

УДК 621.833.6

В.А. ТКАЧЕНКО, проф. к.т.н., **И.Г. ШЕБАНОВ**, проф. к.т.н.,
Харьков, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е.
Жуковского «ХАИ»

ОБЩИЙ МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ

The theorems of addition of points and links of any differential mechanisms (simple and compound are proved) and the common method of definition of there speeds (bath analytical and graphic) with use of privates mechanisms is offered.

Дифференциальные механизмы в современных механических устройствах получают все более широкое применение [1-7]. В состав таких механизмов входит один или несколько базовых дифференциалов.

Базовыми дифференциалами (или простейшими) являются планетарные механизмы любых кинематических схем (с простыми сателлитами, кратным или планетарным их развитием), имеющие по три подвижных основных звена (на центральной оси) и степень подвижности $W=2$. Такие базовые дифференциалы называются еще иначе трехосными или безопорными. Два из его основных звеньев являются входными (ведущими) и третье выходное или конечное (ведомое). В случаях образования замкнутых кинематических схем входными звеньями дифференциала (ведущими и ведомыми) являются два его звена, входящие в замкнутую цепь (зубчатые колеса цепи замыкания, соосные винты, образующие замкнутую цепь с внешней средой, колеса транспортной машины с замыканием на грунт и т.п.). Конечным звеном в этих случаях является основное звено дифференциала, не входящее в цепь замыкания. Оно также может быть ведущим или ведомым.

Кинематическое исследование базовых дифференциальных механизмов основывается на известном методе Виллиса, дающем

$$\omega_k = i_{ka}^b \omega_a + i_{kb}^a \omega_b, \quad (1)$$

где ω_k – угловая скорость конечного звена, ω_a и ω_b – угловые скорости входных звеньев (при этом водилом может быть любое из трех звеньев (a, b или k)), i_{ka}^b и i_{kb}^a – передаточные отношения механизмов (планетарных и рядных), образуемых при остановке одного из входных звеньев. Такие механизмы будем называть частными или одностепенными механизмами (при $\omega_a = 0$ или $\omega_b = 0$).

Если принять $i_{ka}^b \omega_a = \omega_k^b$ и $i_{kb}^a \omega_b = \omega_k^a$, то правило суммы (1) можно интерпретировать как алгебраическую сумму двух угловых скоростей конечного звена (ω_k^b и ω_k^a), полученных от частных механизмов, то есть

$$\omega_k = \omega_k^a + \omega_k^b \quad (2)$$

В уравнении (1) всегда $i_{ka}^b + i_{kb}^a = 1$, ибо всегда $i_{kb}^a = 1 - i_{ka}^b$. Кроме этого уравнение (1) справедливо для любых трех звеньев внутри дифференциала, включая сателлиты.

Во многих случаях техническая задача требует создания и применения составных дифференциальных механизмов, состоящих из нескольких базовых (трехосных, безпорных) дифференциалов любых кинематических схем (с простыми сателлитами, с рядным или планетарным их развитием) и имеющих $W=2$. Это схемы суммирования более двух независимых параметров, схемы повышенной надежности с необходимой кратностью резервирования [5, 6], планетарные коробки передач (ПКП) с несколькими элементами управления (более двух) [2, 3] и т.д.

В таблице приведены некоторые структурные схемы составных дифференциальных механизмов, из которых можно образовать

кинематические схемы механизмов с $W \geq 2$ при различном количестве соединяемых базовых дифференциалов D_i .

Все структурные группы прежде всего должны подчиняться [1] зависимости

$$q = 2D - W = 3D - n_o, \quad (3)$$

где q – число связей между основными звеньями дифференциалов, D – число используемых базовых дифференциалов, $n_o = D + W$ – число из равенства (3) основных звеньев, образуемых после соединения всех дифференциалов в составную схему.

