soot formation and combustion [Текст] / B. F. Magnussen, B. H. Hjertager // In 16th Symp. (Int'l.) on Combustion. The Combustion Institute. - Pittsburgh, 1976 - P. 719-727 **4.** Аленькин Д. Я. Пути повышения экологических характеристик процесса графитации / *Аленькин Д. Я., Распопов М. Г., Власова Т. Б.*// Технологические процессы и оборудование электродного производства: Сб.науч.тр. /НИИграфит, ГОСНИИЭП. – М., 1989. – 77-81с.

Надійшла до редколегії 20.12.2012

УДК 66.094.3

Зниження концентрації со в процесі випалу графітових заготовок/ Карвацький А. Я. Шилович І. Л., Крутоус Л. В., Кутузов С. В. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХПІ», – 2012. - № 68 (974). – С. 201-205. – Бібліогр.: 4 назв.

Проведены расчеты температурных полей камер печи с заготовками для определения влияния физического барьера на количество моно оксида углерода, образующегося в процессе обжига графитовых заготовок.

Ключевые слова: температурные поля, моно оксид углерода, обжиг графитовых заготовок, шамотный кирпич.

It was done calculations of temperature fields of cameras of the furnace with workpieces for definition of influence of a physical barrier on amount of mono oxide of the carbon which is formed in the prosess of graphite workpieces annealing are carried out. names.

Keywords: temperature fields, mono oxide of carbon, annealing of graphite workpieces, firebrick.

УДК 536.24

Ю. О. КОБРИНОВИЧ, аспирант, ИПМаш НАН Украины, Харьков

ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРНО-РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ТЕПЛООБМЕНОМ

Математические модели построены на базе совместного применения регионально-структурного или структурного методов, S-функций и разностных схем высокого порядка точности.

Ключевые слова: математическое моделирование, высокоскоростные тепловые процессы, структурно-разностные модели.

Введение. Решение задач теплопроводности с нестационарными граничными условиями для областей сложной формы в случае высокоскоростных тепловых процессов встречает ряд трудностей принципиального характера и у численных методов, и у аналитических методов.

При решении нестационарных задач теплопроводности с помощью численных методов, усилия аппроксимации направлены одновременно на приближенное удовлетворение дифференциальному уравнению, осциллирующим граничным условиям и осциллирующим внутренним источникам (стокам) энергии. Результирующая погрешность для задач с высокими скоростями теплообмена оказывается выше предельно допустимой, что ограничивает область применения численных методов для разностных схем второго порядка точности задачами теплопроводности с медленно протекающими процессами.

Получить точные решения классическими аналитическими методами можно получить только для отдельных задач теплопроводности в случаях когда области исследования имеют каноническую форму.

Актуальной оказывается разработка численно-аналитических подходов к задачам теплопроводности с высокоскоростными нестационарными граничными условиями, которые позволяли бы решать соответствующие задачи с высокой степенью точности, и не были ограничены ни по градиенту температур по времени и координатам, ни по скорости и

© Ю. О. КОБРИНОВИЧ, 2012

характеру изменения нестационарных граничных условий.

Анализ публикаций. При решении нестационарных задач теплопроводности для областей сложной формы, используются следующие методы, для которых характерны нижеперечисленные особенности:

- метод конечных разностей [1-3] – необходимость аппроксимации границ, не совпадающих с линиями координатам;
- метод конечных элементов [4,5] – нуждается в усовершенствовании для решения нелинейных нестационарных задач математической физики;
- вариационные методы [6 - 8] –ожидается сходимость по энергии к обобщенному решению соответствующего уравнения для всякой последовательности, минимизирующей функционал энергии, только при условии, что оператор для уравнения задачи положительно определен.

В развитии численно-аналитических методов для нестационарных задач, трудность заключалась в построении базисных функций, точно удовлетворяющих нестационарным граничным условиям.

Цель работы. Анализ качественных особенностей построения структурно-разностных моделей, точно удовлетворяющих нестационарным граничным условиям в каждый момент времени, точно учитывающих геометрию исследуемой области и показывающих высокую точность при решении задач теплопроводности с нестационарными граничными условиями, в том числе – с быстропротекающими осциллирующими условиями теплообмена.

