УДК 004.932

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ОТКЛОНЕНИЙ МЕЖДУ ОЦЕНКАМИ ПОЛОЖЕНИЙ НЕБЕСНЫХ ОБЪЕКТОВ В ЗАДАЧЕ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ CCD-КАДРА

Н. Ю. ДИХТЯР*, Я. С. МОВСЕСЯН, С. В. ХЛАМОВ, В. Е. САВАНЕВИЧ

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, УКРАИНА
**email:movsesian.iana@gmail.com*

АНОТАЦІЯ *У статті запропоновано уточнення виразів для аналітичного розрахунку відхилень різних оцінок положень зоряного об'єкту в екваторіальній системі координат, мінімум суми таких відхилень є критерій досконалого паросполучення в задачі ототожнення вимірювань астрономічного CCD-кадру із зоряним каталогом. Уточнення представлених у статті формул для відхилень різних оцінок положень екваторіальних координат небесних об'єктів дозволяють підвищити точність спостережень в сучасній астрономії.*
Ключові слова: *відхилення, CCD - кадр, небесний об'єкт, екваторіальні координати, відхилення по схиленню, відхилення по сходженню, оцінка положення.*

АННОТАЦИЯ *В данной статье предложено уточнение выражений для аналитического расчета отклонений различных оценок положения звездного объекта в экваториальной системе координат, минимум суммы которых является критерием совершенного паросочетания в задаче отождествления астрономического CCD-кадра со звездным каталогом. Уточнение представленных в статье формул для отклонений различных оценок экваториальных координат небесных объектов позволяют повысить точность наблюдений в современной наблюдательной астрономии*
Ключевые слова: *отклонение,* CCD *-кадр, небесный объект, экваториальные координаты, отклонение по склонению, отклонение по восхождению, оценка положения*

ANALYTICAL EXPRESSIONS FOR THE CALCULATION OF DEVIATIONS BETWEEN ASSESSMENTS OF THE HEAVENLY OBJECT IN THE PROBLEM OF IDENTIFICATION CCD-FRAME

N.DICHTYAR *, IA. MOVSESIAN, S. CHLAMOV, V. SAVANEVYCH

Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, UKRAINE

ABSTRACT *Clarification of the expressions for the analytical calculation of deviations of different assessments of the stellar object in the equatorial coordinate system is suggested in the article. It is advisable to use specified deviation in equatorial coordinate system as a criterion for identifying based on the number of technical reasons.*
Full deviation is resolved into two components during analysis of mutual deviations of different assessments of stellar objects. The first component is a deviation in declination. It is a deviation between the estimates of stellar object position in the meridian of etalon estimate. The second component is a deviation in right ascension. It is a deviation between the estimates of stellar object position outside of the meridian of etalon estimate.
Etalon estimate should be measurement of the stellar catalog if we compare the estimates between frame and stellar catalog. The minimum sum of assessments of the object is the criterion for a perfect matching in the identification problem of astronomical CCD-frame with the star catalog.
Perfect matching is in accordance with certain criterion. It can be reduced to a combination of deviations between the estimates of the provisions of stellar objects within these pairs. Recent deviations are a criterion of the frame identification on the star pattern. The accuracy of observations in modern observational astronomy will be improved by using described expressions in this article.
Keywords: *deviation, CCD-frame, celestial object, equatorial coordinates, the deviation in declination, deviation ascent.*

Введение

В работе [1, 2] показано, что задача отождествления астрономического CCD-кадра [3, 4] со звездным каталогом сводится к нахождению совершенного паросочетания в соответствии с некоторым метакритерием. Данный метакритерий может быть сведен к сочетанию отклонений между оценками положений небесных объектов внутри указанных пар. Последние отклонения и являются критерием отождествления кадра по звездному узору.

Анализ литературы

Исходя из ряда технических соображений целесообразно в качестве критерия отождествления использовать указанные отклонения в экваториальной системе координат [5, 6]. Иными словами, часто при анализе взаимных отклонений различных оценок положения небесных объектов полное отклонение раскладывают на две составляющие. Первая из них, – отклонение $\Delta\delta$ по склонению – представляет собой отклонение между оценками положения небесного объекта внутри меридиана одной из оценок. Естественно считать, что указанная выше оценка, соответствующая меридиану, признается за эталон. Так, например, если сравниваются оценки кадра (измерения) и каталога, то за эталон принимаются измерения каталога.

