УДК 681.5.015

А. І. КУБРАК, канд. техн. наук, проф., НТУУ «КПІ»,. Київ;
О. А. ЖУЧЕНКО, канд. техн. наук, доц., НТУУ «КПІ»,. Київ

ПЕРЕДАТНІ ФУНКЦІЇ ТА ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕПЛОВИХ ОБ'ЄКТІВ ТИПУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ СТІНКИ

Представлені передатні функції та частотні характеристики циліндричної теплоакумулюючої стінки як об'єкта з розподіленими параметрами у залежності від граничних умов на зовнішній і внутрішній поверхнях. Було запропоновано кілька нетривіальних способів для розрахунку частотних характеристик циліндричних теплоакумулюючих стінок. Отримані результати можуть бути використані при синтезі систем керування.

Ключові слова: передатна функція, частотна характеристика, циліндрична теплоакумулююча стінка, граничні умови.

Вступ. Практично всі реальні об'єкти керування в хімічній, харчовій, металургійній, нафтопереробній та інших галузях промисловості, фактично у всій сфері людської діяльності, є об'єктами з розподіленими параметрами. Лише у деяких часткових випадках (хоча і достатньо вживаних на практиці) такі об'єкти можна звести з прийнятною похибкою до відповідних зосереджених об'єктів [1]. По мірі ускладнення об'єктів і підвищення вимог до точності та адекватності їх моделювання подібні спрощення у багатьох ситуаціях стають неможливими і вимагають урахування їх якісної специфіки як об'єктів з розподіленими параметрами. Все це викликає потребу у створенні якісних математичних моделей для типових об'єктів з розподіленими параметрами.

Аналіз досліджень і публікацій. Математичне моделювання об'єктів з розподіленими параметрами успішно розвивається у світі вже більше півстоліття. Аналітичні методи розрахунку таких моделей можна розділити на точні та приблизні [2].

У роботах [3, 4] точний розв'язок задач наводиться для найбільш простих систем, які описуються одним рівнянням у частинних похідних 1-го або 2-го порядку. Розв'язки отримані методами перетворення Фур'є, Лапласа, методом джерел, розщеплювання змінних.

У роботах [5, 6] застосовуються методи, які зводять розв'язок до системи інтегральних рівнянь типу Вольтера, Фредгольма, використанню функцій Рімана.

При спробах розповсюдити ці методи на розв'язання практичних задач, зокрема задач, пов'язаних із системами автоматичного керування, виникають значні труднощі.

Відомі роботи, наприклад [7], у яких отримані трансцендентні передатні функції об'єктів з розподіленими параметрами. Але на жаль ці методи мають занадто загальний характер і не завжди можуть бути застосовані при синтезі систем керування реальними об'єктами.

Постановка задачі досліджень. У даній роботі обраний шлях дослідження ґрунтується на таких міркуваннях:

1) розглядати тільки теплові об’єкти з розподіленими параметрами як найбільш поширені у промисловості;

2) математичну модель об’єктів з розподіленими параметрами отримати у вигляді передатної функції, як найбільш придатної для подальших досліджень з точки зору аналізу і синтезу систем керування за допомогою існуючих програмних засобів (MathCad, MatLab).

Сформульовані обмеження щодо класу досліджуваних об’єктів залишаються все ж таки занадто «слабкими», якщо мати на увазі обсяг наукової статті. Тому з метою звузити клас досліджуваних об’єктів, а також враховуючи, що багато об’єктів хімічної, харчової, нафтопереробної, металообробної та інших галузей промисловості з точки зору їх математичного моделювання як об’єктів з розподіленими параметрами можуть розглядатися як циліндричні теплоакумулюючі стінки, метою даної роботи є розробка математичної моделі теплового об’єкта, який може бути представлено у вигляді циліндричної теплоакумулюючої стінки, у вигляді передатної функції.