Любая структурная схема часть основных своих звеньев (но не более $W+1$) может иметь свободными (не образующими связей) для образования входных или конечных звеньев. При числе свободных звеньев меньше $W+1$ в качестве входных или конечных звеньев принимаются некоторые из основных, вошедших в связи. Любая из структурных схем используется для образования нескольких составных дифференциальных механизмов. Например, из схемы №33-1 можно образовать четыре схемы различных составных дифференциалов с $W=3$, принимая за конечное звено одно из четырех основных звеньев, не образующих связи. Остальные три основных звена без связей будут входными. Каждая из четырех составных схем содержит три базовых дифференциальных механизма D_1 , D_2 и D_3 , которые в свою очередь могут иметь разные кинематические схемы с простым, рядным или планетарным развитием сателлитов. Схема №33-2 имеет три свободных основных звена для использования их в качестве входных и конечного звеньев. Недостающим входным или конечным звеном является звено, образующее связь между D_1 и D_2 или D_2 и D_3 .

Как при аналитическом, так и при графическом исследовании кинематики базовых и составных дифференциальных механизмов встречаются определенные трудности в правильном использовании образующихся иногда систем из кинематических уравнений типа (1). Даже для базовых

дифференциалов, образованных рядным или планетарным развитием сателлитов, при конечном водиле построение картин скоростей затруднительно и требует специальных приемов (см., например, статью «Картины скоростей.....», помещенную в настоящем сборнике).

Исследование кинематики базовых и составных дифференциальных механизмов нам представляется удобнее всего вести с помощью частных (одностепенных) механизмов, число которых равно числу степеней подвижности рассматриваемого дифференциала. Такой метод решения пригоден для любой кинематической схемы любого дифференциального механизма и поэтому является общим. Решение по этому общему методу основывается на двух теоремах сложения скоростей.

Таблица

Структурные схемы некоторых составных дифференциальных механизмов

к- во Д	W=2				W=3				W=4			
	№		q	n ₀	№		q	n ₀	№		q	n ₀
1	21-1		0	3		---				---		
2	22-1		2	4	32-1		1	5		---		
3			4	5			3	6			2	7
	23-1				33-1				43-1			
	23-2				33-2				43-2			
	23-3				33-3							

4	24-1		34-1		44-1							
	24-2		34-2		44-2							
	24-3		34-3		44-3							
	24-4		34-4		44-4							
	24-5		34-5		44-5							
	24-6		34-6									
		и другие	6	6	и другие	5	7				4	8
5		невозможно	8	7	35-і	есть схемы	7	8	45-і	есть схемы	6	9
6		---			36-і	есть схемы	9	9	46-і	есть схемы	8	10
7		---				невозможно	11	10	47-і	есть схемы	10	11
8		---				---			48-і	есть схемы	12	12
9		---				---				невозможно	14	13

Теорема 1: Угловая скорость любого звена любого дифференциального механизма равна алгебраической сумме угловых скоростей тех же звеньев всех его частных механизмов, число которых равно числу степеней подвижности рассматриваемого дифференциала.

Для трех основных звеньев базового дифференциального механизма теорема 1 доказана по определению (см. (2)). Угловая скорость сателлита,

$$\frac{\omega_{\text{сат}} - \omega_b}{\omega_a - \omega_b} = i_{\text{сат.а}}^b$$

отвечающая зависимости $\omega_{\text{сат}} - \omega_b$, также может быть представлена в виде суммы угловых скоростей сателлитов двух частных механизмов

$$\omega_{\text{сат}} = i_{\text{сат.а}}^b \omega_a + 1 - i_{\text{сат.а}}^b \omega_b = i_{\text{сат.а}}^b \omega_a + i_{\text{сат.б}}^a \omega_b = \omega_{\text{сат}}^a + \omega_{\text{сат}}^b$$

(4)