Таким образом, отклонение по склонению представляет собой отклонение между оценками положения в плоскости меридиана, соответствующего оценке, выбранной в качестве эталона (в плоскости меридиана эталона). Второе отклонение – отклонение $\Delta\alpha_j$ по прямому восхождению – является отклонением между различными оценками положений небесного объекта вне плоскости меридиана эталона.

Отклонения между различными оценками экваториальных координат (прямого восхождения и склонения) одних и тех же небесных объектов не могут быть представлены простой их разницей. В частном случае данное утверждение касается отклонений между измерениями и каталожными значениями положения небесных объектов.

В литературе [7, 8, 9] достаточно часто отклонение $\Delta\delta$ по склонению представляется простой разницей оценок. В свою очередь отклонение по прямому восхождению представляется формулой:

$$\Delta\alpha = (\alpha_s - \alpha_g)\cdot\cos\delta_s . \qquad (1)$$

Выражение (1) имеет ясный физический смысл. На экваторе отклонение $\Delta\alpha$ по прямому восхождению равно арифметической разности значений различных оценок прямого восхождения небесного объекта. На полюсе все возможные значения прямого восхождения от 0 до 360 градусов соответствуют одной и той же точке – полюсу небесной сферы. В соответствии с этим, отклонение по прямому восхождению для полюса ($\delta = 90^\circ$) будет признано равным нулю при любых значениях оценок прямых восхождений α_s и α_g .

Целью статьи является уточнение формул для отклонений различных оценок (прежде всего измерения кадра и каталожного значения) экваториальных координат небесных объектов.

Полное отклонение между различными оценками экваториальных координат небесного объекта

Полное отклонение между различными оценками экваториальных координат небесного объекта является центральным углом (угол с вершиной в центре небесной сферы) между двумя положениями объекта на небесной сфере, соответствующими различным оценкам.

Определяется полное отклонение следующим образом. Оценка положения j -го объекта, согласно данным каталога, задается экваториальными координатами α_{catj} , δ_{catj} .

Декартовые координаты x_{catj} , y_{catj} , z_{catj} точки (начало системы координат находится в центре небесной сферы) с экваториальными координатами $\alpha_{catj},\delta_{catj}$ на сфере единичного радиуса определяются выражением [10, 11]

$$. \chi_{catj} = \begin{pmatrix} x_{catj} \\ y_{catj} \\ z_{catj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha_{catj}\cos\delta_{catj} \\ \cos\alpha_{catj}\cos\delta_{catj} \\ \sin\delta_{catj} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Центральный угол между двумя оценками положения объекта χ_{j1} и χ_{j2} определяется выражением [10, 11]:

$$\cos(\chi_{j1},\chi_{j2})=\frac{x_{catj1}\cdot x_{catj2}+y_{catj1}\cdot y_{catj2}+z_{catj1}z_{catj2}}{\sqrt{x^2_{catj1}+y^2_{catj1}+z^2_{catj1}}\sqrt{x^2_{catj2}+y^2_{catj2}+z^2_{catj2}}}. \quad (3)$$

Так как исследуемые точки лежат на сфере единичного радиуса, то знаменатель выражения (3) равен 1 по определению. Тем самым, значение искомого полного отклонения, значение искомого центрального угла между двумя оценками положения объекта на небесной сфере, определяется выражением:

$$\Delta_{12j}=\arccos(x_{catj1}\cdot x_{catj2}+y_{catj1}\cdot y_{catj2}+z_{catj1}\cdot z_{catj2}). \quad (4)$$

Для удобства изложения и восприятия материала далее в обозначении отклонений $\Delta\alpha_j$ и $\Delta\delta_j$ индекс j опускается.

Для вывода выражений для введенных указанным выше образом отклонений понадобиться уравнение плоскости меридиана и прямоугольные координаты точек S, W, G (рис. 1). Считается, что точка S характеризует измерение (например, оценку положения объекта по результатам обработки кадра), а точка G – характеризует эталон (каталожную оценку положения этого же объекта). В дальнейшем для упрощения изложения материала точка S будет называться измерением, а точка G –эталоном.

