УДК 62-83:621.77, 62-83:681.5

Е. В. ПОЛИЛОВ, канд. техн. наук, доц. ДонГТУ, Алчевск

О ГРАНИЦАХ ДОСТИЖИМОСТИ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Актуальность работы. Зависимость эффекта всплеска от спектра матрицы $\mathbf{A}$ (и других ее характеристик) интересовала специалистов по теории управления с самого начала становления этой научной дисциплины. Пионерской работой в этом направлении явилась статья А. А. Фельдбаума [1] 1948 года. А. А. Фельдбаум получил ряд результатов о связи расположения корней с характеристиками переходного режима. Решения ограничены *частным случаем*, когда все корни вещественны, кроме, быть может, одной комплексной пары. Вопрос о существовании больших уклонений был поставлен в конце 1970-х годов В. Н. Полоцким в ряде работ; см., например, [2, 3]. Достаточно полный ответ на этот вопрос был получен Р. Н. Измайловым в [4] в 1987 году. Показано, что “сдвиг” всех полюсов влево (это способствует более быстрой асимптотической скорости затухания процесса) приводит к неизбежной плате за это – к большим уклонениям траектории на начальном участке. Эти важные результаты Измайлова были несколько обобщены в [5], а их более простое доказательство дано в [6]. Новым шагом было доказательство того, что и при малых собственных значениях возникают большие уклонения, см. [7, 8]; более того, эти эффекты присущи и другим расположениям полюсов. Существенно, но и сами авторы работ позиционируют решения лишь в оценке *нижней границы* всплеска, заведомо полагая, что всплеск всегда больший. В разы? На порядок? Много больший? Стратегическая ошибка сторонников представленного направления исследований и, посему, ставших де-факто полуэмпирическими их решениях – заключается в не учёте *взаимного местоположения* нулей и полюсов передаточной функции проектируемой замкнутой системы, желая пояснить процессы лишь терминами собственными значений матрицы динамики $\mathbf{A}$.

Материал и результаты исследований.

Теорема. Для динамически изменяющихся корней $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$ нестационарного полинома $f(p)=\sigma_n(t)\,p^n+\sigma_{n-1}(t)\,p^{n-1}+\ldots+\sigma_{n-j}(t)\,p^{n-j}+\ldots+\sigma_1(t)\,p+\sigma_0(t)$ в каждый квант времени $t=t_k$ справедливы формулы Виета:

$$\left\{\begin{array}{l}
\sum\limits_{1\le j\le n} c_j(t)=c_1(t)+\ldots+c_n(t)\equiv-\dfrac{\sigma_{n-1}(t)}{\sigma_n(t)};\\
\sum\limits_{1\le j_1<j_2\le n} c_{j_1}(t)c_{j_2}(t)=c_1(t)c_2(t)+c_1(t)c_3(t)+\ldots+c_2(t)c_3(t)+\ldots+c_{n-1}(t)c_n(t)\equiv\dfrac{\sigma_{n-2}(t)}{\sigma_n(t)};\\
\sum\limits_{1\le j_1<j_2<j_3\le n} c_{j_1}(t)c_{j_2}(t)c_{j_3}(t)=c_1(t)c_2(t)c_3(t)+c_1(t)c_2(t)c_4(t)+\ldots\\
+c_{n-2}(t)c_{n-1}(t)c_n(t)\equiv-\dfrac{\sigma_{n-3}(t)}{\sigma_n(t)};\\
\vdots\\
\underbrace{\sum\limits_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n}\underbrace{c_{j_1}(t)\times\ldots\times c_{j_k}(t)}_{k\text{ множителей}}}_{C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}\ \text{слагаемых в каждой } k\text{-й строке}}\equiv(-1)^{2n-k}\dfrac{\sigma_k(t)}{\sigma_n(t)}\quad k-\text{я строка};\\
\ldots\\
c_1(t)c_2(t)\times\ldots\times c_n(t)\equiv(-1)^n\dfrac{\sigma_0(t)}{\sigma_n(t)}\quad n-\text{я строка}.
\end{array}\right. \qquad (1)$$

Здесь в левой части k -й формулы стоит сумма всевозможных произведений из k чисел, выбранных из $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$ (корни учитываются в соответствии с их кратностями). Можно показать, что количество слагаемых в левой части k -й формулы равно $C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$, т.е. числу сочетаний из n элементов по k элементов. Так, у полинома 10-го порядка во второй строке левой части формулы Виета количество слагаемых $C_{10}^2=45$. В третьей, например, пятой и девятой строках – $C_{10}^3=120$, $C_{10}^5=252$, $C_{10}^9=10$ соответственно.

Доказательство теорем опустим, концентрируя внимание лишь на содержательной части.

Теорема. *Среднегеометрическое* местоположения мгновенных динамических решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$ нестационарного алгебраического уравнения (для $\sigma_n(t)$ и $\sigma_0(t)$ – const)

$$\underbrace{\sigma_n(t)\,p^n+\underbrace{\left(\sigma_{n-1}(t)\,p^{n-1}+\ldots+\sigma_{n-j}(t)\,p^{n-j}+\ldots+\sigma_1(t)\,p\right)}_{\Theta_0(t,p)-\textit{любой}}+\sigma_0(t)=0}_{\underset{j=\overline{1,n}}{\mathrm{gmean}}\left(c_j(t)\right)\square\sqrt[n]{\sigma_0/\sigma_n}-const} \qquad (2)$$

на комплексной плоскости, $\underset{j=\overline{1,n}}{\mathrm{gmean}}\left(c_j(t)\right)$, в любой квант времени t_k *неизменно*, и даже не зависит от моментов инжекции любого слагаемого $\sigma_{n-j}\left(t-\tau_j\right)p^{n-j}$ $\forall\, j=\overline{1,n-1}$ вложенного полинома $\Theta_0(t,p)$, если это имеет место, равно как и их наличия или же отсутствия вовсе, а также численных значений множителей $\sigma_{n-j}(t)$, как функций времени.

Следствие 1. Местоположение на комплексной плоскости и динамика решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$ нестационарного алгебраического уравнения $\sigma_n(t)\,p^n+\Theta_0(t,p)+\sigma_0(t)=0$ порождены *принципиальной невозможностью* сжатия или растяжения их среднегеометрического $\Omega_n(t)=\underset{j=\overline{1,n}}{\mathrm{gmean}}\left(c_j(t)\right)$ содержимым вложенного полинома $\Theta(t,p)$, как радиуса R_i инварианта в $\underbrace{\sigma_n(t)\,p^n+\cancel{\Theta_0(t,p)}+\sigma_0(t)=0}_{\underset{j=\overline{1,n}}{\mathrm{gmean}}\left(c_j(t)\right):\,R_i(t)=\sqrt[n]{\sigma_0(t)/\sigma_n(t)}}$. Решения $c_j(t)$ $\forall\, j=\overline{1,n}$ в каждый квант времени t_k обладают уникальным феноменом самоорганизации и взаимного геометрического баланса в «командной игре» и противостоянии инжектируемым $\sigma_{n-j}\left(t-\tau_j\right)p^{n-j}$ $\forall\, j=\overline{1,n-1}$. Уместно говорить о «сингулярности» (геометрического места бесконечного числа точек на длине окружности), пучке гравитации с известной геометрией $R_i=\Omega_n(t)$, *относительно которой* на комплексной плоскости в каждый квант времени t_k геометрически выстраиваются новые и новые мгновенные решения $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$. Творец Вселенной в силу нестационарности инжектируемых $\sigma_{n-j}\left(t-\tau_j\right)p^{n-j}$ $\forall\, j=\overline{1,n-1}$ безынерционно перераспределяет число и позиции «игроков» $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$ внутри и вне радиуса $R_i=\Omega_n(t)$, уравновешивая геометрический баланс рычага, опирающегося на «сингулярность».