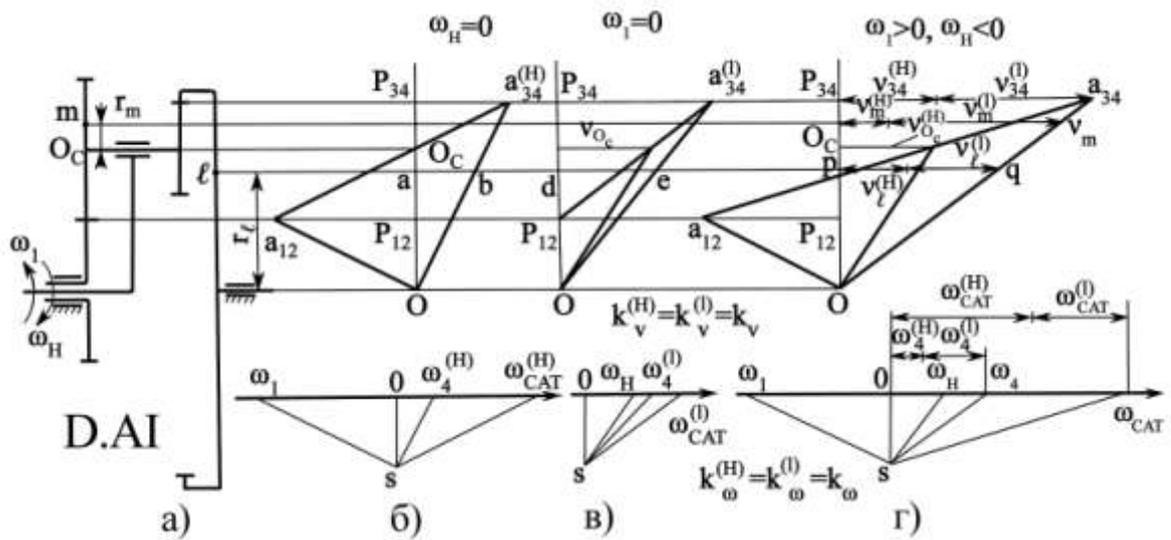


Рис.1

На рис.1 выполнено построение картин с применением частных механизмов для базового дифференциала при входных звеньях Z_1 и H и конечном звене Z_4 . Картина угловых скоростей на рис.1б построена для частного механизма при $\omega_H = 0$, а на рис.1в – при $\omega_1 = 0$. Их сложение дает общую картину угловых скоростей (рис.1г), где и $\omega_4^{(H)} + \omega_4^{(I)} = \omega_4$ и $\omega_{CAT}^{(H)} + \omega_{CAT}^{(I)} = \omega_{CAT}$.

Для составных дифференциальных механизмов доказательство теоремы 1 получается решением системы уравнений типа (1), составленной для каждого из базовых дифференциальных механизмов, образующих составной.

Докажем для примера теорему 1 для составных дифференциальных механизмов из двух базовых (схема №22-1 таблицы). Пусть одним из входных звеньев (рис.2 под №22-1-1) будет свободное основное звено а первого дифференциала D_1 , а конечным звеном k - свободное звено дифференциала D_2 . За недостающее второе входное звено b примем одну из связей между дифференциалами D_1 и D_2 . Вторую связь обозначим буквой c . Запишем систему уравнений (1) для D_1 и D_2

$$\begin{cases} \omega_c = i_{ca}^{b_1} \omega_a + i_{cb_1}^a \omega_b \\ \omega_k = i_{kb}^c \omega_b + i_{kc}^{b_2} \omega_c \end{cases}$$

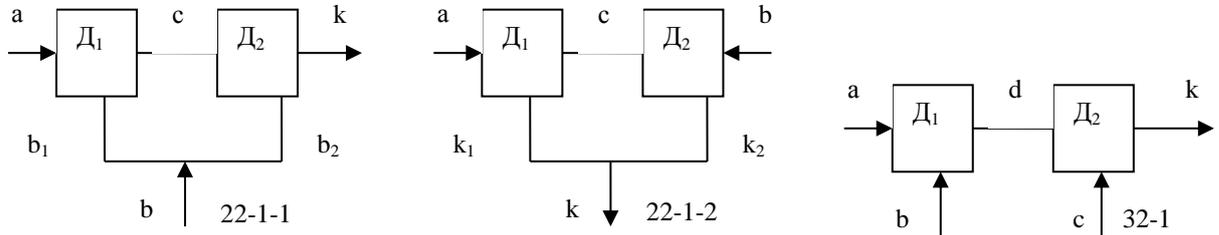


Рис.2

Подстановка ω_c во второе уравнение дает

$$\omega_k = i_{kb}^c \omega_b + i_{ca}^{b_1} i_{kc}^{b_2} \omega_a + i_{cb_1}^a i_{kc}^{b_2} \omega_b = i_{kc}^{b_2} i_{ca}^{b_1} \omega_a + i_{kb}^c + i_{kc}^{b_2} i_{cb_1}^a \omega_b$$