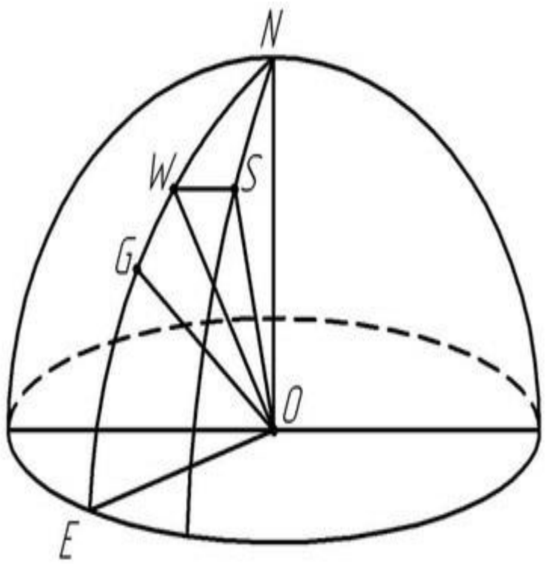

Рис. 1 – Изображение измеренной S и эталонной G оценок положения объекта на сфере.

Плоскость меридиана эталона проходит через 3 точки с известными координатами: полюс сферы N с координатами $(0,0,1)$, центр сферы O с координатами $(0,0,0)$ и точку E на экваторе сферы с координатами $(\sin\alpha_g;\cos\alpha_g;\,0)$. При этом уравнение данной плоскости можно представить следующим образом [10, 11]:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_N-x_0 & x_E-x_0 \\ y-y_0 & y_N-y_0 & y_E-y_0 \\ z-z_0 & z_N-z_0 & z_E-z_0 \end{vmatrix}=0. \quad (5)$$

После подстановки в выражение (5) выражений для координат точек полюса сферы N, центра сферы O, узла меридиана E:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & \sin\alpha_g \\ y & 0 & \cos\alpha_g \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0. \quad (6)$$

После раскрытия определителя (6) уравнение плоскости меридиана эталона можно записать в виде:

$$x\cos\alpha_g-y\sin\alpha_g=0. \quad (7)$$

Иными словами, уравнение плоскости меридиана эталона (плоскости меридиана, проходящей через точку G, соответствующую эталонному/каталожному положению небесного объекта [10, 11]) имеет вид:

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad (8)$$

где

$$A=\cos\alpha_g;$$
$$B=-\sin\alpha_g;$$
$$C=0;$$
$$D=0. \quad (9)$$

Относительно выражений для прямоугольных координат измерения S и эталона G (рис. 1).

Согласно выражению (2) имеют место тождества:

$$x_s=\sin\alpha_s\cos\delta_s;$$
$$y_s=\cos\alpha_s\cos\delta_s;$$
$$z_s=\sin\delta_s; \quad (10)$$

$$x_g = \sin\alpha_g \cos\delta_g ;$$
$$y_g = \cos\alpha_g \cos\delta_g ;$$
$$z_g = \sin\delta_g . (11)$$

Целесообразно ввести проекцию измерения S на плоскость ранее введенного меридиана. Данная точка на рисунке 1 обозначена буквой W.

Для нахождения координат точки W можно использовать параметрическое уравнение прямой, перпендикулярной плоскости рассматриваемого меридиана [10, 11]:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} = t . \qquad (12)$$

Исходя из (12) значения координат точки W определяются выражениями:

$$x_w = At + x_s ,$$
$$y_w = Bt + y_s ,$$
$$z_w = z_s . \qquad (13)$$

В результате подстановки выражения (13) для координат точки W в уравнение плоскости (8) можно записать выражение для формальной переменной t:

$$t = -\frac{Ax_s + By_s}{A^2 + B^2} . \qquad (14)$$

Выражение (14) с учетом последнего выражения можно переписать в виде:

$$x_w = -A\frac{Ax_s + By_s}{A^2 + B^2} + x_s ;$$

$$y_w = -B\frac{Ax_s + By_s}{A^2 + B^2} + y_s$$

$$z_w = z_s . \qquad (15)$$

Согласно (10), (11), (9), помня, что так как $A = \cos\alpha_g$, то $(1 - A)^2 = \sin^2\alpha_g$, можно записать выражение для координаты x_w:

$$x_w = \sin^2\alpha_g \cdot \sin\alpha_s \cdot \cos\delta_s +$$
$$+ \cos\alpha_g \cdot \sin\alpha_g \cdot \cos\alpha_s \cos\delta_s =$$
$$= \sin\alpha_g \cdot \cos\delta_s (\sin\alpha_g \sin\alpha_s + \cos\alpha_g \cdot \cos\alpha_s) .$$