Следствие 2. В любой квант времени t_k на карте распределения решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$ нестационарного уравнения (2) окружность радиусом $R_i(t)=\sqrt[n]{\sigma_0(t)/\sigma_n(t)}$ и их среднегеометрическое $\Omega_n(t)=\underset{j=\overline{1,n}}{\mathrm{gmean}}\left(c_j(t)\right)$ равны и *неизменны*. Тем самым, даже динамически изменяющиеся корни $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$, ввиду нестационарности множителей $\sigma_{n-j}\left(t-\tau_j\right)$ $\forall\, j=\overline{1,n-1}$, как совокупность, оказываются *локализованы*, одним числом. Будем использовать термин радиус инварианта Полилова-Мотченко, R_i.

Пример. Сгенерируем два *случайных* полинома $A\left(p_{\Omega(0)}\right)=\left(R_{i(0)}:\alpha_m^* p^m,\alpha_{m-1}^* p^{m-1}\ldots\alpha_0^*\right)$ и $B\left(p_{\Omega(\times)}\right)=\left(R_{i(\times)}:\beta_n^* p^n,\beta_{n-1}^* p^{n-1}\ldots\beta_0^*\right)$ различных степеней $m<n$ (радиусы инвариантов $R_{i(0)}$, $R_{i(\times)}$ умышленно разведём на несколько порядков для концентрации эффекта, и, даже не суть важно, $R_{i(0)}\square R_{i(\times)}$ или же, напротив, $R_{i(\times)}\square R_{i(0)}$. Гурвицевость полиномов необязательна, собственно, её и не требуем), из которых сформируем динамическую SISO-систему с передаточной функцией:

$$W_1\left(p_{\Omega(0,\times)}\right)=k_0\frac{A\left(p_{\Omega(0)}\right)}{B\left(p_{\Omega(\times)}\right)}=k_0\frac{\dfrac{\alpha_m^*}{R_{i(0)}^m}p^m+\dfrac{\alpha_{m-1}^*}{R_{i(0)}^{m-1}}p^{m-1}+\ldots+\dfrac{\alpha_{m-j}^*}{R_{i(0)}^{m-j}}p^{m-j}+\ldots+\dfrac{\alpha_1^*}{R_{i(0)}}p+\alpha_0^*}{\dfrac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n}p^n+\dfrac{\beta_{n-1}^*}{R_{i(\times)}^{n-1}}p^{n-1}+\ldots+\dfrac{\beta_{n-j}^*}{R_{i(\times)}^{n-j}}p^{n-j}+\ldots+\dfrac{\beta_1^*}{R_{i(\times)}}p+\beta_0^*}, \qquad (3)$$

а также сгенерируем ещё один вспомогательный *случайный* полином

$G\left(p_{\Omega_{(\gamma)}}\right)=\left(R_{i(\gamma)}:\gamma_n^* p^n,\gamma_{n-1}^* p^{n-1}\ldots\gamma_0^*\right)$ степени n с собственным, отличным от предыдущих $R_{i(0)}$ и $R_{i(\times)}$ радиусом $R_{i(\gamma)}$:

$$G\left(p_{\Omega_{(\gamma)}}\right)=\frac{\gamma_n^*}{R_{i(\gamma)}^n}p^n+\frac{\gamma_{n-1}^*}{R_{i(\gamma)}^{n-1}}p^{n-1}+\ldots+\frac{\gamma_{n-j}^*}{R_{i(\gamma)}^{n-j}}p^{n-j}+\ldots+\frac{\gamma_1^*}{R_{i(\gamma)}}p+\gamma_0^*. \tag{4}$$

Обнулим свободный член $\xcancel{\alpha_0^* \times 0}$, инжектируем старшую $\frac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n}p^n$ и нулевую β_0^* степени полинома $B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)=\left(R_{i(\times)}:\boxed{\beta_n^* p^n},\beta_{n-1}^* p^{n-1},\ldots\boxed{\beta_0^*}\right)$ в числитель $A\left(p_{\Omega_{(0)}}\right)$ передаточной функции, а также дополним полученную конструкцию $A'\left(p_{\Omega'_{(0)}}\right)$ до старшей степени полинома $A\left(p_{\Omega_{(0)}}\right)$ коэффициентами соответствующих степеней полинома $G\left(p_{\Omega_{(\gamma)}}\right)$:

$$W_2\left(p_{\Omega_{(0,\times)}}\right)=k_0\frac{A'\left(p_{\Omega'_{(0)}}\right)}{B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)}=k_0\frac{\left[\begin{array}{l}\boxed{\frac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n}p^n}+\underbrace{\frac{\gamma_{n-1}^*}{R_{i(\gamma)}^{n-1}}p^{n-1}+\frac{\gamma_{n-2}^*}{R_{i(\gamma)}^{n-2}}p^{n-2}+\ldots+\frac{\gamma_{m+1}^*}{R_{i(\gamma)}^{m+1}}p^{m+1}}_{\substack{R_{i(\gamma)},\ \gamma_i\text{ -любые, дополнение полинома}\\ \text{числителя } A\left(p_{\Omega_{(0)}}\right)\text{ до степени } n\ldots m}}+\\ +\underbrace{\frac{\alpha_m^*}{R_{i(0)}^m}p^m+\frac{\alpha_{m-1}^*}{R_{i(0)}^{m-1}}p^{m-1}+\ldots+\frac{\alpha_{m-j}^*}{R_{i(0)}^{m-j}}p^{m-j}+\ldots+\frac{\alpha_1^*}{R_{i(0)}}p+\xcancel{\alpha_0^*\times 0}}_{A\left(p_{\Omega_{(0)}}\right)-\alpha_0^*}+\boxed{\beta_0^*}\end{array}\right]}{\overbrace{\frac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n}p^n+\beta_0^*}^{\uparrow}+\frac{\beta_{n-1}^*}{R_{i(\times)}^{n-1}}p^{n-1}+\ldots+\frac{\beta_{n-j}^*}{R_{i(\times)}^{n-j}}p^{n-j}+\ldots+\frac{\beta_1^*}{R_{i(\times)}}p}. \tag{5}$$

Удивительно, но в сгенерированной конструкции $W_2\left(p_{\Omega_{(0,\times)}}\right)$ среднегеометрические $\underset{j=\overline{1,n}}{\mathrm{gmean}}\left(c_j^{(*)}(t)\right)\square\sqrt[n]{\beta_0^*\frac{R_{i(\times)}^n}{\beta_n^*}}$ абсолютно разных по определению решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$ и $c_1^*(t)$, $c_2^*(t)$, …, $c_n^*(t)$ полиномов «гремучей смеси» $A'\left(p_{\Omega'_{(0)}}\right)$ и случайного $B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)$ *в каждый квант времени t_k одинаковы* для любых наборов случайных векторов $\mathbf{б}^*$, $\mathbf{в}^*$ и $\mathbf{г}^*$, в т.ч. нестационарных $\alpha_i(t)$, $\beta_j(t)$ и $\gamma_j(t)$ $\forall$ $i=\overline{0,m}$; $j=\overline{0,n}$.