Передатні функції циліндричної теплоакумулюючої стінки. Одновимірне диференційне рівняння теплопровідності в циліндричній системі координат має вигляд

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r}\right). \tag{1}$$

Виконаємо над ним перетворення Лапласа за нульових початкових умов

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dx^2} + \frac{1}{r}\frac{d\bar{\theta}}{dr} - \frac{p}{a}\bar{\theta} = 0. \tag{2}$$

Введемо заміну змінної $r = \frac{x}{\sqrt{\frac{p}{a}}}$, тоді рівняння (2) після спрощення набуде вигляду

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\bar{\theta}}{dx} - \bar{\theta} = 0.$$

Це частинний випадок (при m=0) так званого модифікованого диференційного рівняння Бесселя [8-10]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0. \tag{3}$$

Розв’язок (3) доцільно представити таким чином:

$$y = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x)\,, \tag{4}$$

де I_0 і $K_0(x)$ – модифіковані функції Бесселя I і II роду нульового порядку. Розкладання у ряд для цих функцій має наступний вигляд

– при малих значеннях x

$$I_0(x) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1^2\cdot 2^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2} + \ldots,$$

$$K_0(x) = -\left(C + \ln\frac{x}{2}\right)I_0(x) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \ldots$$

– при великих значеннях x

$$I_0(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1+\frac{1^2}{1!8x}+\frac{1^2 3^2}{2!(8x)^2}+\frac{1^2 3^2 5^2}{3!(8x)^3}+...\right).$$

$$K_0(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\left(1-\frac{1^2}{1!8x}+\frac{1^2 3^2}{2!(8x)^2}-\frac{1^2 3^2 5^2}{3!(8x)^3}+...\right)\quad ,$$

де C=0,5772157… – стала Ейлера.

Нагадаємо поведінку модифікованих функцій Бесселя при граничних значеннях аргументу

$$\begin{cases} I_0(x)\big|_{x\to 0}=1 \\ I_0(x)\big|_{x\to\infty}=\infty \\ K_0(x)\big|_{x\to 0}=\infty \\ K_0(x)\big|_{x\to\infty}=0 \end{cases}.$$

Похідні від $I_0(x)$ і $K_0(x)$ визначаються наступним чином:

$$\frac{dI_0(x)}{dx}=I_1(x),$$

$$\frac{dK_0(x)}{dx}=-K_1(x).$$

Розкладення в ряди для малих значень аргументу дає

$$I_1(x)=\frac{x}{2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1^2\cdot 2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{1^2\cdot 2^2\cdot 3}+...$$

$$K_1(x)=\frac{1}{x}I_0(x)+\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)I_1(x)-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^2\cdot 4}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{x^5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-...-.$$

Асимптотичні ряди (для великих значень x) будуть

$$I_1(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1-\frac{4-1^2}{1!8x}+\frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!(8x)^2}-...\right),$$

$$K_1(x)=e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left(1+\frac{4-1^2}{1!8x}+\frac{(4-1^2)(4-3^2)}{2!(8x)^2}+...\right).$$

При граничних значеннях аргументу функції $I_1(x)$ і $K_1(x)$ ведуть себе наступним чином:

$$\begin{cases} I_1(x)\big|_{x=0}=0, \\ I_1(x)\big|_{x=\infty}=\infty, \\ K_1(x)\big|_{x=0}=-\infty \\ K_1(x)\big|_{x=\infty}=0. \end{cases}$$

Відповідно з (4) розв’язок диференційного рівняння (2) будемо шукати у вигляді

$$\bar{\theta}=C_1 I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+C_2 K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right). \qquad (5)$$

Для визначення постійних інтегрування C_1 і C_2 потрібно, зазвичай, задати граничні умови. Домовимося позначати граничні умови на внутрішній поверхні циліндра як N_{gv} (яке може набувати значень 1,2,3, що відповідає граничним умовам 1-го, 2-го та 3-го роду відповідно), на зовнішній поверхні – як N_{gz} (з такими ж можливими значеннями 1,2,3 і відповідним змістом). Циліндр вважаємо в загальному випадку порожнистим, внутрішній радіус r_0, зовнішній - r_1.