Используя формулу косинуса разности углов [10, 11] последнее выражение перепишется в виде:

$$x_w = \sin\alpha_g \cdot \cos\delta_s \cdot \cos(\alpha_s - \alpha_g) . \qquad (16)$$

Аналогично, согласно (10), (11), (9), помня, что $(1 - B^2) = \cos^2\alpha_g$ можно записать выражение для координаты y_w:

$$y_w = \sin\alpha_g \cdot \cos\alpha_g \cdot \sin\alpha_s \cdot \cos\delta_s +$$
$$+ \cos^2\alpha_g \cdot \cos\alpha_s \cos\delta_s =$$
$$= \cos\alpha_g \cdot \cos\delta_s (\sin\alpha_g \sin\alpha_s + \cos\alpha_g \cdot \cos\alpha_s) .$$

Используя формулу косинуса разности углов [10, 11]:

$$y_w = \cos\alpha_g \cdot \cos\delta_s \cdot \cos(\alpha_s - \alpha_g) . \ (17)$$

Не трудно показать, что с учетом (2) согласно (15):

$$z_w = \sin\delta_s . \qquad (18)$$

Отклонение $\Delta\alpha$ по прямому восхождению, с точки зрения геометрии, является центральным углом между точкой S, расположенной на сфере единичного радиуса, и плоскостью NOE меридиана эталона, который соответствует точке G (рисунок 1).

Аналитическое выражение для нахождения значения отклонения $\Delta\alpha$ по прямому восхождению можно найти следующим образом.

Угол между вектором точки G с координатами (x_g, y_g, z_g) и плоскостью меридиана эталона с параметрами A, B определяется выражением [10, 11]:

$$\sin\Delta\alpha = \frac{Ax + By + Cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \times \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} . (19)$$

Знаменатель в выражении (19) равен 1, так как вектор $\overline{OS}$ и все 3 точки, используемые для построения плоскости меридиана, расположены на сфере единичного радиуса.

Исходя из выражений для параметров прямой (8) и координат вектора $\overline{OS}$ (10) значение искомого отклонения $\Delta\alpha$ по прямому восхождению (значение угла между плоскостью меридиана эталона (8) и вектором $\overline{OS}$) может быть представлено выражением:

$$\Delta\alpha = \arcsin\left((\cos\alpha_g \cdot \sin\alpha_s - \sin\alpha_g \cdot \cos\alpha_s)\cdot\cos\delta_s\right).$$

Используя тождество [10, 11]:

$$\sin(\alpha-\delta) = \cos\delta\cdot\sin\alpha - \sin\delta\cdot\cos\alpha .$$

Последнее выражение можно переписать в виде:

$$\Delta\alpha = \arcsin\left(\sin(\alpha_s - \alpha_g)\cdot\cos\delta_s\right). \qquad (20)$$

Выбор способа нахождения угла через значение его синуса связан с тем, что функция синуса однозначно определена в первом и четвертом квадрантах, в отличие от косинуса.

При проведении астрономических наблюдений исследуемые отклонения не превышают единицу угловых секунд. Известно, что значение синуса малых углов равно значению (в радианах) этих углов. Исходя из этого, в частном случае малых значений отклонений выражение (20) для отклонения $\Delta\alpha$ по прямому восхождению можно переписать в виде (1).

Иногда кроме значения синуса искомого угла целесообразно дополнительно иметь значение косинуса данного угла. Для нахождения косинуса $\cos(\Delta\alpha)$ отклонения по прямому восхождению необходимо найти угол между векторами $\overline{OS}$ и $\overline{OW}$, где точка W является проекцией измерения (точки S) на плоскость меридиана эталона (рисунок 1). Для этого можно воспользоваться выражением (4):

$$\Delta\alpha = \arccos(x_s x_w + y_s y_w + z_s z_w)\,. \qquad (21)$$

С учетом выражений (10) и (11) для координат измерения (точка S) и его проекции на меридиан эталона (точка W) не трудно доказать тождество:

$$\begin{aligned}
&x_s x_w + y_s y_w + z_s z_w = \\
&\sin\alpha_s\cdot\cos^2\delta_s\cdot\sin\alpha_g\cdot\cos(\alpha_g-\alpha_s)+ \\
&+\cos\alpha_s\cdot\cos^2\delta_s\cos\alpha_g\cdot\cos(\alpha_g-\alpha_s)+\sin^2\delta_s = \\
&=\cos^2\delta_s\cdot\cos(\alpha_g-\alpha_s)\times \\
&\times(\sin\alpha_s\cdot\sin\alpha_g+\cos\alpha_s\cdot\cos\alpha_g)+\sin^2\alpha_s = \\
&=\sin^2\delta_s+\cos^2\delta_s\cdot\cos^2(\alpha_g-\alpha_s)=. \\
&=\sin^2\delta_s\sin^2(\alpha_g-\alpha_s)+\cos^2(\alpha_g-\alpha_s)
\end{aligned}$$

Таким образом, выражение для отклонения $\Delta\alpha$ по прямому восхождению может быть представлено как через функцию арксинуса (1) так и через функцию арккосинуса:

$$\Delta\alpha = \arccos(\sin^2\delta_s + \cos^2\delta_s\cos^2(\alpha_g-\alpha_s))\,. \qquad (22)$$

Как было указано выше, отклонение $\Delta\alpha$ по склонению представляет собой отклонение между оценками положения небесного объекта внутри меридиана одной из оценок. Для его нахождения необходимо определить координаты точки W, которая является проекцией точки S на плоскость меридиана.

Иными словами, отклонение $\Delta\delta$ по склонению, с точки зрения геометрии сферы, представляет собой угол между векторами $\overline{OG}$ и $\overline{OW}$. (рисунок 1), то есть центральный угол между направлениями на эталон и проекцию измерения на плоскость меридиана эталона.

Аналитическое выражение для нахождения значения отклонения $\Delta\delta$ по склонению можно найти следующим образом.

Значение угла между двумя рассмотренными векторами $\overline{OG}$ и $\overline{OW}$ определяется выражением (4):

$$\Delta\delta = \arccos(x_g x_w + y_g y_w + z_g z_w)\,. \qquad (23)$$

С учетом выражений (10) и (11) для нахождения координат измерения (точка S) и его проекции на меридиан эталона (точка W) не трудно доказать тождество:

$$\begin{aligned}
&x_g x_w + y_g y_w + z_g z_w = \\
&\sin^2\alpha_g\cdot\cos\delta_g\cdot\cos\delta_s\cdot\cos(\alpha_g-\alpha_s)+ \\
&+\cos^2\alpha_g\cdot\cos\delta_g\cos\delta_s\times \\
&\times\cos(\alpha_g-\alpha_s)+\sin\delta_g\sin\delta_s = \\
&=\cos\delta_g\cdot\cos\delta_s\cdot\cos(\alpha_g-\alpha_s)\times \\
&\times(\sin^2\alpha_g+\cos^2\alpha_g)+\sin\delta_g\sin\delta_s = \\
&=\sin\delta_s\sin\delta_g+\cos\delta_s\cos\delta_g\cos(\alpha_g-\alpha_s)\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, выражение для отклонения $\Delta\delta$ по склонению может быть представлено также через функцию арккосинуса:

$$\Delta\delta = \arccos(\sin\delta_s\sin\delta_g + \cos\delta_s\cos\delta_g\cos(\alpha_g-\alpha_s)) \qquad (24)$$

Как и для случая отклонения по прямому восхождению, кроме выражения для косинуса отклонения по склонению, целесообразно найти выражение для синуса данного отклонения. Значение синуса отклонения по склонению $\Delta\delta$ между двумя заданными векторами $\overline{OG}$ и $\overline{OW}$ определяется как отношение модуля векторного произведения этих векторов к произведению их модулей [10, 11]:

$$\sin\Delta\delta = \frac{\left|[\overline{OG},\overline{OW}]\right|}{\left|\overline{OG}\right|\times\left|\overline{OW}\right|}. \quad (25)$$

Модули исходных векторов $\overline{OG}$ и $\overline{OW}$ равны 1, так как они лежат на сфере единичного радиуса.