Основные материалы исследования. Структурно-разностная модель строится на базе совместного применения аналитических или регионально-аналитических консервативных структур решения [9], S-функций [10] и разностных схем повышенного порядка точности [11].

Построение структур решения. Структуру решения задачи теплопроводности с нестационарными граничными условиями представим в виде (1):

$$T(x,y,Fo) = \Phi_0(x,y,Fo) + \sum_{k,l} C_{k,l}\chi_{k,l}(x,y,Fo) \tag{1}$$

где $C_{k.l}$ – неизвестные коэффициенты; $\Phi_0(x,y,Fo)$ функция, точно удовлетворяющая нестационарным неоднородным граничным условиям, $\chi_{k,l}(x,y,Fo)$ – базисные функции, точно удовлетворяющие нестационарным однородным граничным условиям.

Рассмотрим задачу теплопроводности для случая, когда поперечное сечение конструктивного элемента имеет вид двухсвязной области сложной формы с кусочно-гладкой границей, на которой заданы нестационарные граничные условия (2).

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T(x,y,Fo)}{\partial Fo} = \Delta T(x,y,Fo) + F(x,y,Fo); T(x,y,0) = \theta(x,y), \\
\left.\left(\pm\frac{\partial T(x,y,Fo)}{\partial x} + Bi_1(Fo)T(x,y,Fo)\right)\right|_{\Gamma 1} = Bi_1(Fo)T_{\text{ср}1}(x,y,Fo); \\
\left.\left(\pm\frac{\partial T(x,y,Fo)}{\partial y} + Bi_1(Fo)T(x,y,Fo)\right)\right|_{\Gamma 1} = Bi_1(Fo)T_{\text{ср}1}(x,y,Fo); \\
\left.\left(\pm\frac{\partial T(x,y,Fo)}{\partial x} + Bi_2(Fo)T(x,y,Fo)\right)\right|_{\Gamma 2} = Bi_2(Fo)T_{\text{ср}2}(x,y,Fo); \\
\left.\left(\pm\frac{\partial T(x,y,Fo)}{\partial y} + Bi_2(Fo)T(x,y,Fo)\right)\right|_{\Gamma 2} = Bi_2(Fo)T_{\text{ср}2}(x,y,Fo);\ \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \\
F(x,y,Fo) = \frac{\partial T_m(x,y,Fo)}{\partial Fo} - \left(\frac{\partial^2 T_m(x,y,Fo)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_m(x,y,Fo)}{\partial y^2}\right); x,y \in \Omega; 0 < Fo < \infty
\end{gathered} \tag{2}$$

где $T(x,y,Fo)$ - температура поперечного сечения, $\theta(x,y)$ - начальная температура, $T_{cp1}(x,y,Fo)$ и $T_{cp2}(x,y,Fo)$ - температура среды для наружной (Γ_1) и для внутренней (Γ_2) границы призмы соответственно, $Bi_1(Fo)$ и $Bi_2(Fo)$ - коэффициенты Био для наружной и внутренней границы призмы, Fo - критерий Фурье, $T_m(x,y,Fo)$ - точное решение.

Базисные функции $\chi_{k,l}(x,y,Fo)$, точно удовлетворяющие нестационарным однородным граничным условиям построим в виде (3):

$$\chi_{k,l}(x,y,Fo)=\begin{cases}\chi_{k,l_1}(x,y,Fo),\ x,y\in\Omega_1\\ \chi_{k,l_2}(x,y,Fo),\ x,y\in\Omega_2\end{cases} \tag{3}$$

$$\chi_{k,l_1}=P_kP_l-W_1\left(\frac{\partial P_k}{\partial x}P_l\frac{\partial W_1}{\partial x}+P_k\frac{\partial P_l}{\partial x}\frac{\partial W_2}{\partial x}\right)+W_1Bi_1P_kP_l\exp(-p_1W_1^{\ 2});$$

$$\chi_{k,l_2}=P_kP_l-W_2\left(\frac{\partial P_k}{\partial x}P_l\frac{\partial W_1}{\partial x}+P_k\frac{\partial P_l}{\partial x}\frac{\partial W_2}{\partial x}\right)+W_2Bi_2P_kP_l\exp(-p_2W_2^{\ 2});$$

где $p_1=\text{const}, p_2=\text{const}, \Gamma_{12}(x,y)$ - граница раздела двух регионов, $P_k(x),P_l(y)$ - нормированные полиномы Чебышева, с помощью S-функций строятся уравнения границ Γ_1 и Γ_2 - $W_1(x,y)\big|_{\Gamma_1}=0$ и $W_2(x,y)\big|_{\Gamma_2}=0$ [12].