Таким чином, результат розв’язання поставленої вище задачі повністю залежить від комбінації граничних умов на зовнішній та внутрішній поверхнях циліндра. У роботі [11] розглянуто деякі з можливих варіантів, наприклад, граничні умови на зовнішній і внутрішній поверхні 1-го та 3-го роду, на внутрішній поверхні 2-го роду, на зовнішній 3-го. Тепер розглянемо інші варіанти.

Варіант 1. $Ngv = 1, Ngz = 1$. У даному випадку граничні умови для рівняння (5) мають вигляд:

$$\begin{cases} \left.\theta\right|_{r=r_0} = T_v(t) \\ \left.\theta\right|_{r=r_0} = T_z(t) \end{cases},$$

де $T_v(t)$ та $T_z(t)$ – температура внутрішньої та зовнішньої поверхні циліндра відповідно. Перетворимо дану систему за Лапласом:

$$\begin{cases} \left.\overline{\theta}\right| = \overline{T}(t) \\ \left.\overline{\theta}\right| = \overline{T}(t) \end{cases}, \qquad (6)$$

де $\overline{\theta} = \int\limits_0^\infty \theta \cdot e^{-pt} dt,$

$$\overline{T_v}(p) = \int\limits_0^\infty T_v(t) \cdot e^{-pt} dt,$$

$$\overline{T_z}(p) = \int\limits_0^\infty T_z(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Підставляючи (6) у рівняння (5), маємо:

$$\begin{cases} \overline{T_v}(p) = C_1 \cdot J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + C_2 \cdot K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \\ \overline{T_z}(p) = C_1 \cdot J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + C_2 \cdot K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \end{cases}.$$

Використовуючи правило Крамера [16], знаходимо невідомі коефіцієнти C_1 та C_2

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \overline{T_v}(p) & K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \\ \overline{T_z}(p) & K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) & K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \\ J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) & K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \end{vmatrix}} = \frac{\overline{T_v}(p) \cdot K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \overline{T_z}(p) \cdot K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \cdot K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \cdot K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)},$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) & \overline{T_v}(p) \\ J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) & \overline{T_z}(p) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) & K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \\ J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) & K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \end{vmatrix}} = \frac{\overline{T_z}(p) \cdot J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \overline{T_v}(p) \cdot J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \cdot K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \cdot K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}.$$

Тоді рівняння (5) набуває вигляду

$$\bar{\theta} = \frac{\overline{T_v}(p)\cdot K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \overline{T_z}(p)\cdot K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}\cdot J_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + \frac{\overline{T_z}(p)\cdot J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \overline{T_v}(p)\cdot J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}\cdot K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right), \qquad (7)$$

де

$$Z_n(p) = J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right).$$

Якщо рівняння (7) представити у вигляді

$$\bar{\theta} = W_{Tv\to\theta}(p,r)\cdot\overline{T_v}(p) + W_{Tz\to\theta}(p,r)\cdot\overline{T_z}(p),$$

де $W_{Tv\to\theta}(p,r)$ та $W_{Tz\to\theta}(p,r)$ – передатні функції за каналами «температура внутрішньої поверхні циліндра - температура циліндра за радіусом» та «температура зовнішньої поверхні циліндра – температура циліндра за радіусом» відповідно, тоді отримуємо шукані передатні функції.

$$W_{Tv\to\theta}(p,r) = \frac{\left[K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot J_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]}{Z_n(p)},$$

$$W_{Tz\to\theta}(p,r) = \frac{\left[J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot J_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]}{Z_n(p)}.$$

Варіант 2. *Ngv*=1; *Ngz*=2. Граничними умовами для диференційного рівняння (5) будуть

$$\begin{cases} \theta\big|_{r=r_0} = T_v(t) \\ -\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} = Q_z(t) \end{cases},$$