Таким образом, значение синуса отклонения по склонению $\Delta\delta$ может быть представлено выражением:

$$\sin\Delta\delta = \left|[\overline{OG},\overline{OW}]\right|. \quad (26)$$

Координаты векторного произведения векторов $\overline{OG}$ и $\overline{OW}$ можно записать в виде [10, 11]:

$$\begin{pmatrix} x_{gw} \\ y_{gw} \\ z_{gw} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_g z_w - y_w z_g \\ x_w z_g - x_g z_w \\ x_g y_w - x_w y_g \end{pmatrix}. \quad (27)$$

С учетом выражений (11), (16), (17), (18), для координат эталона (точка G) и проекции измерения на плоскость меридиана эталона (точка W) координаты рассматриваемого векторного произведения примут вид:

$$x_{GW} = \cos\alpha_g \cdot \cos\delta_g \cdot \sin\delta_s -$$
$$-\cos\alpha_g \cdot \cos\delta_s \cdot \cos(\alpha_g - \alpha_s) \cdot \sin\delta_g;$$
$$y_{GW} = \sin\alpha_g \cdot \cos\delta_s \cdot \cos(\alpha_g - \alpha_s) \times$$
$$\times \sin\delta_g - \sin\alpha_g \cdot \cos\delta_g \cdot \sin\delta_s;$$
$$z_{GW} = 0.$$

Выражение для квадрата модуля искомого векторного произведения векторов $\overline{OG}$ и $\overline{OW}$ имеет вид [10, 11]:

$$\left|[\overline{OG},\overline{OW}]\right|^2 = x^2{}_{gw} + y^2{}_{gw} + z^2{}_{gw} =$$
$$= \cos^2\alpha_g \cdot \cos^2\delta_g \cdot \sin^2\delta_s +$$
$$+ \cos^2\alpha_g \cdot \cos^2\delta_s \cdot \cos^2(\alpha_g - \alpha_s) \cdot \sin^2\delta_g -$$
$$-2\cos^2\alpha_g \cdot \cos\delta_g \cdot \sin\delta_s \times$$
$$\times \cos\delta_s \cdot \cos(\alpha_g - \alpha_s) \cdot \sin\delta_g +$$
$$+ \sin^2\alpha_g \cdot \cos^2\delta_s \cdot \cos^2(\alpha_g - \alpha_s) \cdot \sin^2\delta_g +$$
$$+ \sin^2\alpha_g \cdot \cos^2\delta_g \cdot \sin^2\delta_s -$$
$$-2\sin^2\alpha_g \cdot \cos\delta_s \cdot \cos(\alpha_g - \alpha_s) \times$$
$$\cdot \sin\delta_g \cdot \cos\delta_g \cdot \sin\delta_s. \quad (28)$$

Первое и пятое слагаемые последнего выражения имеют общие сомножители $\cos^2\delta_g \cdot \sin^2\delta_s$. Их индивидуальными сомножителями являются $\cos^2\alpha_g$ и $\sin^2\alpha_g$.

Следовательно, сумма данных слагаемых представляется выражением $\cos^2\delta_g \cdot \sin^2\delta_s$. По аналогичной причине сумма второго и четвертого слагаемых последнего выражения может быть представлена выражением:

$$\cos^2\delta_s \cdot \cos^2(\alpha_g - \alpha_s) \cdot \sin^2\delta_g.$$

В свою очередь сумма третьего и шестого слагаемых последнего выражения определяется выражением:

$$\cos\delta_g \cdot \sin\delta_s \cdot \cos\delta_s \cdot \cos(\alpha_g - \alpha_s) \cdot \sin\delta_g.$$

Таким образом, выражение (28) примет вид:

$$\left|[\overline{OG},\overline{OW}]\right|^2 =$$
$$\sin^2\delta_s \cos^2\delta_g + \cos^2\delta_s \sin^2\delta_g \cos^2(\alpha_g - \alpha_s) -$$
$$-2\sin\delta_s \cdot \cos\delta_g \cdot \cos\delta_s \times$$
$$\times \sin\delta_g \cdot \cos(\alpha_g - \alpha_s) =$$
$$= (\sin\delta_s \cos\delta_g - \cos\delta_s \sin\delta_g \cos(\alpha_g - \alpha_s))^2. \quad (29)$$

Таким образом, согласно (26), (29) отклонение по склонению $\Delta\delta$ может быть представлено выражением:

$$\Delta\delta = \pm\arcsin(\sin\delta_s \cos\delta_g - \cos\delta_s \sin\delta_g \cos(\alpha_g - \alpha_s)). \quad (30)$$

Выражения (24), (30) представляют значения синуса и косинуса отклонения по склонению. Иногда, для однозначности расчета значений угла на интервале от 0 до 2π, необходимо использовать оба эти значения. Почти всегда в практике современных астрономических наблюдений отклонение не превышает нескольких угловых секунд. В этих условиях для определения отклонения по склонению необходимо использовать выражение (30). Связано это с тем, что функция синуса однозначно определена в первой и четвертой четвертях.