При $\omega_a = 0$ между звеньями k и b образуется замкнутый планетарный механизм, у которого звено k не входит в цепь замыкания. Для такого

механизма по правилу суммы $i_{kb}^a = i_{kb}^c + i_{kb}^{b_2} = i_{kb}^c + i_{kc}^{b_2} i_{cb_1}^a$. В итоге

угловая скорость конечного звена получилась алгебраической суммой двух угловых скоростей тех же выходных звеньев частных механизмов, то есть

$$\omega_k = i_{ka}^b \omega_a + i_{kb}^a \omega_b = \omega_k^b + \omega_k^a$$

(5)

Если в рассматриваемом механизме №22-1 принять за входные звенья (a, b) свободные основные звенья дифференциалов Д1 и Д2, а конечным k (рис.2 №22-1-2) – звено, связующее дифференциалы, то по (1)

$$\begin{cases} \omega_k = i_{k_1a}^c \omega_a + i_{k_1c}^a \omega_c \\ \omega_k = i_{k_2b}^c \omega_b + i_{k_2c}^b \omega_c \end{cases}$$

Исключая из системы ω_c , получим

$$\omega_k \left(\frac{1}{i_{k_1c}^a} - \frac{1}{i_{k_2c}^b} \right) = \frac{i_{k_1a}^c}{i_{k_1c}^a} \omega_a - \frac{i_{k_2b}^c}{i_{k_2c}^b} \omega_b = i_{ck_1}^a - 1 \omega_a - i_{ck_2}^b - 1 \omega_b =$$

$$= -i_{ca}^{k_1} \omega_a + i_{cb}^{k_2} \omega_b = i_{ck_1}^a - i_{ck_2}^b \omega_k = i_{cb}^{k_2} - i_{ca}^{k_1} \omega_k$$

$$\omega_k = \frac{i_{ca}^{k_1}}{i_{ca}^{k_1} - i_{cb}^{k_2}} \omega_a + \frac{i_{cb}^{k_2}}{i_{cb}^{k_2} - i_{ca}^{k_1}} \omega_b$$

Отсюда

Заметим, что и здесь, как в уравнении (1), сумма коэффициентов при ω_a и ω_b равна единице. При $\omega_b = 0$ между входным звеном а и конечным к образуется замкнутый механизм, у которого по правилу суммы от звена а, не входящего в цепь замыкания

$$i_{ak}^b = i_{ak_1}^c + i_{ak_2}^{k_1} = 1 - i_{ac}^{k_1} + i_{ac}^{k_1} i_{ck_2}^b = 1 - i_{cb}^{k_2} i_{ac}^{k_1} = \frac{i_{ca}^{k_1} - i_{cb}^{k_2}}{i_{ca}^{k_1}}$$

$$i_{ka}^b = \frac{i_{ca}^{k_1}}{i_{ca}^{k_1} - i_{cb}^{k_2}} \quad \text{Аналогично при } \omega_a = 0 \quad \frac{i_{cb}^{k_2}}{i_{cb}^{k_2} - i_{ca}^{k_1}} = i_{kb}^a$$

Следовательно, $\omega_k = i_{ka}^b \omega_a + i_{kb}^a \omega_b = \omega_k^b + \omega_k^a$ (6)

Рассмотрим структурную схему №32-1, дающую $W=3$ при двух базовых дифференциальных механизмах Д1 и Д2. В схеме количество свободных основных звеньев равно $W+1$, которые принимаются за входные

звенья (а, b, c) и конечное звено к (рис2). . По (1)
$$\begin{cases} \omega_d = i_{da}^b \omega_a + i_{db}^a \omega_b \\ \omega_k = i_{kd}^c \omega_d + i_{kc}^d \omega_c \end{cases}$$