де $Q_z(t)$ – зовнішній тепловий потік

Після перетворення за Лапласом та підстановки у (5) отримаємо

$$\begin{cases} \overline{T_v}(p) = C_1\cdot J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + C_2\cdot K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \\ -\dfrac{1}{\lambda\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}}\cdot\overline{Q_z}(t) = C_1\cdot J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + C_2\cdot K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \end{cases}.$$

Розрахуємо невідомі коефіцієнти за правилом Крамера:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \overline{T_v}(p) & K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \\ -\dfrac{\overline{Q_z}(t)}{\lambda\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}} & -K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) & K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \\ J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) & -K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \end{vmatrix}} = \frac{\overline{T_v}(p)\cdot K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \dfrac{\overline{Q_z}(t)}{\lambda\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}}\cdot K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}, \qquad (8)$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) & \overline{T_v}(p) \\ J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) & -\frac{\overline{Q_z}(t)}{\lambda\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}} \end{vmatrix}}{Z_n(p)} = \frac{\overline{T_v}(p)\cdot J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + \frac{\overline{Q_z}(t)}{\lambda\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}}\cdot J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}, \qquad (9)$$

де

$$Z_n(p) = J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right).$$

З урахуванням (8), (9) рівняння (5) має вигляд:

$$\bar{\theta} = \frac{\left\{\left[\overline{T_v}(p)\cdot K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \frac{\overline{Q_z}(t)}{\lambda\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}}\cdot K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]\cdot J_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + \left[\frac{\overline{Q_z}(t)}{\lambda\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}}\cdot J_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + \overline{T_v}(p)\cdot J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]\cdot K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right\}}{Z_n(p)}.$$

Тоді передатні функції $W_{Tv\to\theta}(p,r)$ (канал «температура внутрішньої поверхні циліндра - температура циліндра за радіусом») та $W_{Qz\to\theta}(p,r)$ (канал «зовнішній тепловий потік – температура за радіусом») визначаються як

$$W_{Tv\to\theta}(p,r) = \frac{\left[K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot J_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]}{Z_n(p)},$$

$$W_{Qz\to\theta}(p,r) = \frac{\left[J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot J_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]}{\lambda\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot Z_n(p)}.$$

Варіант 3. *Ngv*=1, *Ngz*=3. Граничні умови записуються таким чином

$$\begin{cases} \theta\big|_{r=r_0} = T_v(t), \\ -\dfrac{\lambda}{\alpha_1}\dfrac{\partial\theta}{\partial r}\Big|_{r=r_1} = \theta\big|_{r=r_0} - T_{sz}(t) \end{cases},$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу циліндра; α_1 – коефіцієнт тепловіддачі від зовнішнього середовища до поверхні циліндра. Перетворюючі дані рівняння за Лапласом і підставляючи їх у (5), дістаємо:

$$\begin{cases} \overline{T_v}(p) = C_1\cdot J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + C_2\cdot K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) \\ -\dfrac{\lambda}{\alpha_1}\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot\left[C_1\cdot J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - C_2\cdot K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right] = C_1\cdot J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + C_2\cdot K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) - \overline{T_{sz}}(p) \end{cases}.$$

Невідомі коефіцієнти розраховуємо за формулами

$$C_1=\frac{\begin{vmatrix}\overline{T_v}(p) & K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\\ -\overline{T_{sz}}(p) & \frac{\lambda}{\alpha_1}\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) & K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\\ -\left[J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\frac{\lambda}{\alpha_1}\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right] & \frac{\lambda}{\alpha_1}\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\end{vmatrix}}=\frac{\overline{T_v}(p)\cdot\left[\frac{\lambda}{\alpha_1}\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]+\overline{T_{sz}}(p)\cdot K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}.$$

$$C_2=\frac{\begin{vmatrix}J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right) & \overline{T_v}(p)\\ -\left[J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\frac{\lambda}{\alpha_1}\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right] & -\overline{T_{sz}}(p)\end{vmatrix}}{Z_n(p)}=\frac{-\overline{T_{sz}}(p)\cdot J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\overline{T_v}(p)\cdot\left[J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\frac{\lambda}{\alpha_1}\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]}{Z_n(p)},$$ де

$$Z_n(p)=J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot\left[\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]+K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot\left[J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\frac{\lambda}{\alpha_1}\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right].$$

