

А. П. ПОПОВ, д. т. н., Николаев, Национальный университет
кораблестроения им. адм. Макарова

НАГРУЗОЧНАЯ СПОСОБНОСТЬ ЭНКАИТНЫХ* ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ ПО КОНТАКТНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

For the first time was solved a contact problem in conformity with the Popov's gearing having linear tangency of the tooth. Are resulted determination of maximal contact stresses and sizes of contact area dependences. High load-carrying capacity of the Popov's gearing in comparison with traditional gearings.

Проблема повышения нагрузочной способности зубчатых передач по контактными напряжениями актуальна. В настоящее время решение указанной проблемы осуществляется за счет изготовления зубьев со смещением режущего инструмента, химико-термического упрочнения и, как показали последние исследования, за счет продольной модификации участков, прилегающих к вершинам зубьев либо расположенных в месте нахождения полюсной линии.

Однако наиболее эффективным средством решения указанной проблемы является разработка принципиально новых видов зацепления. Подтверждением сказанному может служить энкаитное зацепление с начальным линейным контактом зубьев [1 – 3]. Для этого зацепления характерны боковые профили зубьев с более высокими радиусами кривизны по сравнению с радиусами кривизны эвольвентных кривых.

Энкаитные кривые получены путем двойного поворота каждой из выпуклой либо вогнутой дуг окружностей, представляющих исходные боковые профили зубьев, относительно предполагаемых центров вращения

*Слово «энкаита» произошло от сокращения букв НКИ – Николаевский кораблестроительный институт
зубчатых колес и относительно точек пересечения, расположенных в пределах рабочей длины линии зацепления, указанных дуг окружностей с линией зацепления.

Цель работы – решение задачи по определению нагрузочной способности энкаитного зацепления и ее сравнения с нагрузочной способностью существующих зацеплений. Здесь в качестве расчетной выступает модель контакта двух полупространств, ограниченных криволинейными поверхностями, каждая из которых состоит из двух жестко связанных между собой полуцилиндров с радиусами ρ_1, ρ_{11} и ρ_2, ρ_{22} (рис. 1), где $\rho_{11} = 3\rho_1 / \sin \alpha_w$, $\rho_{22} = 3\rho_2 / \sin \alpha_w$ и $\rho_1 = mz_1 \sin \alpha_w / 2$, $\rho_2 = mz_2 \sin \alpha_w / 2$ – радиусы кривизны соответственно энкаитных и эвольвентных кривых в полюсе зацепления; m – модуль зацепления; z_1, z_2 – числа зубьев колес; α_w – угол зацепления.

При решении задачи использовались допущения, предусматривающие определение напряжений на рабочих поверхностях зубьев, однородность и изотропность материалов, неучет сил трения, сжатие зубьев в пределах упругих деформаций.

Методология решения задачи предусматривает определение двух функций деформаций. Для нахождения первой функции, которая состоит из двух функций, обратимся к рис. 1, а, исходя из которого запишем выражения зазоров между полупространствами 1 и 2 в точках $x = b_0$ и $x = -b_k$:

$$S_{b_0} = S_1 + S_2 = \frac{b_0^2}{2\rho_1} + \frac{b_0^2}{2\rho_{22}} = \frac{b_0^2}{2\rho_{np.1}}; \quad (1)$$

$$S_{-b_k} = S_1 + S_2 = \frac{b_k^2}{2\rho_2} + \frac{b_k^2}{2\rho_{11}} = \frac{b_k^2}{2\rho_{np.2}}, \quad (2)$$

где $\rho_{np.1} = \rho_1 \rho_{22} / (\rho_{22} \pm \rho_1)$, $\rho_{np.2} = \rho_2 \rho_{11} / (\rho_{11} \pm \rho_2)$ – приведенные радиусы кривизны; знак «+» принимается при внешнем, а «-» – при внутреннем зацеплении зубьев.