Функция $\Phi_0(x,y,Fo)$, точно удовлетворяющая нестационарным неоднородным граничным условиям (4):

$$\Phi_0(x,y,Fo)=\begin{cases}T_{cp_1}(x,y,Fo)\exp(-p_1W_1^{\ 2}(x,y)),\ x,y\in\Omega_1\\ T_{cp_2}(x,y,Fo)\exp(-p_2W_2^{\ 2}(x,y)),\ x,y\in\Omega_2\end{cases} \tag{4}$$

Как видно из структур решения (3) – (4), температура среды на границах области и критерии Био для двух границ областей могут иметь любую аналитическую зависимость. Благодаря модульной конструкции структуры решения (1) граничные условия в структурно-разностных и региональных структурно-разностных моделях удовлетворяются точно.

Особенности учета геометрических параметров в математической модели. В структуру решения (3) входят функции, которые содержат информацию геометрического характера об исследуемых областях. В уравнениях $W_1(x,y)\big|_{\Gamma_1}=0$ и $W_2(x,y)\big|_{\Gamma_2}=0$ функции строятся с помощью S-функций соответствующего класса [10], и содержат тейлоровские опорные функции, позволяющие управлять образованием форм весовых функций и позволяют строить консервативные структуры решения [11,12] . Опорные тейлоровские функции обеспечивают требуемую форму функции $W(x,y)$ и соблюдение кривизны границы области. Функция $W(x,y)$, описывающая границу квадратной призмы стороной 1 (5), ее тейлоровские функции для функции *f(x)* (6) (для функции *f(y)* аналогично):

$$W(x,y)=\tilde f_1(x)\underset{S}{\wedge}\tilde f_2(y) \tag{5}$$

$$\begin{cases}\tilde f(x)=f(x)\cdot\left(1+\alpha_1\cdot f(x)+\sum\limits_n\alpha_n\cdot f^n(x)\right),\ \text{n}=2...\text{m};\\ \text{f}''_{\text{xx}}(\text{x})\cdot(1+\alpha_1\cdot f(x))=0;\\ \tilde f(x)=\tilde f(x+\Delta x)=\tilde f(x+2\Delta x)=...=\tilde f(x+l\cdot\Delta x);\end{cases} \tag{6}$$

где $f_1(x)=(1-x^2)$, $f_2(y)=(1-y^2)$, параметр α_1 определяется из условия кривизны границы области, параметры $\alpha_2,...,\alpha_n$ оптимизируют форму функции $W(x,y)$.

Разностные схемы повышенного порядка точности. Рассмотрены различные разностные схемы, которые можно использовать для построения дискретной модели [13] и для них определено спектральное условие устойчивости, удовлетворяющие необходимому условию устойчивости Неймана. В таблице 1 показано максимально допустимое значение параметра r (соотношение шага по времени к квадрату шага по координатам) для разностных схем разного порядка точности. Оптимальная по параметру r разностная схема трехслойная по времени и девятиточечная по координатам типа «ящик». Как показала серия вычислительных экспериментов [13-14], разностные схемы №1 – 4 в случае их применения к задачам теплопроводности с нестационарными граничными условиями с высокоскоростным теплообменом, показывают неудовлетворительную точность решения.