Тепер рівняння (5) набуває вигляду

$$\bar{\theta}=\frac{\left\{\overline{T_v}(p)\left[\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]+\overline{T_{sz}}(p)\cdot K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right\}\cdot J_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\left\{-\overline{T_{sz}}(p)\cdot J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\overline{T_v}(p)\cdot\left[J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\frac{\lambda}{\alpha_1}\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]\right\}\cdot K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}.$$

Аналогічно вище наведеним випадкам визначаємо передатні функції $W_{Tv\to\theta}(p,r)$ (канал «температура внутрішньої поверхні – температура циліндру за радіусом») та $W_{Tsz\to\theta}(p,r)$ (канал «температура зовнішнього середовища – температура циліндру за радіусом»)

$$W_{Tv\to\theta}(p,r)=\frac{\left[\left(\frac{\lambda}{\alpha_1}\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot K_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right)-K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]\cdot J_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\left[J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+\frac{\lambda}{\alpha_1}\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot J_1\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]\cdot K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)},$$

$$W_{Tsz\to\theta}(p,r)=\frac{\left[-J_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+K_0\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot J_0\left(r\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\right]}{\lambda\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}\cdot Z_n(p)}.$$

Варіант 4. Ngv=2, Ngz=1. У даному випадку граничні умови такі:

$$\begin{cases}-\lambda\left.\frac{\partial\theta}{\partial r}\right|_{r=r_1}=Q_v(t)\\ \left.\theta\right|_{r=r_0}=T_z(t)\end{cases},\qquad(10)$$

де $Q_v(t)$ – внутрішній тепловий потік.

Після перетворення (10) за Лапласом і підстановки у (5) маємо:

$$\begin{cases}-\frac{\overline{Q_v(t)}}{\lambda\cdot\sqrt{\frac{p}{a}}}=C_1\cdot J_1\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)-C_2\cdot K_1\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\\ T_z(t)=C_1\cdot J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)+C_2\cdot K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\end{cases}.$$

Визначаємо невідомі коефіцієнти

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{\overline{Q_v(t)}}{\lambda\cdot\sqrt{\dfrac{p}{a}}} & -K_1\left(r_0\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) \\ T_z(p) & K_0\left(r_1\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_1\left(r_0\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) & -K_1\left(r_0\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) \\ J_0\left(r_0\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) & K_0\left(r_1\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) \end{vmatrix}} = \frac{T_z(p)\cdot K_1\left(r_0\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) - \dfrac{\overline{Q_v(t)}}{\lambda\cdot\sqrt{\dfrac{p}{a}}}\cdot K_0\left(r_1\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}. \tag{11}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} J_1\left(r_0\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) & -\dfrac{\overline{Q_v(t)}}{\lambda\cdot\sqrt{\dfrac{p}{a}}} \\ J_0\left(r_1\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) & T_z(p) \end{vmatrix}}{Z_n(p)} = \frac{T_z(p)\cdot J_1\left(r_0\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) + \dfrac{\overline{Q_v(t)}}{\lambda\cdot\sqrt{\dfrac{p}{a}}}\cdot J_0\left(r_1\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}, \tag{12}$$

де

$$Z_n(p) = J_1\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot K_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right) + J_0\left(r_1\sqrt{\frac{p}{a}}\right)\cdot K_1\left(r_0\sqrt{\frac{p}{a}}\right).$$