Фазовый переход принуждения старшей $\boxed{\frac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n}p^n}$ степенью, концентрация и «скачок решений» $A\left(p_{\Omega_{(0)}}\right)$ и $G\left(p_{\Omega_{(\gamma)}}\right)$ на орбите $R_{i(\times)}$ полинома $B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)$ (поглощение и слияние всех былых концентрирующих орбит $R_{i(\gamma)}$ и $R_{i(0)}$, равно как и любых иных, если б «гремучая смесь» $A'\left(p_{\Omega'_{(0)}}\right)$ была составлена из большего числа вложенных полиномов) становятся очевидны, уравнивая коэффициенты одинаковых степеней тождества:

$$\underbrace{\boxed{\frac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n}p^n}+\frac{\tilde{\beta}_{n-1}^*}{R_{i(\times)}^{n-1}}p^{n-1}+\ldots+\frac{\tilde{\beta}_{n-j}^*}{R_{i(\times)}^{n-j}}p^{n-j}+\ldots+\frac{\tilde{\beta}_1^*}{R_{i(\times)}}p+\boxed{\beta_0^*}}_{\text{новое состояние}}\square$$

$$\square \left\langle \begin{gathered} \boxed{\frac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n}\, p^n} + \underbrace{\frac{\gamma_{n-1}^*}{R_{i(\gamma)}^{n-1}} p^{n-1} + \frac{\gamma_{n-2}^*}{R_{i(\gamma)}^{n-2}} p^{n-2} + \ldots + \frac{\gamma_{m+1}^*}{R_{i(\gamma)}^{m+1}} p^{m+1}}_{\substack{R_{i(\gamma)},\ \gamma_i \text{ -любые, дополнение полинома} \\ \text{числителя } A\left(p_{\Omega(0)}\right) \text{ до степени } n\ldots m}} + \\ \underbrace{+\frac{\alpha_m^*}{R_{i(0)}^m} p^m + \frac{\alpha_{m-1}^*}{R_{i(0)}^{m-1}} p^{m-1} + \ldots + \frac{\alpha_{m-j}^*}{R_{i(0)}^{m-j}} p^{m-j} + \ldots + \frac{\alpha_1^*}{R_{i(0)}}\, p \ + \cancel{\alpha_0^* \times 0}}_{A\left(p_{\Omega(0)}\right) - \alpha_0^*} + \boxed{\beta_0^*} \end{gathered} \right\rangle, \qquad (6)$$

откуда

$$\frac{\gamma_{n-1}^*}{R_{i(\gamma)}^{n-1}} \square \frac{\tilde{\beta}_{n-1}^*}{R_{i(\times)}^{n-1}};\ \frac{\gamma_{n-2}^*}{R_{i(\gamma)}^{n-2}} \square \frac{\tilde{\beta}_{n-2}^*}{R_{i(\times)}^{n-2}};\ \ldots;\ \frac{\gamma_{m+1}^*}{R_{i(\gamma)}^{m+1}} \square \frac{\tilde{\beta}_{m+1}^*}{R_{i(\times)}^{m+1}};$$

$$\frac{\alpha_m^*}{R_{i(0)}^m} \square \frac{\tilde{\beta}_m^*}{R_{i(\times)}^m};\ \frac{\alpha_{m-1}^*}{R_{i(0)}^{m-1}} \square \frac{\tilde{\beta}_{m-1}^*}{R_{i(\times)}^{m-1}};\ \ldots;\ \frac{\alpha_{m-j}^*}{R_{i(0)}^{m-j}} \square \frac{\tilde{\beta}_{m-j}^*}{R_{i(\times)}^{m-j}};\ \ldots;\ \frac{\alpha_1^*}{R_{i(0)}} \square \frac{\tilde{\beta}_1^*}{R_{i(\times)}}.$$

Здесь $\tilde{\beta}_{n-1}^* > \gamma_{n-1}^*$, если поглощена мѐньшая концентрирующая орбита $R_{i(\times)} > R_{i(\gamma)}$ и $\tilde{\beta}_{n-1}^* < \gamma_{n-1}^*$, если $R_{i(\times)} < R_{i(\gamma)}$. Рассуждения о величинах $\tilde{\beta}_{n-j}^*$ относительно α_{n-j}^*, $\forall j = \overline{m, n-1}$ аналогичны, учитывая радиус второй поглощённой $R_{i(0)}$.

Иными словами, инжектирование любой из компонент $\dfrac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n} p^n$ и β_0^* в полином $A\left(p_{\Omega(0)}\right) = \left(R_{i(0)} : \alpha_m^* p^m, \alpha_{m-1}^* p^{m-1} \ldots \alpha_0^*\right)$ *безапелляционно* срывает его решения, переформатируя былой радиус притяжения $\cancel{R_{i(0)}} \to R_{i(\times)}$, как бы перестраивая каждый $\tilde{\beta}_{n-j}^*$, $j = \overline{1, n-1}$ в новую конструкцию-постулат:

$$A'\left(p_{\Omega'(0)}\right) = \boxed{\frac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n} p^n} + \underbrace{\frac{\tilde{\beta}_{n-1}^*}{R_{i(\times)}^{n-1}} p^{n-1} + \ldots + \frac{\tilde{\beta}_{n-j}^*}{R_{i(\times)}^{n-j}} p^{n-j} + \ldots + \frac{\tilde{\beta}_1^*}{R_{i(\times)}}\, p}_{\text{иная интерпретация, в сущности неизменных величин}} + \boxed{\beta_0^*}, \qquad (7)$$

что, собственно, и изменяет геометрию относительных, $R_{i(\times)}$-кратных решений.

Это очевидно, поскольку инвариант с нулевыми вложениями $A'\left(p_{\Omega'(0)}\right) = \dfrac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n} p^n + \underbrace{\cancel{\dfrac{\tilde{\beta}_{n-1}^*}{R_{i(\times)}^{n-1}} p^{n-1} + \ldots + \dfrac{\tilde{\beta}_{n-j}^*}{R_{i(\times)}^{n-j}} p^{n-j} + \ldots + \dfrac{\tilde{\beta}_1^*}{R_{i(\times)}}\, p}}_{\textit{вложения}\times 0} + \beta_0^* = 0$ априори является *отправной точкой*, донором всех n штук решений. n корней алгебраического уравнения инварианта $\beta_n p^n + \beta_0 = 0$ комплексно-сопряжённые, и на комплексной плоскости *строго равномерно* расположены на окружности радиусом $\Omega_{0(n)} = \sqrt[n]{\beta_0 / \beta_n}$ в центре $(0, j0)$ по границам секторов, кратных $2\pi / n$. Для нечётных n один из корней действительный $\left(-\Omega_{0(n)}, j0\right)$. Любой из вложенных $\dfrac{\tilde{\beta}_{n-j}^*}{R_{i(\times)}^{n-j}} p^{n-j}$, $\forall j = \overline{1, n-1}$ лишь «искажает» гармонию корней $\beta_n p^n + \beta_0 = 0$ и уводит их с окружности $R_i(t) = \Omega_{0(n)}(t)$.