Таблица 1 - Максимальные значения параметра r, для разностных схем

№	Разностная схема по времени	Разностная схема по координатам	r
1	2-х слойная	5-точечная	0,25
2	2-х слойная	9-точечная «большой крест»	0,255
3	2-х слойная	9-точечная «ящик»	0,444
4	3-х слойная	5-точечная	0,5
5	3-х слойная	9-точечная «большой крест»	0,511
6	3-х слойная	9-точечная «ящик»	0,889

Выводы. Построение структурно-разностных математических моделей для высокоскоростных тепловых процессов с нестационарными граничными условиями, включает в себя:

- построение консервативных структур решения на базе структурного или регионально-структурного методов, имеющих модульное строение и точно учитывающих граничные условия

- построение функций $W(x,y)\big|_{\Gamma}=0$ на базе S-функций, в асимптотическом приближении заданной степени точности описывающих границы области поперечного сечения конструктивного элемента, в том числе информацию об их кривизне,

- определение необходимого условия устойчивости Неймона для выработки рекомендаций при проведении математического моделирования высокоскоростных тепловых процессов.

Список литературы: ***1.*** *Годунов С. К.* Разностные схемы. Введение в теорию [Текст] / *С. К. Годунов, В. С. Рябенький.* – М.: Наука, 1973. – 400 с. ***2.*** *Самарский А. А.* Теория разностных схем [Текст] / *А. А. Самарский.* – М.: Наука, 1977. – 656 с. ***3.*** *Рихтмайер Р.* Разностные методы решения краевых задач [Текст]: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 421 с. ***4.*** *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике [Текст]: *Пер. с англ. под ред. Б. Е. Победри.* – М.: Мир, 1975. – 542 с. ***5.*** *Деклу Ж.* Метод конечных элементов [Текст]: *Пер. с франц.* – М.: Мир, 1976 – 96 с. ***6.*** *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики / *Г. И. Марчук.* – М: Наука, 1977. – 455 с. ***7.*** *Ортега Дж.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными: Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 558 с. ***8.*** *Шехтер Р. С.* Вариационный метод в инженерных расчетах [Текст] / *Р. С. Шехтер.* – М.: Мир, 1971. – 291 с. ***9.*** *Слесаренко А. П.* Математическое моделирование тепловых процессов в телах сложной формы при нестационарных граничных условиях [Текст] / *А. П. Слесаренко* // Пробл. машиностроения. – 2002. – Т. 5. №4 – С. 72-80. ***10.*** *Слесаренко А. П.* S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм [Текст] / *А. П. Слесаренко* // Восточно-Европейский Журнал Передовых Технологий. - 2012. – Т1, № 4(55). - С. 4—10. – Режим доступа : URL : http://journals.uran.ua/eejet/article/view/3310. ***11.*** *Слесаренко, А. П.* Математическое моделирование высокоскоростных тепловых процессов при точном учете нестационарных осциллирующих условий теплообмена на поверхности конструктивных элементов [Текст] / *А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович* // Вісник Кременчуцького нац. університета. – 2011. - Т.5(70) – С.35-38 ***12.*** *Кобринович, Ю. О.* Консервативные структуры решения в математическом моделировании высокоскоростного осциллирующего теплообмена [Текст] / Ю. О. Кобринович// Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях: Сб.тезисов докладов междунар. конф. - Харьков: "Апостроф", 2012. – С.58 ***13.*** *Слесаренко, А. П.* Структурно-разностные модели, точно учитывающие осциллирующий во времени нестационарный теплообмен на поверхности конструктивных элементов [Текст] / *А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович* // Доповіді НАН України . – 2012. - №1. – С.82-88. ***14.*** *Слесаренко, А. П.* Об одном численно-аналитическом подходе к математическому моделированию нестационарных процессов теплопроводности с большой скоростью нагрева [Текст] / *А. П. Слесаренко*, *Кобринович*, *Ю. О.* // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», вип.16. – Харків: ХНУ, 2011. - №960. – С.159 – 168.

Надійшла до редколегії 20.12.2012

УДК 536.24

Построение структурно-разностных моделей высокоскоростных тепловых процессов с осциллирующим теплообменом / Ю. О. Кобринович// Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – Х: НТУ «ХПІ», – 2012. - № 68 (974). – С. 205-209. – Бібліогр.: 14 назв.

Математичні моделі базуються на сумісному використанні регіонально-структурного або структурного методів, S-функцій та різницевих схем високого порядку точності .

Ключові слова: математичне моделювання, високошвидкісні теплові процеси, структурно-різницеві моделі.

Mathematical models are based on the combined use of regional-structural or structural methods, S-functions and difference schemes of high order accuracy.

Keywords: mathematical modeling, high speed heat processes, structural-difference model.