Тоді з урахуванням (11) та (12) отримаємо:

$$\overline{\theta} = \frac{\left[T_z(p)\cdot K_1\left(r_0\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) - \dfrac{\overline{Q_v(t)}}{\lambda\cdot\sqrt{\dfrac{p}{a}}}K_0\left(r_1\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)\right]\cdot J_0\left(r\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) + \left[T_z(p)\cdot J_1\left(r_0\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) + \dfrac{\overline{Q_v(t)}}{\lambda\cdot\sqrt{\dfrac{p}{a}}}\cdot J_0\left(r_1\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)\right]\cdot K_0\left(r\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)}.$$

З останнього рівняння дістаємо передатні функції $W_{Tv\to\theta}(p,r)$ (канал «тепловий потік на внутрішній поверхні – температура циліндра за радіусом») та $W_{Tz\to\theta}(p,r)$ (канал «температура зовнішньої поверхні циліндра – температура циліндра за радіусом»).

$$W_{Tv\to\theta}(p,r) = \frac{K_1\left(r_0\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)J_0\left(r\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) + J_1\left(r_0\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)K_0\left(r\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)}{Z_n(p)},$$

$$W_{Tz\to\theta}(p,r) = \frac{\left[J_0\left(r_1\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)\cdot K_0\left(r\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right) - K_0\left(r_1\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)\cdot J_0\left(r\sqrt{\dfrac{p}{a}}\right)\right]}{\lambda\cdot\sqrt{\dfrac{p}{a}}\cdot Z_n(p)}.$$

Варіант 5. *Ngv*=2, *Ngz*=2. Маємо такі граничні умови

$$\begin{cases} -\lambda\left.\dfrac{\partial\theta}{\partial r}\right|_{r=r_1} = Q_v(t) \\ \left.\theta\right|_{r=r_0} = Q_z(t) \end{cases}.$$

При даній комбінації граничних умов усталений режим в об’єкті (пустотілому циліндрі) – неможливий, оскільки $Q_v(t)$ та $Q_z(t)$ - незалежні одне від одного, і температура при небалансі потоків температура зсередини і ззовні буде або необмежено зростати, або необмежено спадати. Таким чином, при відсутності усталеного режиму не можна говорити про відхилення від нього. Отже, визначення передатних функцій у цьому випадку втрачає сенс.

Для розрахунку частотних характеристик на базі передатних функцій циліндричних стінок треба брати до уваги такі співвідношення:

$$\begin{cases} I_0\left(x\sqrt{j}\right) = berx + jbeix, \\ \sqrt{j}I_1\left(x\sqrt{j}\right) = ber'x + jbei'x, \\ K_0\left(x\sqrt{j}\right) = \ker x + jkeix, \\ \sqrt{j}K_1\left(x\sqrt{j}\right) = -(\ker' x + jkei'x). \end{cases}$$

Функції $ber(x)$, $bei(x)$ (Bessel real, Bessel imagine), $\ker(x)$, $kei(x)$ (Kelvin real, Kelvin imagine) іще називають функціями Томсона (Кельвіна). Ці функції табульовані [8, 10, 12]. При $x < 1$ їх можна обчислювати за такими формулами:

$$ber(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{4n}\left[(2n)\ !\right]^2};$$

$$bei(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{2n+2}\left[(2n+1)\ !\right]^2};$$

$$\ker(x) = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right)ber(x) + \frac{\pi}{4}bei(x) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{2n}\left[(2n)\ !\right]^2}\sum_{m=1}^{2n}\frac{1}{m};$$

$$kei(x) = \left(\ln\frac{2}{x} - C\right)bei(x) + \frac{\pi}{4}ber(x) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2^{4n+2}\left[(2n+1)\ !\right]^2}\sum_{m=1}^{2n+1}\frac{1}{m};$$

$$ber^{/}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4nx^{4n-1}}{2^{4n}\left[(2n)\ !\right]^2};$$

$$bei^{/}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(4n+2)x^{4n+1}}{2^{2n+2}\left[(2n+1)\ !\right]^2};$$