Последовательным вложением инвариантов младших $\dfrac{\tilde{\beta}_{n-j}^*}{R_{i(\times)}^{n-j}} p^{n-j}$ степеней, по всей видимости, *геометрически возможно решать* алгебраические уравнения любого порядка. Полученные результаты выходят за рамки статьи и теории автоматического управления в целом, будут представлены отдельно.

Не менее ярка̀ по зрелищности и резистивность скопления решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$, феномен их самоорганизации и взаимного геометрического баланса в «командной игре» и противостоянии инжектируемым $\frac{\tilde{\beta}^*_{n-j}(t-\tau_j)}{R^{n-j}_{i(\times)}} p^{n-j}$ $\forall\, j=\overline{1,n-1}$ с одной единственной миссией – удержания неизменными постулируемых границ инвариантов, $R_{i(\times)}$ и $R_{i(\gamma)}$, например. В каждый квант времени t_k на комплексной плоскости *безынерционно* перераспределяется число и позиции «игроков» $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$ внутрь инварианта $R_i(t)=\Omega_{0(n)}(t)$, $1<z<n$ шт., и вне его, $n-z$ шт. соответственно, уравновешивая тем самым *изометрический* баланс виртуального рычага, опирающегося на периметр инварианта притяжения решений.

Положим, в одну из младших степеней $n-j$ полиномов $B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)$ и $G\left(p_{\Omega_{(\gamma)}}\right)$ инжектировано новое число $1{,}977\times10^{-5}$:

$$\frac{\beta^*_n}{R^n_{i(\times)}}\left\langle\frac{\gamma^*_n}{R^n_{i(\gamma)}}\right\rangle p^n+\frac{\beta^*_{n-1}}{R^{n-1}_{i(\times)}}\left\langle\frac{\gamma^*_{n-1}}{R^{n-1}_{i(\gamma)}}\right\rangle p^{n-1}+\ldots+\underbrace{\frac{\tilde{\beta}^*_{n-j}}{R^{n-j}_{i(\times)}}\left\langle\frac{\tilde{\gamma}^*_{n-j}}{R^{n-j}_{i(\gamma)}}\right\rangle}_{1{,}977\times10^{-5}} p^{n-j}+\ldots+\frac{\beta^*_1}{R_{i(\times)}}\left\langle\frac{\gamma^*_1}{R_{i(\gamma)}}\right\rangle p\ +\beta^*_0\left\langle\gamma^*_0\right\rangle. \tag{8}$$

Несмотря на постоянство $1{,}977\times10^{-5}\,p^{n-j}$, в силу различных $R_{i(\times)}$ и $R_{i(\gamma)}$, постулируемых в этой топологии крайними степенями $\frac{\beta^*_n}{R^n_{i(\times)}}\left\langle\frac{\gamma^*_n}{R^n_{i(\gamma)}}\right\rangle p^n$ и $\beta^*_0\left\langle\gamma^*_0\right\rangle$, одно и то же число $1{,}977\times10^{-5}$ совершенно по-разному $\frac{\tilde{\beta}^*_{n-j}}{R^{n-j}_{i(\times)}}\left\langle\frac{\tilde{\gamma}^*_{n-j}}{R^{n-j}_{i(\gamma)}}\right\rangle$ и будет интерпретировано в $B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)$ и $G\left(p_{\Omega_{(\gamma)}}\right)$, *предопределяя неодинаковые* $\tilde{\beta}^*_{n-j}\neq\tilde{\gamma}^*_{n-j}$. Они то, в свою очередь, и меняют геометрию относительных*, как факт и масштабируемых $R_{i(\times)}\left\langle R_{i(\gamma)}\right\rangle$-кратных решений.

Пример закончен.

Пример. Положим, нестационарные степенные коэффициенты $\sigma_{n-j}(t)\ \forall j=\overline{0,n-1}$ полинома

$$\underbrace{\underbrace{\sigma_n(t)\,p^n+\sigma_{n-1}(t)\,p^{n-1}+\ldots+\sigma_{n-j}(t)\,p^{n-j}+\ldots+\sigma_1(t)\,p}_{\sigma_{n-j}(t)=\pm1,\ \forall j=\overline{0,n-1}}+\underbrace{\sigma_0(t)}_{(a+jb)\text{ -complex}}=0}_{\underset{j=\overline{1,n}}{\mathrm{gmean}}\left(c_j(t)\right)\square\sqrt[n]{\sigma_0(t)/\sigma_n(t)}-\mathrm{var}} \tag{9}$$

подобно битам, принимают лишь два значения ±1. Этот ход, не теряя общности, как если бы этот диапазон $[+1;-1]$ был заполнен и бесконечным числом дробных величин, последовательным перебором их комбинаций ±1 позволяет накопить банк 2^{n-1} решений $\left\langle c_1(t),\ c_2(t),\ \ldots,\ c_n(t)\right\rangle_j$, $j=\overline{1,2^{n-1}}$ для каждого $\sigma_0(t)$.

Тем самым, циклично меняя, например, действительную часть комплексного $\sigma_0(t)=a+jb$ при любом $b=const$, появляется возможность в бумаге, см. рис. 1, покадрово отразить и квази- динамику банка решений $\left\langle c_1(t),\ c_2(t),\ \ldots,\ c_n(t)\right\rangle_j$, $j=\overline{1,2^{n-1}}$ с изменяемым радиусом гравитации $R_{i(n)}=\Omega_n(t)=\mathrm{var}$:

$$\underbrace{\pm p^n\pm p^{n-1}\pm\ldots\pm p^{n-i}\pm\ldots\pm p\pm\underbrace{(a+jb)}_{\sigma_0(t)-\mathrm{var}}=0}_{\underset{j=\overline{1,n}}{\mathrm{gmean}}\left(c_j(t)\right)\square\sqrt[n]{\sigma_0(t)/\sigma_n(t)}-\mathrm{var}}. \tag{10}$$

Создана интерактивная оболочка, позволяющая визуализировать описанное полиномов любого порядка. Результаты исследований 7 полиномов высоких порядков, как неоспоримый аргумент в подтверждение изложенному, представлены видеорядом https://www.youtube.com/watch?v=rljidfK84_w. Радиус инварианта изменяется принудительно, открывая завесу построения качественных адаптивных законов управления *нестационарными динамическими объектами*, об этом позже.