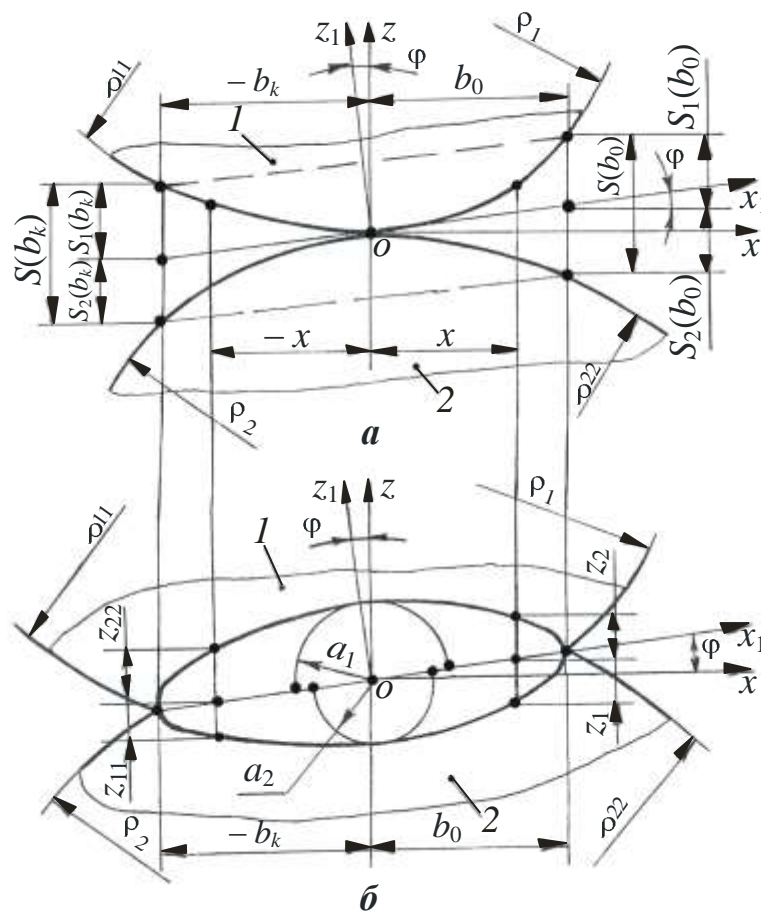


Рис. 1. Расчетная модель контакта зубьев до нагружения (а) и после нагружения (б)

Примем эллиптический закон изменения контактных деформаций [4], в связи с чем распределение деформаций по оси x (рис. 1, б) будет выглядеть в виде четырех эллиптических кривых с малыми полуосями a_1, a_2 и большими полуосями b_k, b_0 эллипсов, причем $a_1 = S_1 \cdot \rho_0 \approx S_1 \cdot \rho_k$ и $a_2 = S_2 \cdot \rho_0 \approx S_2 \cdot \rho_k$. Тогда уравнения указанных эллиптических кривых в соответствии с рис. 1, б представим следующим образом:

$$z_1 = a_2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_0^2}}; \quad z_2 = a_1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_0^2}}; \quad z_{11} = a_2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_k^2}}; \quad z_{22} = a_1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_k^2}}.$$

Из рис. 1 очевидно, что параметры b_k и b_0 не равны между собой по абсолютной величине, а это с учетом равенства $S \cdot \rho_k \approx S \cdot \rho_0$ предопределяет несимметричное деформирование полупространств 1 и 2 относительно вертикальной оси z . В связи с этим система координат из положения zOx переместилась в положение z_1Ox_1 , повернувшись относительно точки O на угол φ , величина которого очень мала [5]. Поэтому решение задачи

выполним в системе координат zOx без учета угла φ , полагая, что коэффициенты Пуассона $\nu_1 \neq \nu_2$ и модули упругости материалов $E_1 \neq E_2$.

На основании изложенного функции контактных деформаций $W_{л\bar{z}}$ и $W_{п\bar{z}}$ соответственно слева и справа от оси z являются несимметричными, и они имеют вид:

$$W_{л\bar{z}} = W_{л1\bar{z}} + W_{л2\bar{z}} = z_{11} + z_{22}; \quad W_{п\bar{z}} = W_{п1\bar{z}} + W_{п2\bar{z}} = z_1 + z_2,$$

где $W_{л1\bar{z}}$, $W_{л2\bar{z}}$ и $W_{п1\bar{z}}$, $W_{п2\bar{z}}$ – функции деформаций каждого из полупространств слева и справа от оси z .