$$\ker^{/}(x) = -\frac{1}{x}ber(x) + \left(\ln\frac{2}{x} - C\right)ber^{/}(x) - \frac{\pi}{4}bei^{/}(x) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4nx^{4n-1}}{2^{4n}\left[(2n)\ !\right]^2}\sum_{m=1}^{2n}\frac{1}{m};$$

$$kei^{/}(x) = -\frac{1}{x}bei(x) + \left(\ln\frac{2}{x} - C\right)bei^{/}(x) - \frac{\pi}{4}ber^{/}(x) + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(4n+2)x^{4n+1}}{2^{4n+2}\left[(2n+1)\ !\right]^2}\sum_{m=1}^{2n+1}\frac{1}{m};$$

При $x \geq 1$

$$ber(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[L_0(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - M_0(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$bei(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}}\left[M_0(x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) - L_0(x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$\ker(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left[L_0(-x)\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) + M_0(-x)\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)\right];$$

$$kei(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[M_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) - L_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \right];$$

$$ber^{/}(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[S_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) - T_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \right];$$

$$bei^{/}(x) \cong \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[T_0(x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) + S_0(x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \right];$$

$$\ker^{/}(x) \cong -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[S_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) + T_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right];$$

$$kei^{/}(x) \cong -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left[T_0(-x) \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) - S_0(-x) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right].$$

Тут

$$L_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \ldots (2n-1)^2}{n\ !(8x)^n} \cos\left(n\frac{\pi}{4} \right);$$

$$M_0(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \ldots (2n-1)^2}{n\ !(8x)^n} \sin\left(n\frac{\pi}{4} \right);$$

$$S_0(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \ldots (2n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)n\ !(8x)^n} \cos\left(n\frac{\pi}{4} \right);$$

$$T_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 3^2 5^2 \ldots (2n+1)^2}{(2n-1)(2n+1)n\ !(8x)^n} \sin\left(n\frac{\pi}{4} \right).$$

Для реалізації цього алгоритму треба мати в розпорядженні підпрограми для обчислення функцій *ber(x), bei(x),* ker(x)*, kei(x),* а в більш загальному випадку також і *ber'(x), bei'(x),* ker'(x)*, kei'(x).*

При необхідності ці підпрограми користувач може створити самостійно за наведеними вище формулами. Можна також скористатися таблицями відповідних функцій, сформувавши на їх базі інтерполяційні структури (поліноми, кубічні сплайни або B-сплайни). Але найбільш доцільним виглядає чисельне інтегрування диференційних рівнянь (1) з відповідними граничними умовами при одиничному ступінчастому вхідному сигналі при нульових початкових умовах. Таким чином можна було б сформувати масив ординат перехідної характеристики. Шляхом чисельного диференціювання даний масив можна було б перерахувати в масив ординат імпульсної характеристики, а вже цей останній в дійсно- й уявно-частотні характеристики. Такий алгоритм розглянуто у [12].

Висновки. У даній роботі отримані передатні функції та частотні характеристики об’єктів з розподіленими параметрами, які з точки зору їх математичного моделювання можуть розглядатися як циліндричні теплоакумулюючі стінки. Дані передатні функції є трансцендентними і їх безпосереднє використання для розв’язання задач аналізу та синтезу систем керування не є тривіальним. Саме ця обставина обумовлює шляхи подальших досліджень. Їх може бути декілька.

Перший шлях пов’язаний з розробкою методів безпосереднього використання передатних функцій нетривіальної структури для аналізу та синтезу систем керування.

Другий шлях передбачає використання відомих методів аналізу та синтезу систем керування, але отримані у даній роботі передатні функції повинні бути представлені у вигляді дробово-раціональних функцій, що обумовлює потребу у розробці відповідних методів апроксимації та аналізу їх ефективності.