Невероятной красоты клише, след движения корней полиномов $B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)=\left(R_{i(\times)}:\beta_n^* p^n,\beta_{n-1}^* p^{n-1}\ldots\beta_0^*\right)$ различных степеней n в определённом диапазоне изменения коэффициентов $\left[\beta_{j\,\min}^*;\beta_{j\,\max}^*\right],\forall j=\overline{0,n}$, рис. 1. В это сложно поверить, но на палитре в каждый квант времени t_k лишь n штук точек, решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$! Последовательно перебирая возможные комбинации коэффициентов в заявленном диапазоне, накопительным «наслаиванием кадров» один на другой, динамически изменяя цветовую интенсивность местоположения банка решений при этом, по принципу горячо/холодно, там где они бывают чаще, подобно Творцу Вселенной, становится возможным запечатлеть «рождение и эволюцию» этих фрактальных образований. В клише отчётливо видны прорисованные градацией красного «пучки гравитации», концентрации и притяжения решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$ геометрией $R_{i(n)}=\Omega_n(t)$, те самые среднегеометрические, инварианты.

Пример закончен.

В дальнейшем величины $R_{i(n)}=\Omega_n(t)$ будем использовать, как *меру «энергетического потенциала»* динамических систем.

Един ли «пучок гравитации» с геометрией $R_i=\Omega_n(t)$?

Чтобы ответить на этот вопрос, продолжим исследование формул Виеты. Коль скоро в каждой k-й строке C_n^k-штук слагаемых слева

$$\underbrace{\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n}\underbrace{c_{j_1}(t)\times\ldots\times c_{j_k}(t)}_{k\ \text{множителей}}}_{C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}\ \text{слагаемых в каждой } k\text{-й строке}}\ \square\ (-1)^{2n-k}\frac{\sigma_k(t)}{\sigma_n(t)},\tag{11}$$

логично было б усреднить обе части, разделив на их количество

$$\underbrace{\frac{1}{C_n^k}\left[\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n}\underbrace{c_{j_1}(t)\times\ldots\times c_{j_k}(t)}_{k\ \text{множителей}}\right]}_{\textit{среднеарифметическое}\ \text{произведений}}\equiv\underbrace{\left|\frac{\sigma_k(t)}{\sigma_n(t)}\right|\times\frac{1}{C_n^k}}_{\substack{\text{знак отброшен умышленно,}\\ \text{поскольку ищем частоты}>0}}\tag{12}$$

и извлечь k корней для восстановления размерности $[рад/c]$:

$$\Omega_k(t)=\sqrt[k]{\frac{1}{C_n^k}\left[\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n}c_{j_1}(t)\times\ldots\times c_{j_k}(t)\right]}\ \square\ \frac{1}{\sqrt[k]{C_n^k}}\times\sqrt[k]{\left|\frac{\sigma_k(t)}{\sigma_n(t)}\right|}.\tag{13}$$

Получен массив частот $\Omega_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, первый элемент которого – среднеарифметическое решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$, поскольку корень 1-ой степени не изменяет число:

$$\Omega_1(t)=\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{1\le j\le n}c_j(t)=\frac{1}{n}\big(c_1(t)+\ldots+c_n(t)\big)}_{\text{очевидно, }\textit{среднеарифметическое корней}\ c_i(t)}\ \square\ \frac{1}{n}\times\frac{\sigma_{n-1}(t)}{\sigma_n(t)};\tag{14}$$

последующие $n-2$ компонент – среднегеометрические среднеарифметических слагаемых *симметрических многочленов* $\underbrace{\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n}\underbrace{c_{j_1}(t)\times\ldots\times c_{j_k}(t)}_{k\ \text{множителей}}}_{C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}\ \text{слагаемых в каждой } k\text{-й строке}}$ мгновенных динамических решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$:

$$\underbrace{\Omega_k(t)=\sqrt[k]{\frac{1}{C_n^k}\left[\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n}c_{j_1}(t)\times\ldots\times c_{j_k}(t)\right]}}_{\text{очевидно, }\textit{среднегеометрическое-среднеарифметического}}\ \square\ \frac{1}{\sqrt[k]{C_n^k}}\times\sqrt[k]{\left|\frac{\sigma_k(t)}{\sigma_n(t)}\right|},\ k=\overline{2,n-1}\tag{15}$$

и, наконец, последний элемент – среднегеометрическое решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$:

$$\Omega_n(t)=\underbrace{\sqrt[n]{c_1(t)c_2(t)\times\ldots\times c_n(t)}=\left(\prod_{i=1}^{n}c_i(t)\right)^{1/n}}_{\text{очевидно, } \textit{среднегеометрическое корней } c_i(t)} \square \sqrt[n]{\left|\frac{\sigma_0(t)}{\sigma_n(t)}\right|}. \tag{16}$$

Рис. 1 Клише, след движения корней полинома 21-го и 24-го порядка.
Цветовая интерпретация по принципу горячо/холодно, там где они бывают чаще. Оси {-2-2i, 2+2i}

Рис. 2 Карты распределения 34 нулей (0) и 55 полюсов (x) по Баттерворту
стационарной динамической системы Б-34/55 (среднегеометрические $R_{i(0)}=2,5\ рад/с$ и $R_{i(\times)}=50\ рад/с$)

Рис. 3 Точки перегиба $\max\limits_{t=0,\infty} h(t)$ *семейства* ста переходных характеристик $h(t)$
стационарной динамической системы Б-34/55, и одна из них $h(t)$ в точке с $R_{i(\times)}=50,0\ рад/с$ и $k=20$

Теорема. *Среднеарифметическое* $\Omega_1(t)=\frac{1}{n}\sum\limits_{1\le j\le n}c_j(t)$ местоположения мгновенных динамических решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$ нестационарного алгебраического уравнения (для $\sigma_n(t)$ и $\sigma_{n-1}(t)$ – const)

$$\underbrace{\sigma_n(t)p^n+\sigma_{n-1}(t)p^{n-1}+\underbrace{\left(\sigma_{n-2}(t)p^{n-2}+\ldots+\sigma_{n-j}(t)p^{n-j}+\ldots+\sigma_0(t)\right)}_{\Theta_1(t,p)-\textit{любой}}=0}_{\underset{j=1,n}{\text{mean}}\left(c_j(t)\right)\square\frac{1}{n}\times\frac{\sigma_{n-1}(t)}{\sigma_n(t)}\to const} \tag{17}$$

на комплексной плоскости, $\underset{j=1,n}{\text{mean}}\left(c_j(t)\right)$, в любой квант времени t_k *неизменно*, и даже не зависит от моментов инжекции любого слагаемого $\sigma_{n-j}\left(t-\tau_j\right)p^{n-j}\ \forall\ j=\overline{2,n}$ вложенного полинома $\Theta_1(t,p)$, если это имеет место, равно как и их наличия или же отсутствия вовсе, а также численных значений множителей $\sigma_{n-j}(t)$, как функций времени.

Имеют место Следствие 1 и Следствие 2, по аналогии с предыдущей теоремой, замещением понятий среднегеометрического $\Omega_n(t)=\underset{j=\overline{1,n}}{\text{gmean}}\left(c_j(t)\right)$ на среднеарифметическое $\Omega_1(t)=\underset{j=\overline{1,n}}{\text{mean}}\left(c_j(t)\right)$.