Исключая ω_d , получим

$$\omega_k = i_{kd}^c i_{da}^b \omega_a + i_{db}^a \omega_b + i_{kc}^d \omega_c = i_{ka}^{c,b} \omega_a + i_{kb}^{c,a} \omega_b + i_{ka}^{a,b} \omega_c =$$

$$= \omega_k^{c,b} + \omega_k^{c,a} + \omega_k^{a,b} \quad (7)$$

Последняя сумма является суммой угловых скоростей выходных звеньев трех частных механизмов, что удовлетворяет теореме 1.

Поступая аналогично, доказывается теорема 1 для всех составных дифференциальных механизмов, удовлетворяющих требованию (3), часть из которых представлена в таблице. В итоге получаем

$$\begin{aligned}\omega_k &= i_{ka}^{a,c\dots n,p} \omega_a + i_{kb}^{a,c\dots n,p} \omega_b + \dots + i_{kp}^{a,b,c\dots n} \omega_p = \\ &= \omega_k^{b,c\dots n,p} + \omega_k^{a,c\dots n,p} + \dots + \omega_k^{a,b,c\dots n},\end{aligned}\quad (8)$$

где число слагаемых равно W и $(a,b,c\dots n,p)$ – обозначения входных звеньев (и их одновременная неподвижность) частных механизмов.

Формула (8) справедлива и для сателлитов внутри любого дифференциального механизма заменой индекса k на индекс сат, то есть

$$\omega_{\text{сат}} = \omega_{\text{сат}}^{b,c\dots n,p} + \omega_{\text{сат}}^{a,c\dots n,p} + \dots + \omega_{\text{сат}}^{a,b,c\dots n} \quad (9)$$

Теорема 1 справедлива и для суммирования угловых ускорений, которое в общем случае проводится векторно. В случае образования замкнутых контуров в частных механизмах к доказательству привлекается правило суммы передаточных отношений, а при построении картин угловых скоростей частных механизмов – все известные приемы, включая описанные в статье, представленной в этом сборнике.

Теорема 2: Линейные скорости и ускорения точек всех звеньев любого дифференциального механизма равны векторной сумме линейных скоростей и ускорений тех же точек всех его частных механизмов.

Для центральных звеньев любого дифференциального механизма теорема 2 очевидна ибо, умножая формулу (8) на радиус r_ℓ рассматриваемой точки, получим

$$\begin{aligned}V_\ell &= r_\ell \omega_k = r_\ell \omega_k^{b,c\dots n,p} + r_\ell \omega_k^{a,c\dots n,p} + \dots + r_\ell \omega_k^{a,b,c\dots n} = \\ &= V_\ell^{b,c\dots n,p} + V_\ell^{a,c\dots n,p} + \dots + V_\ell^{a,b,c\dots n}\end{aligned}\quad (10)$$

Каждое из слагаемых суммы (10) является скоростью точки ℓ звена в составе частного механизма. Алгебраическое их сложение правомочно, ибо векторы этих скоростей коллинеарны. Например, на рис.1

$$\mathbf{V}_\ell = \mathbf{r}_\ell \boldsymbol{\omega}_4 = \mathbf{r}_\ell \boldsymbol{\omega}_4^{\mathbf{H}^-} + \mathbf{r}_\ell \boldsymbol{\omega}_4^{\mathbf{I}^-} = \mathbf{V}_\ell^{\mathbf{H}^-} + \mathbf{V}_\ell^{\mathbf{I}^-}.$$

где $\mathbf{V}_\ell^{\mathbf{H}^-} = \mathbf{r}_\ell \boldsymbol{\omega}_4^{\mathbf{H}^-} = \overline{\mathbf{ab}} \underline{\mathbf{k}}_v^{\mathbf{H}^-}$, $\mathbf{V}_\ell^{\mathbf{I}^-} = \mathbf{r}_\ell \boldsymbol{\omega}_4^{\mathbf{I}^-} = \overline{\mathbf{de}} \underline{\mathbf{k}}_v^{\mathbf{I}^-}$ и $\mathbf{V}_\ell = \overline{\mathbf{pq}} \underline{\mathbf{k}}_v$