Список літератури: **1.** *Рапопорт, Э. Я.* Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами [Текст] / *Э. Я. Рапопорт.* – М.: Высш. шк., 2005. – 292 с. **2.** *Шевяков, А. А.* Управление тепловыми объектами с распределенными параметрами [Текст] / *А. А. Шевяков, Р. В. Яковлева*. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 208 с. **3.** *Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N.* Transport Phenomena, Revised Second Edition // New York, USA. – 2007. **4.** *Бутковский, А. Г.* Методы управления систем с распределенными параметрами [Текст] / *А. Г. Бутковский*. – М.: Наука, 1975. – 568 с. **5.** *Владимиров, В. С.* Уравнения математической физики [Текст] / *В. С. Владимиров.* – М.: Наука, 1976. – 435 с. **6.** *Згуровский, М. З.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями [Текст] / *М. З. Згуровский, В. С. Мельник, А. Н. Новиков.* – К.: Наукова думка, 2004. – 588 с. **7.** *Бутковский, А. Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами [Текст] / *А. Г. Бутковский.* – М.: Наука, 1979. – 224 с. **8.** *Arfken, G.* Mathematical Methods for Physicists [Текст] / *Arfken, G., Hans J. Weber*. — 6th edition. — San Diego: Harcourt, 2005. **9.** *Bayin, S. S.* Mathematical Methods in Science and Engineering [Текст] / *Bayin S.S.* - Wiley, 2006. **10.** *Грищенко, А. З.* Комп’ютерне визначення коефіцієнтів передаточної функції дискретної моделі теплоакумулюючої стінки [Текст] / *А. З. Грищенко, Н. А. Кубрак* // Автоматизація виробничих процесів. – 2001. – № 1 (12). – С. 28–35. **11**. *Кубрак, А. І.* Передатні функції та частотні характеристики циліндричної теплоакумулюючої стінки [Текст] */ А. І. Кубрак, А. І. Жученко* // Вісник національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»: серія «хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження». – 2013. – № 1 (11). – С. 81–88. **12.** *Ken Habgood, Itamar Arel* "A condensation-based application of Cramer’s rule for solving large-scale linear systems". Journal of Discrete Algorithms 10: 98, 2012. – 109 с.

Bibliography (transliterated): **1.** *Rapoport, E. Y.* (2005). Analysis and Synthesis of Automatic Control Systems with Distributed Parameters. Moscow, Vishaja shkola, 292.**2.** *Sheviakov, A. A., Yakovleva, R. V.* (1986). Control of Heat Plants with Distributed Parameters. Moscow, Enerhoatomyzdat, 208. **3.** *Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N.* (2007). Transport Phenomena, Revised Second Edition. New York, USA. **4.** *Butkovskyi, A. H.* (1975). Methods of Control Systems with Distributed Parameters. Moscow, Nauka. 568. **5.** *Vladymyrov, V. S.* (1976). Equitions of Mathematical Phisics. Moscow, Nauka, 435. **6.** *Zghurovskyi, M. Z., Melnyk, V. S., Novykov, A. N.* (2004). Applied Methods of Analys and Control by Nonlinear Processes and Fields. Kyiv, Naukova dumka, 588. **7.** *Butkovskyi, A. H.* (1979). Responses of Systems with Distributed Parameters. Moscow, Nauka, 224. **8.** *Arfken, George B., Hans J. Weber* (2005). Mathematical Methods for Physicists. 6th edition. San Diego: Harcourt. **9.** *Bayin, S.S.* (2006) Mathematical Methods in Science and Engineering, Wiley. **10.** *Hryshchenko, A. Z., Kubrak, N. A.* (2001). Computer Determination of Transfer Function Coefficients of Discrete Model of Heat Storage Wall. Kyiv, №1(12), 28–35. **11**. *Kubrak, A. I. Zhuchenko, A. I.* (2013). Transfer Functions and Frequency Responses of Cylindrical Heat Storage Wall. Kyiv, NTUU “KPI”, № 1 (11), 81–88. **12.** *Ken Habgood, Itamar Arel* (2012). "A condensation-based application of Cramer’s rule for solving large-scale linear systems". Journal of Discrete Algorithms 10: 98–109.

Надійшла (received) 25.05.2014