Пример. Используем полиномы $A\left(p_{\Omega_{(0)}}\right)$, $B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)$ и $G\left(p_{\Omega_{(\gamma)}}\right)$ предыдущего методического примера. Инжектируем старшие степени $\frac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n}p^n$ и $\frac{\beta_{n-1}^*}{R_{i(\times)}^{n-1}}p^{n-1}$ полинома $B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)=\left(R_{i(\times)}:\underline{\beta_n^*p^n,\beta_{n-1}^*p^{n-1}}\ldots\beta_0^*\right)$ в числитель $A\left(p_{\Omega_{(0)}}\right)=\left(R_{i(0)}:\alpha_m^*p^m,\alpha_{m-1}^*p^{m-1}\ldots\alpha_0^*\right)$ ПФ, а также дополним полученную конструкцию $A'\left(p_{\Omega'_{(0)}}\right)$ до старшей степени полинома $A\left(p_{\Omega_{(0)}}\right)$ коэффициентами соответствующих степеней $G\left(p_{\Omega_{(\gamma)}}\right)=\left(R_{i(\gamma)}:\gamma_n^*p^n,\gamma_{n-1}^*p^{n-1}\ldots\gamma_0^*\right)$:

$$W_3\left(p_{\Omega_{(0,\times)}}\right)=k_0\frac{A'\left(p_{\Omega'_{(0)}}\right)}{B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)}=k_0\frac{\left[\boxed{\frac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n}p^n+\frac{\beta_{n-1}^*}{R_{i(\times)}^{n-1}}p^{n-1}}+\underbrace{\frac{\gamma_{n-2}^*}{R_{i(\gamma)}^{n-2}}p^{n-2}+\frac{\gamma_{n-3}^*}{R_{i(\gamma)}^{n-3}}p^{n-3}+\ldots+\frac{\gamma_{m+1}^*}{R_{i(\gamma)}^{m+1}}p^{m+1}}_{\substack{R_{i(\gamma)},\ \gamma_i\ \text{-любые, дополнение полинома}\\ \text{числителя } A\left(p_{\Omega_{(0)}}\right)\text{ до степени } n\ldots m}}+\underbrace{\frac{\alpha_m^*}{R_{i(0)}^m}p^m+\frac{\alpha_{m-1}^*}{R_{i(0)}^{m-1}}p^{m-1}+\ldots+\frac{\alpha_{m-j}^*}{R_{i(0)}^{m-j}}p^{m-j}+\ldots+\frac{\alpha_1^*}{R_{i(0)}}p+\alpha_0^*}_{A\left(p_{\Omega_{(0)}}\right)}\right]}{\overbrace{\frac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n}p^n+\frac{\beta_{n-1}^*}{R_{i(\times)}^{n-1}}p^{n-1}+\ldots+\frac{\beta_{n-j}^*}{R_{i(\times)}^{n-j}}p^{n-j}+\ldots+\frac{\beta_1^*}{R_{i(\times)}}p+\beta_0^*}^{\uparrow}}. \qquad (18)$$

Удивительно, но в сгенерированной конструкции $W_3\left(p_{\Omega_{(0,\times)}}\right)$ среднеарифметические $\underset{j=\overline{1,n}}{\text{mean}}\left(c_j^{(*)}(t)\right)\square\frac{1}{n}\times\frac{\beta_{n-1}^*}{R_{i(\times)}^{n-1}}\frac{R_{i(\times)}^n}{\beta_n^*}$ абсолютно разных по определению решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$ и $c_1^*(t)$, $c_2^*(t)$, …, $c_n^*(t)$ полиномов «гремучей смеси» $A'\left(p_{\Omega'_{(0)}}\right)$ и случайного $B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)=\left(R_{i(\times)}:\beta_n^*p^n,\beta_{n-1}^*p^{n-1}\ldots\beta_0^*\right)$ *в каждый квант времени* t_k *одинаковы* для любых наборов случайных векторов $\mathbf{б}^*$, $\mathbf{в}^*$ и $\mathbf{г}^*$, в т.ч. нестационарных $\alpha_i(t)$, $\beta_j(t)$ и $\gamma_j(t)$ $\forall$ $i=\overline{0,m}$; $j=\overline{0,n}$. Пример закончен.

Теорема. *Среднегеометрическое* $\Omega_k(t)=\sqrt[k]{\frac{1}{C_n^k}\left[\sum\limits_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n}c_{j_1}(t)\times\ldots\times c_{j_k}(t)\right]}$ *среднеарифметических* слагаемых симметрических многочленов мгновенных динамических решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$ k-нестационарных алгебраических уравнений (для $\sigma_n(t)$ и $\sigma_{n-k}(t)$ – const)

$$\underbrace{\sigma_n(t)p^n+\sigma_{n-k}(t)p^{n-k}+\underbrace{\left(\sigma_{n-1}(t)p^{n-1}+\ldots+\sigma_{n-j_k}(t)p^{n-j_k}+\ldots+\sigma_0(t)\right)}_{\Theta_k(t,p)-\textit{любой},\quad k=\overline{2,n-1};\ j_k=\overline{2,n-1}\ne k}=0}_{\Omega_k(t)=\underset{j=\overline{1,n}}{gamean}\left(c_j(t)\right)\square\frac{1}{\sqrt[k]{C_n^k}}\times\sqrt[k]{\left|\frac{\sigma_k(t)}{\sigma_n(t)}\right|}-const,\quad C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}} \qquad (19)$$

на комплексной плоскости, $\underset{j=\overline{1,n}}{gamean}\left(c_j(t)\right)$, в любой квант времени t_k *неизменно*, и даже не зависит от моментов инжекции любого слагаемого $\sigma_{n-j_k}\left(t-\tau_{j_k}\right)p^{n-j_k}$ $\forall\ j_k=\overline{2,n-1}\ne k$ вложенного полинома $\Theta_k(t,p)$, если это имеет место, равно как и их наличия или же отсутствия вовсе, а также численных значений множителей $\sigma_{n-j_k}(t)$, как функций времени.

Имеют место Следствие 1 и Следствие 2, по аналогии с предыдущей теоремой, замещением соответствующих понятий.

Пример. Используем полиномы $A\left(p_{\Omega_{(0)}}\right)$, $B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)$ и $G\left(p_{\Omega_{(\gamma)}}\right)$ предыдущего методического примера. Поочерёдно инжектируем пары степеней $\frac{\beta_n^*}{R_{i(\times)}^n}p^n$ и $\frac{\beta_{n-k}^*}{R_{i(\times)}^{n-k}}p^{n-k}$, $\forall k=\overline{2,n-1}$ полинома $B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)$ в числитель $A\left(p_{\Omega_{(0)}}\right)$ ПФ, а также дополним каждую полученную конструкцию $A'_k\left(p_{\Omega'_{(0)}}\right)$ до старшей степени полинома $A\left(p_{\Omega_{(0)}}\right)$ коэффициентами соответствующих степеней полинома $G\left(p_{\Omega_{(\gamma)}}\right)$:

$$W_{4,k}\left(p_{\Omega_{(0,\times)}}\right)=k_0\frac{A'_k\left(p_{\Omega'_{(0)}}\right)}{B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)}=k_0\frac{\left[\boxed{\frac{\beta_n^*}{R^n_{i(\times)}}p^n+\frac{\beta^*_{n-k}}{R^{n-k}_{i(\times)}}p^{n-k}}+\underbrace{\frac{\gamma^*_{n-1}}{R^{n-1}_{i(\gamma)}}p^{n-1}+\ldots+\frac{\gamma^*_{n-l_k}}{R^{n-l_k}_{i(\gamma)}}p^{n-l_k}+\frac{\gamma^*_{m+1}}{R^{m+1}_{i(\gamma)}}p^{m+1}}_{\substack{R_{i(\gamma)},\ \gamma_i\ \text{-любые, дополнение полинома}\\ \text{числителя } A\left(p_{\Omega(0)}\right) \text{ до степени } n\ldots m}}+\underbrace{\frac{\alpha_m^*}{R^m_{i(0)}}p^m+\frac{\alpha^*_{m-1}}{R^{m-1}_{i(0)}}p^{m-1}+\ldots+\frac{\alpha^*_{m-j}}{R^{m-j}_{i(0)}}p^{m-j}+\ldots+\frac{\alpha_1^*}{R_{i(0)}}p+\alpha_0^*}_{A\left(p_{\Omega(0)}\right)}\right]}{\overbrace{\frac{\beta_n^*}{R^n_{i(\times)}}p^n+\frac{\beta^*_{n-k}}{R^{n-k}_{i(\times)}}p^{n-k}}^{\uparrow}+\frac{\beta^*_{n-1}}{R^{n-1}_{i(\times)}}p^{n-1}\ldots+\frac{\beta^*_{n-j_k}}{R^{n-j_k}_{i(\times)}}p^{n-j_k}+\ldots+\frac{\beta_1^*}{R_{i(\times)}}p+\beta_0^*}. \quad (20)$$

Удивительно, но в каждой сгенерированной конструкции $W_{4,k}\left(p_{\Omega_{(0,\times)}}\right)$, $\forall k=\overline{2,n-1}$ среднегеометрические среднеарифметических $\underset{j=\overline{1,n}}{gamean}\left(c_j(t)\right)\square\frac{1}{\sqrt[k]{C_n^k}}\times\sqrt[k]{\left|\frac{\sigma_k(t)}{\sigma_n(t)}\right|}$ абсолютно разных по определению решений $\left[c_1(t),\ c_2(t),\ \ldots,\ c_n(t)\right]_k$ и $c_1^*(t)$, $c_2^*(t)$, …, $c_n^*(t)$ полиномов «гремучей смеси» $A'_k\left(p_{\Omega'_{(0)}}\right)$ и случайного $B\left(p_{\Omega_{(\times)}}\right)$ *в каждый квант времени* t_k *одинаковы* для любых наборов случайных векторов $\mathbf{б}^*$, $\mathbf{в}^*$ и $\mathbf{г}^*$, в т.ч. нестационарных $\alpha_i(t)$, $\beta_j(t)$ и $\gamma_j(t)$ $\forall$ $i=\overline{0,m}$; $j=\overline{0,n}$. Пример закончен.

Иными словами, на комплексной плоскости n-«сингулярностей» (геометрического места бесконечного числа точек на длинах окружностей), пучков гравитации с известной геометрией $R_{i(k)}=\Omega_k(t)$, определяющих правила самоорганизации и взаимного геометрического баланса решений $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_n(t)$ в «командной игре» и противостоянии инжектируемым $\sigma_{n-j}\left(t-\tau_j\right)p^{n-j}$ $\forall j=\overline{1,n}$.

Теорема. Верхняя грань переходной характеристики $h(t)$ устойчивой нестационарной динамической системы, описываемой линейной передаточной функцией

$$W(p)=k_0\frac{A(p)}{B(p)}=k_0\frac{\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha_{m-i}(t)\,p^{m-i}}{\sum\limits_{j=0}^{n}\beta_{n-j}(t)\,p^{n-j}}\qquad\forall m\le n \tag{21}$$

однозначно определяется среднегеометрическими $\Omega_m(t)=\underset{i=\overline{1,m}}{\text{gmean}}\left(c_i(t)\right)$ и $\Omega_n(t)=\underset{j=\overline{1,n}}{\text{gmean}}\left(c_j(t)\right)$ корней $c_1(t)$, $c_2(t)$, …, $c_{m+n}(t)$ полиномов числителя $A(p)$ и знаменателя $B(p)$ (как *энергетической* количественной меры сил $k=R_{i(\times)}/R_{i(0)}$ сингулярностей двух полиномов $k<1$, $k=1$ и $k>1$):

$$\max_{t=0,\infty}h(t)=\underbrace{M}_{\substack{\text{множитель}\\ \text{(не зависит от}\\ \textit{геометрии}\text{ нулей}\\ \text{и полюсов ПФ)}}}\times\underbrace{\left(R_{i(\times)}/R_{i(0)}\right)}_{\substack{k\text{ –кратность}\\ \text{среднегеометрических,}\\ \text{корней полиномов}\\ \text{числителя } A(p) \text{ и}\\ \text{знаменателя } B(p)\text{ ПФ}}}{}^{m}=$$

$$=M\times\left(\left(\prod_{i=1}^{n}c_i(t)\right)^{1/n}\Big/\left(\prod_{j=1}^{m}c_j(t)\right)^{1/m}\right)^{m}=M\times\underbrace{\frac{\alpha_m(t)}{\alpha_0(t)}\left(\beta_0(t)/\beta_n(t)\right)^{m/n}}_{\substack{\text{категориями коэффициентов}\\ \text{полиномов числителя } A(p)\\ \text{и знаменателя } B(p)\text{ ПФ}}}\Bigg|_{t=t_0}, \tag{22}$$

где $R_{i(0)}(t)=\sqrt[m]{\alpha_0(t)/\alpha_m(t)}$ и $R_{i(\times)}(t)=\sqrt[n]{\beta_0(t)/\beta_n(t)}$ – радиусы инвариантов Полилова-Мотченко (*среднегеометрические* m-шт. нулей (0) и n-шт. полюсов $(\times)$ терминами классической теории автоматического управления).

Множитель $M\equiv 1\ (k_0)\ \forall m=n$ и $M \approx 1\ (k_0)\ \forall m<n$.

Доказательство теоремы осуществлено восстановлением аналитической зависимости $\underset{t=0,\infty}{\underline{\max}}\, h(t)=f(k)$ вычислительными алгоритмами MATLAB Curve Fitting Toolbox, решая оптимизационную задачу минимизации целевой функции (среднеквадратичной ошибки приближения) при подборе параметров a, b и c в стандартной power2 нелинейной параметрической модели $y=a\cdot x^b+c$, приближающей данные, полагая x и y известными. Общее количество точек перегиба $\underset{t=0,\infty}{\underline{\max}}\, h(t)$ семейств исследованных переходных характеристик $h(t)$ более 600 (на каждой подобной картинке, см. рис.3, 100 снежинок, 100 динамических систем, 100 модельных экспериментов, 100 всплесков и 100 точек перегиба). Каждая точка *идеально вписана* в соответствующую восстановленную нелинейную параметрическую модель $\underset{t=0,\infty}{\underline{\max}}\, h(t)=a\cdot x^b+c$, что в точности соответствует заявленному в (22) закону. **Крайне показателен и удивителен результат**, в каждом двустолбцовом массиве splash ведь нет ничего, кроме вещественных чисел $k=[1;2;\ldots;100]$ и амплитуд всплеска $\underset{t=0,\infty}{\underline{\max}}\, h(t)$ семейства динамических систем, и, когда оболочка Curve Fitting *из ниоткуда* выписывает степени $b \approx m$?! дополняя модель $a\cdot x^b+c$ нулевым свободным членом $c \approx 0$?! решения каждой k-итерации сквозь призму преобразований Лапласа?! дифференциальное уравнение относительно $f(t)$ → Z-преобразование → *алгебраическое уравнение относительно изображения* $F(p)$, *его корни* → изображение $F(p)$ → Z^{-1}-преобразование → *искомая функция* $f(t)$ *и всплеск*?! тоннель между пространством изображений и оригиналов?!