Скорость любой точки \mathbf{m} на сателлите может быть представлена по теореме о разложении движения на поступательное и вращательное в виде векторной суммы $\overline{\mathbf{V}}_m = \overline{\mathbf{V}}_{O_c} + \overline{\mathbf{V}}_{mO_c} = \overline{\mathbf{V}}_{O_c} + \overline{\mathbf{r}}_m \times \overline{\boldsymbol{\omega}}_{\text{сат}}$, где скорость оси сателлита, как точки, принадлежащей центральному звену, удовлетворяет равенству (10), а $\overline{\boldsymbol{\omega}}_{\text{сат}}$ равенству (9). Тогда

$$\begin{aligned}
\bar{V}_m &= \bar{V}_{O_c}^{(b,c,\dots,n,p)} + \bar{V}_{O_c}^{(a,c,\dots,n,p)} + \dots + \bar{V}_{O_c}^{(a,b,c,\dots,n)} + \bar{r}_m \times \bar{\omega}_{car}^{(b,c,\dots,n,p)} + \\
&+ \bar{r}_m \times \bar{\omega}_{car}^{(a,c,\dots,n,p)} + \dots + \bar{r}_m \times \bar{\omega}_{car}^{(a,b,c,\dots,n)} = \left[\bar{V}_{O_c}^{(b,c,\dots,n,p)} + \bar{r}_m \times \bar{\omega}_{car}^{(b,c,\dots,n,p)} \right] + \\
&+ \left[\bar{V}_{O_c}^{(a,c,\dots,n,p)} + \bar{r}_m \times \bar{\omega}_{car}^{(a,c,\dots,n,p)} \right] + \dots + \left[\bar{V}_{O_c}^{(a,b,c,\dots,n)} + \bar{r}_m \times \bar{\omega}_{car}^{(a,b,c,\dots,n)} \right] = \\
&\bar{V}_m^{(b,c,\dots,n,p)} + \bar{V}_m^{(a,c,\dots,n,p)} + \dots + \bar{V}_m^{(a,b,c,\dots,n)} \quad \dots(11)
\end{aligned}$$