Относительно анализа физического смысла выражений для отклонения по склонению $\Delta\delta$ (24), (30). Выражение под арксинусом в (30) без множителя второго слагаемого $\cos(\alpha_g - \alpha_s)$ представляет собой выражение для синуса разности $\Delta\delta = \delta_s - \delta_g$.

Согласно современной практике астрономических наблюдений отклонение $\Delta\alpha = \alpha_g - \alpha_s$ по прямому восхождению мало (не превышает единицу угловых секунд).

Следовательно, чаще всего $\cos(\alpha_g - \alpha_s) \cong 1$. Следовательно, чаще всего выражение (30) является тождеством $\Delta\delta = \arcsin(\sin(\Delta\delta))$. Иными словами, при малых значениях (что соответствует практике современных астрономических наблюдений) отклонения по прямому восхождению $\Delta\alpha = \alpha_g - \alpha_s$ отклонение по склонению $\Delta\delta$ может быть определено путем простого алгебраического вычитания значений склонения, содержащихся в измерении и каталоге (или в разных каталогах):

$$\Delta\delta = \delta_s - \delta_g . \qquad (31)$$

Анализ

Для анализа (24), (30) интересен другой крайний случай. Случай, когда значение $\Delta\alpha = \alpha_g - \alpha_s$ составляет примерно 180 градусов. Такой случай может иметь место при наблюдении полярной области, когда «измерение» и «эталон» находятся «с разных сторон полюса». С формальной точки зрения, $\cos(\alpha_g - \alpha_s)$ принимает значение -1. При этом, выражение под арксинусом в (30) без множителя второго слагаемого $\cos(\alpha_g - \alpha_s)$ представляет собой выражение для синуса суммы $\delta_s + \delta_g$. Для анализа, с учетом рассмотрения приполярной области, обе оценки склонения удобно представить следующим образом $\delta_s = \pi/2 - \varepsilon_s$, $\delta_g = \pi/2 - \varepsilon_g$. Используя формулы привидения [10, 11], не трудно доказать тождество

$$\sin(\delta_s + \delta_g) =$$
$$\sin(\pi/2 - \varepsilon_s + \pi/2 - \varepsilon_g) =$$
$$\sin(\pi - (\varepsilon_s + \varepsilon_g)) = \sin(\varepsilon_s + \varepsilon_g) .$$

Следовательно, согласно (30) выражение для отклонения по склонению в данном частном случае примет вид:

$$\Delta\delta = \varepsilon_s + \varepsilon_g . \qquad (32)$$

Иными словами, в данном частном случае расположения «измерения» и «эталона» с разных сторон полюса» отклонение по склонению равно сумме дополнений значений оценок склонений объекта до $\pi/2$.

Например, две оценки склонения одной звезды (одного небесного объекта) одинаковы и составляют 89 градусов, а соответствующие им оценки прямого восхождения равны соответственно 30 и 210 градусов. Прямой расчет арифметической разности даст нулевое значение отклонения по склонению (согласно выражению (31)) и отклонение в 180 градусов по прямому восхождению.

Анализ свидетельствует в пользу ложности данных вычислений. Обе рассматриваемые оценки находятся на одном меридиане (на одной дуге большого круга, проходящей через полюс сферы).

Следовательно, отклонение по прямому восхождению должно быть равно 0, а отклонение по склонению составлять 2 градуса (2=(90-89)+(90-89)). В отличие от прямого расчета разности формула (32) явно указывает на правильный ответ в 2 градуса. Естественно, такой же ответ будет дан при использовании вместо нее более общей формулы (30).

Выводы

В статье уточнены выражения для аналитического расчета отклонений различных оценок положения звездного объекта в экваториальной системе координат, минимум суммы которых является критерием совершенного паросочетания в задаче отождествления астрономического CCD-кадра со звездным каталогом. Было доказано, что выражение для отклонения $\Delta\delta$ по склонению представляется выражениями (24), (30). В свою очередь отклонение по прямому восхождению представляется формулами (20), (22).