После подстановки в уравнения $W_{л\bar{z}}$ и $W_{п\bar{z}}$ формул z_{11} , z_{22} и z_1 , z_2 , а также выражений (1) и (2), полагая $W_{\bar{z}} = W_{л\bar{z}} + W_{п\bar{z}}$, запишем зависимость функции

$$W_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{b_k^2}{\rho_{пр.2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_k^2}} + \frac{b_0^2}{\rho_{пр.1}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_0^2}} \right). \quad (3)$$

При $x=0$ максимальные значения функций $W_{л\bar{z}}$ и $W_{п\bar{z}}$ совпадают друг с другом, т. е. $b_k^2 / 2\rho_{пр.2} = b_0^2 / 2\rho_{пр.1}$, в связи с чем получим $b_k = \alpha b_0$, где $\alpha = \sqrt{\rho_{пр.2} / \rho_{пр.1}}$ – коэффициент.

При определении второй функции, аналогичной функции (3), полагаем, что при сжатии полупространств 1 и 2 их сближение в пределах упругости подчиняется гипотезе Винклера [6], исходя из которой запишем

$$W_{\bar{z}} = W_1\bar{z} + W_2\bar{z}, \quad (4)$$

где $W_1\bar{z} = A_1\bar{z} \cdot \psi_{л\bar{z}} + w_{п\bar{z}}$, $W_2\bar{z} = A_2\bar{z} \cdot \psi_{п\bar{z}} + w_{л\bar{z}}$ – функции деформации каждого из полупространств; $A_1\bar{z}$, $A_2\bar{z}$ – коэффициенты постели в m^2/H , причем $A_1\bar{z} + A_2\bar{z} = A\bar{z}$; $w_{л\bar{z}}$, $w_{п\bar{z}}$ – функции распределенной по линии нагрузки слева и справа от оси z в H/m .

В соответствии с обозначениями функция (4) примет вид

$$W_{\bar{z}} = A\bar{z} \cdot \psi_{л\bar{z}} + w_{п\bar{z}}. \quad (5)$$

Суммарный коэффициент постели $A\bar{z}$ является переменной величиной, что исключает возможность решения рассматриваемой задачи.

Поэтому решение данной задачи продолжим, исходя из постоянной величины коэффициента постели. С этой целью площадь эпюры напряжений, которые, как и деформации, изменяются по эллиптическому закону, заменим равнозначной по величине площадью прямоугольника, ординаты которого характеризуют постоянные по величине средние напряжения σ_m , определяемые из выражения

$$\sigma_m = \frac{F_n}{b_k + b_0} = \frac{F_n}{b_0(1 + \alpha)}, \quad (6)$$

где F_n – нормальная сила; b – длина зубьев.

Введем в рассмотрение зависимость между контактными деформациями W и возникающими в зубьях напряжениями σ_m , обусловленные действием силы F_n [7]:

$$W = C_m \sigma_m, \quad (7)$$

где C_m – размерный параметр в м/МПа.

Примем $C_m = C_{m1} + C_{m2}$, где C_{m1} , C_{m2} – размерные параметры каждого из полупространств. Кроме того, предположим, что $C_{m1} = C_{m2}$, хотя в действительности, как будет показано далее, размерные параметры $C_{m1} \neq C_{m2}$. При этом контактные напряжения на каждой из поверхностей в результате соприкосновения полупространств в соответствии с законом Гука будут иметь вид:

$$\sigma_{m1} = \frac{\varepsilon E_1}{1 - \nu_1^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \frac{\Delta L}{L}; \quad \sigma_{m2} = \frac{\varepsilon E_2}{1 - \nu_2^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \frac{\Delta L}{L},$$

где $\varepsilon = \Delta L / L$ – относительная деформация; ΔL – абсолютная деформация; L – линейный размер, принимаемый равным ширине площадки контакта $b_0(1 + \alpha)$ [7].