Уместно задуматься о фундаментальности сложившегося паззла…

Выводы. Впервые представлена аналитическая зависимость точки перегиба $\underset{t=0,\infty}{\underline{\max}}\, h(t)$ т.н. феномена всплеска в управлении динамическими системами произвольного порядка. Всплеск с лёгкостью может быть сгенерирован умышленно в любой передаточной функции с наперёд заданными порядками полиномов числителя и знаменателя $m\le n$, любой геометрии нулей и полюсов, их местоположении относительно мнимой оси, и, что особо примечательно, любой амплитуды. Генерация, как, впрочем, и зеркально противоположное – исключение всплеска, сводятся к примитиву смещения радиусов среднегеометрических $R_{i(\times,0)}\to shift$ корней полиномов числителя и знаменателя «генерирующей» передаточной функции. Терминами (21)-(22) могут быть решены и иные задачи, например, оценки и ограничения реакции замкнутой системы на единичное возмущение $1(t)$, управление по выходу, задачи фильтрации, прогноз амплитуд управлений $\mathbf{u}$ любой динамической системы известными законами управления для режимов слежения и стабилизации, и мн. др.

Условие $R_{i(\times)}/R_{i(0)}<1$ (быстрые нули) есть мерой гарантированного невозникновения всплеска на любых удалениях кластеров корней ПФ любого порядка $m\le n$ от мнимой оси. Величина $R_{i(\times)}/R_{i(0)}$ открывает принципиально иные грани теории управления, являя более естественную с философской точки зрения меру в сравнении с вымышленными H_2, H_∞ и пр. нормами. Тупик ветки «площадных» и «пиковых» норм очевиден, если понять, что любые результаты робастного 1:1 дублируемы в рамках примитива модального управления, зная карту попадания нулей/полюсов. И, никак не наоборот, говоря о качественной динамике, кликом мыши сосчитанной в модальном. Любая робастность достижима, запасом: $U_{\max}>M\left(R_{i(\times)}/R_{i(0)}\right)^m$.

Смещение радиусов среднегеометрических $R_{i(\times,0)}\to shift$ может быть найдено и в классе оптимизационных задач, быть мерой в задачах гарантии робастности к параметрическим $\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A}$ адаптивных и неадаптивных законов управления. Достижимые результаты *любых иных методов счёта* k_{ij} известной теории управления поглощены предложенной мерой, легко повторимы, $R_{i(\times,0)}\to shift$. Очевидно, колоссальные уровни управлений нереализуемы, физически. Абсурдна даже мысль угнаться за подобным. Задача нами умышленно представлена так, чтоб выпятить, её, ту самую хрупкую грань достижимости теории автоматического управления $R_{i(\times)}/R_{i(0)}<1$. Иное иллюзии.

Список литературы: 1. *Фельдбаум А. А.* О распределении корней характеристического уравнения систем регулирования // АиТ. 1948. No4. С. 253–279. **2**. *Полоцкий В. Н.* О максимальных ошибках асимптотического идентификатора состояния // АиТ. 1978. No8. С. 26–32. **3**. *Полоцкий В. Н.* Оценки состояния линейных систем с одним выходом при помощи наблюдающих устройств // АиТ. 1980. No12. С. 18–29. **4**. *Измайлов Р. Н.* Эффект "всплеска" в стационарных линейных системах со скалярными входами и выходами // АиТ. 1987. No8. С. 56–62. **5**. *Sussmann H. J.*, *Kokotovic P. V.* The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1991. Vol. 36. No. 4. P. 424–439. **6**. *Bushenkov V.*, *Smirnov G.* Stabilization Problems with Constraints: Analysis and Computational Aspects. Amsterdam: Gordon and Breach, 1997. **7**. *Smirnov G.*, *Bushenkov V.*, *Miranda F.* Advances on the transient growth quantification in linear control systems // International Journal of Applied Mathematics and Statistics. 2009. Vol. 14. P. 82–92. **8**. *Polyak B. T.*, *Smirnov G. V.* Large deviations in continuous-time linear single-input control systems // 19th IFAC World Congress. Cape Town, South Africa, August 24–29, 2014. **9**. *Полилов Е. В.* Феномен всплеска в управлении динамическими системами [Текст] // Электротехнические и компьютерные системы – К.: Техника. –2014. – № 15 (91). – С.25-35. **10**. *Полилов Е. В.* и др. Стратегии качественного управления многомассовыми электромеханическими системами [Текст] // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ». – 2013. – № 36(1009). – С.86-96.

Bibliography (transliterated): 1. Fel'dbaum A. A. O raspredelenii kornei kharakteristicheskogo uravneniya sistem regulirovaniya // AiT. 1948. No4. C. 253–279. **2**. Polotskii V. N. O maksimal'nykh oshibkakh asimptoticheskogo identifikatora sostoyaniya // AiT. 1978. No8. S. 26–32. **3**. Polotskii V. N. Otsenki sostoyaniya lineinykh sistem s odnim vykhodom pri pomoshchi nablyudayushchikh ustroistv // AiT. 1980. No12. S. 18–29. **4**. Izmailov P. N. Effekt "vspleska" v statsionarnykh lineinykh sistemakh so skalyarnymi vkhodami i vykhodami // AiT. 1987. No8. S. 56–62. **5**. Sussmann H. J., Kokotovic P. V. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1991. Vol. 36. No. 4. P. 424–439. **6**. Bushenkov V., Smirnov G. Stabilization Problems with Constraints: Analysis and Computational Aspects. Amsterdam: Gordon and Breach, 1997. **7**. Smirnov G., Bushenkov V., Miranda F. Advances on the transient growth quantification in linear control systems // International Journal of Applied Mathematics and Statistics. 2009. Vol. 14. P. 82–92. **8**. Polyak B. T., Smirnov G. V. Large deviations in continuous-time linear single-input control systems // 19th IFAC World Congress. Cape Town, South Africa, August 24–29, 2014. **9**. Polilov E. V. Fenomen vspleska v upravlenii dinamicheskimi sistemami [Tekst] // Elektrotekhnicheskie i komp'yuternye sistemy – K.: Tekhnika. –2014. – № 15 (91). – S.25-35. **10**. Polilov E. V. i dr. Strategii kachestvennogo upravleniya mnogomassovymi elektromekhanicheskimi siste-mami [Tekst] // Visnik Natsional'nogo tekhnichnogo universitetu «KhPI». – Kh.: NTU «KhPI». – 2013. – № 36(1009). – S.86-96.

Поступила (received) 02.09.2015