Использование традиционных выражений, как показал приведенный в статье анализ, не всегда оправдано, а так же неприемлем при наблюдении небесных объектов в полярных областях, что особенно важно для астрономов-наблюдателей при проведении современных исследований.

Список литературы

1. **Hogg, D. W.** Astronomical imaging: The theory of everything, Classification and Discovery in Large Astronomical Survey **/ D. W. Hogg, D. Lang** // AIP Conference Proceedings**1082** – 2008 – P.331–338.
2. **Lang, D.** Astrometry.net: Blind astrometric calibration of arbitrary astronomical images / D. Lang, **D. W. Hogg, K. Mierle, M. Blanton, S. Roweis** // *The Astronomical Journal* **139** – 2010 – P. 1782–1800.
3. **George, E. Smith** The invention and early history of the CCD **/ E. Smith George** // Rev. Mod. Phys. – 2010. – V. 3, № 82. – P. 2307–2312.
4. **Janesick, J. R.** Scientific Charge-Coupled Devices (SPIE Press Monograph Vol. PM83) **/ J. R. Janesick** // SPIE Publications – 2001. – P. 920
5. **Дума, Д. П.** Загальна астрометрія. Навчальний посібник / **Д.П. Дума** – Київ: Наукова думка, 2007. – 600 с.
6. **Киселев, А.А.** Теоретические основания фотографической астрометрии **/ Киселев А.А.** – М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит, 1989. – 264 с.
7. **Majewski, S. R.** Coordinate systems (2011) //[Электронный ресурс] – Режим доступа к ресурсу:http://www.astro.virginia.edu/class/majewski/astr551/lectures/COORDS/coords.html – Название с экрана.
8. **Oliver, M.** Astronomy on the Personal Computer **/ M. Oliver, P. Thomas** // Springer-Verlag Berlin Heidelberg., – 2000 – P. 35-37
9. **Karttunen, H.** Fundamental Astronomy / **H. Karttunen, P. Kroger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner** // Berlin: Springer, – 2003 – 4th ed
10. **Виноградов И.М.,** Аналитическая геометрия / **И.М. Виноградов** – М.: Наука, Гл. Ред.. физ.-мат. лит, 1986. – 176 с.
11. **Бортаковский А.С.** Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учеб. пособие / **А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев** // – М.: Высш. шк , 2005. – 496 с.

Referens

1. Hogg, D. W., Lang D. Astronomical imaging: The theory of everything, Classification and Discovery in Large Astronomical Survey. AIP Conference Proceedings**1082**, 2008, P.331-338.
2. Lang, D. Hogg, D. W., Mierle, K., Blanton, M., Roweis S. Astrometry.net: Blind astrometric calibration of arbitrary astronomical images. *The Astronomical Journal* **139**, 2010, P. 1782-1800.
3. George, E. Smith The invention and early history of the CCD. Rev. Mod. Phys.2010, V. 3, № 82, P. 2307–2312.
4. Janesick, J. R. Scientific Charge-Coupled Devices (SPIE Press Monograph Vol. PM83) SPIE Publications, 2001, P. 920
5. Duma, D. P. General astrometry. Textbook. Kiev Naukova Dumka, 2007, 600 c.
6. Kiselev, A. A. Theoretical foundations of photographic astrometry. M .: Science, Ch. Ed. physical and mathematical. Lit., 1989, P. 264.
7. **Majewski, S. R.** (2011) Coordinate systems http://www.astro.virginia.edu/class/majewski/astr551/lectures/COORDS/coords.html.
8. **Oliver, M., Thomas P.** Astronomy on the Personal Computer. Springer-Verlag Berlin Heidelberg., – 2000 – P. 35-37
9. **Karttunen, H.** Fundamental Astronomy / **H. Karttunen, P. Kroger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner** // Berlin: Springer, 2003, 4th ed.
10. **Vinogradov I. M**. Analytic geometry. M .: Science, Ch. Ed .. Sci. Lit., 1986, 176 p.
11. **Bortakovskii A.S., Panteleev A. V**. Analytic geometry in examples and problems: Proc. allowance. M .: Higher. SK, 2005, 496 p.

Надійшла (received) 18.02.2015