Зависимость [7] с учетом выражений σ_{m1} и σ_{m2} и принятого равенства $C_{m1} = C_{m2}$ представим применительно к каждому из полупространств в виде двух уравнений:

$$W = 2C_{m1}\sigma_{m1} = \frac{2C_{m1}E_1}{1-\nu_1^2} \frac{\Delta L}{L}; \quad W = 2C_{m2}\sigma_{m2} = \frac{2C_{m2}E_2}{1-\nu_2^2} \frac{\Delta L}{L}.$$

Исходя из равенства в последних уравнениях между абсолютными величинами деформаций W и ΔL , найдем, полагая $L = \bar{\mu} + \alpha \bar{b}_0$, выражения размерных параметров:

$$C_{m1} = \frac{\bar{\mu} - \nu_1^2 \bar{\mu} + \alpha \bar{b}_0}{2E_1}; \quad C_{m2} = \frac{\bar{\mu} - \nu_2^2 \bar{\mu} + \alpha \bar{b}_0}{2E_2}.$$

Данные уравнения указывают на то, что размерные параметры C_{m1} и C_{m2} отличаются друг от друга в силу неравенства между собой коэффициентов Пуассона и модулей упругости материалов.

С учетом выражений (7) и C_{m1} , C_{m2} определим зависимости контактной податливости каждого из полупространств:

$$\delta_{k1} = \frac{C_{m1}\sigma_m}{F_n} = \frac{1-\nu_1^2}{2bE_1}; \quad \delta_{k2} = \frac{C_{m2}\sigma_m}{F_n} = \frac{1-\nu_2^2}{2bE_2}.$$

Умножив правые части выражений δ_{k1} и δ_{k2} на ширину площадки контакта $\bar{\mu} + \alpha \bar{b}_0$, получим выражения коэффициентов A_1 и A_2 , исходя из которых запишем суммарный коэффициент постели упруго сжатых полупространств, а именно:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{\bar{\mu} + \alpha \bar{b}_0}{2} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \frac{b_0}{b}. \quad (8)$$

Умножив правые части функций (3) и (5) на dx и приравняв их друг к другу с учетом замены выражения $A \bar{\mu}$ через A , найдем в результате интегрирования полученной зависимости от $-b_k$ до b_0 следующее уравнение

$$A \left[\int_{-b_k}^0 w_{II} \bar{\mu} dx + \int_0^{b_0} w_{II} \bar{\mu} dx \right] = A F_{n1} + F_{n2} \bar{\mu} = AF_n =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{b_k}{\rho_{np.2}} \int_{-b_k}^0 \sqrt{b_k^2 - x^2} dx + \frac{b_0}{\rho_{np.1}} \int_{-b_k}^0 \sqrt{b_0^2 - x^2} dx \right) = \frac{\pi \bar{\mu} + \alpha \bar{b}_0^3}{8\rho_{np.1}},$$

где F_{n1} , F_{n2} – силы, действующие слева и справа от оси z , причем $F_{n1} + F_{n2} = F_n$.

В результате подстановки в последнее уравнение правой части зависимости (8) определим

$$b_0 = 2\sqrt{\frac{\rho_{\text{пр.1}} F_n}{\pi b} \left(\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right)}. \quad (9)$$

Функции напряжений $\sigma_{\text{л}}$ и $\sigma_{\text{п}}$ с учетом выражений (3) и (5) будут иметь вид

$$\sigma_{\text{л}} = \frac{w_{\text{л}}}{b} = \frac{w_{\text{л}}}{Ab}; \quad \sigma_{\text{п}} = \frac{w_{\text{п}}}{b} = \frac{w_{\text{п}}}{Ab},$$

причем при $x=0$ получим, исходя из данных функций, зависимость максимальных контактных напряжений

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{b_0^2}{2Ab\rho_{\text{пр.1}}} = \frac{b_k^2}{2Ab\rho_{\text{пр.2}}}. \quad (10)$$

Объединив зависимость (10) с выражениями (8) и (9), запишем уравнение максимальных контактных напряжений в виде

$$\sigma_k = \frac{2}{\sqrt{\rho_{\text{пр.1}}} + \sqrt{\rho_{\text{пр.2}}}} \sqrt{\frac{F_n}{\pi b \left(\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right)}}. \quad (11)$$

Приняв в уравнениях (9) и (11) $\rho_{\text{пр.1}} = \rho_{\text{пр.2}} = \rho$, получим выражение известных формул Герца применительно к модели контакта двух цилиндров:

$$b_0 = b_k = 2\sqrt{\frac{\rho F_n}{\pi b} \left(\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right)}; \quad \sigma_{\text{н}} = \sqrt{\frac{F_n}{\pi b \rho \left(\frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \right)}}. \quad (12)$$

Разделив правую часть выражения (12) на правую часть уравнения (11) и возведя полученную дробь в квадрат, найдем выражение коэффициента $\varphi_{\text{н}}$, который характеризует повышение нагрузочной способности энкаитного зацепления по сравнению с эвольвентным:

$$\varphi_{\text{н}} = \left(\frac{\sigma_{\text{н}}}{\sigma_k} \right)^2 = \frac{\sqrt{\rho_{\text{пр.1}}} + \sqrt{\rho_{\text{пр.2}}}}{4\rho}. \quad (13)$$

Приведенные решения задачи выполнены не только применительно к смешанному зацеплению [1], в котором головки зубьев являются энкаитами, а ножки – эвольвентами, но и к зубчатым передачам [2, 3] с энкаитными зубьями.

Для оценки и сравнения нагрузочной способности внешнего зацепления [1] с нагрузочной способностью эвольвентного зацепления рассмотрим первую ступень судовой зубчатой передачи, у которой $z_1 = 43$; $u = 2,79$; $m = 5$ мм и $\alpha_w = 20^\circ$. По известным формулам находим $z_2 = 120$; $\rho_1 = 36,765$ мм; $\rho_2 = 102,6$ мм; $\rho = 27,066$ мм; $\rho_{11} = 322,5$ мм; $\rho_{22} = 900$ мм; $\rho_{пр.1} = 35,322$ мм; $\rho_{пр.2} = 77,837$ мм и $\varphi_H = 2,014$. Если в данном примере принять $z_1 = z_2 = 43$, то $\varphi_H = 1,795$. Таким образом, при передаточном отношении $u = 2,79$ нагрузочная способность смешанного зацепления [1] примерно вдвое превышает нагрузочную способность эвольвентного зацепления.

Список литературы: 1. Патент 55868А. Україна. Зубчасте зацеплення Попова О. П. / О. П. Попов (Україна). – 2002075766. Заявлено 12.07.02. Опубл. 15.04.03. Бюл. № 4. 2. Патент 59839А. Україна. Зубчаста передача Попова О. П. / О. П. Попов (Україна). – 20021210462. Заявлено 23.12.02. Опубл. 15.09.03. Бюл. № 9. 3. Патент 62233А. Україна. Енкаїтна зубчаста передача Попова О. П. / О. П. Попов (Україна). – 2003021006. Заявлено 05.02.03. Опубл. 15.12.03. Бюл. № 12. 4. Энциклопедический справочник. Инженерные расчеты в машиностроении. – М.: Гос. науч.–техн. изд-во машиностроит. лит., 1948. – 891 с. 5. Попов А. П., Табацков В. П., Балицкий И. В. Повышение нагрузочной способности зубчатых передач сельскохозяйственных машин // Тр. Междунар. науч.–техн. конф. – Вісник ХДТУСГ. – Харків, 2001. – Вип. 8. – Том 1. – С. 300 – 304. 6. Попов А. П. Зубчатые муфты в судовых агрегатах. – Л.: Судостроение, 1985. – 240 с. 7. Попов А. П., Попова Л. А. Влияние нелинейной зависимости между перемещениями и напряжениями на контактную прочность эвольвентного зацепления // Зб. наук. праць УДМТУ. – Миколаїв, 2002, №6 (384). – С. 67–76.