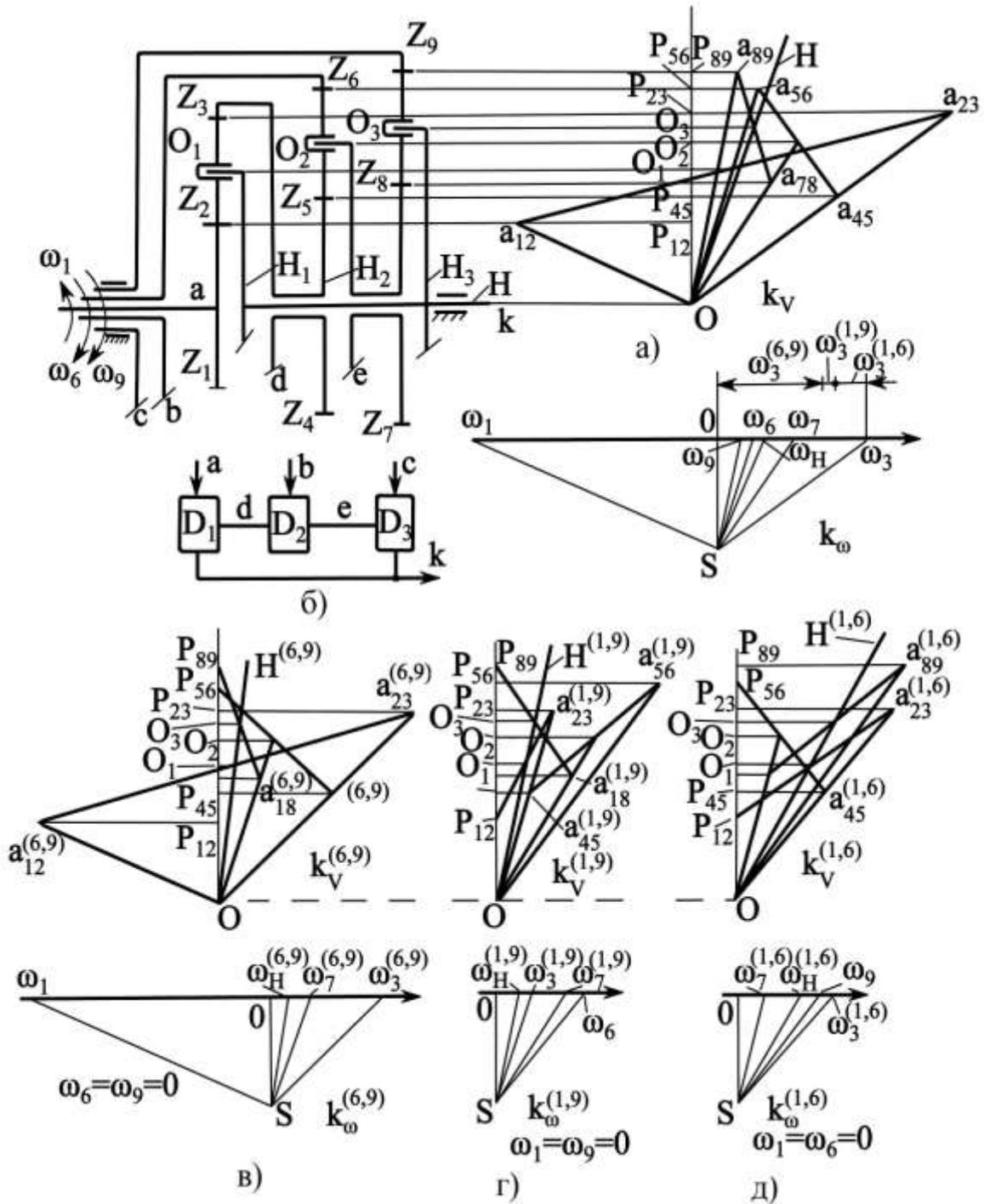


Рис.3

Суммы, заключенные в квадратные скобки, представляют собой по теореме о разложении движения скорости рассматриваемой точки m при всех остановленных входных звеньях (кроме одного), то есть скорости точки m в частных механизмах.

Аналогично ведется доказательство правила векторного суммирования ускорений точек сателлитов частных механизмов для получения ускорения точки m .

Таким образом, в любом дифференциальном механизме (простом и составном при $W > 1$) линейные скорости и ускорения всех точек, а также угловые скорости и ускорения всех его звеньев подчиняются правилам суммы (в соответствии с теоремами 1 и 2). Этот общий метод может быть применен и для построения картин скоростей, ибо во многих случаях традиционные приемы построения [5] (по двум точкам) не могут быть использованы даже для простых схем (без развития сателлитов). В заключение рассмотрим пример составного дифференциального механизма, состоящего из трех \overline{AI} -механизмов при $W=3$ и отвечающего структурной схеме №33-3 в представленной таблице. Кинематическая схема такого дифференциального механизма при конечном звене, соединяющем дифференциалы Д1 и Д3, показана на рис.3а со структурной схемой на рис.3б. Три его частных механизма (при $\omega_6 = \omega_9 = 0$, при $\omega_1 = \omega_9 = 0$ и при $\omega_1 = \omega_6 = 0$) являются замкнутыми планетарными механизмами с водилами Н(Н1,Н3) и Н2, входящими в цепи замыкания. В каждом частном механизме один из планетарных механизмов работает в режиме дифференциального. Для таких замкнутых планетарных механизмов [5] построение картин (рис.3в, рис.3г и рис.3д) возможно, только задавшись скоростью водила Н (или любого другого входящего в замкнутый контур звена). Масштабы определяются после построения картин как

$$k_v^{6,9} = \frac{r_1 \omega_1}{P_{12} a_{12}}, \quad k_v^{4,9} = \frac{r_6 \omega_6}{P_{56} a_{56}}, \quad k_v^{4,6} = \frac{r_9 \omega_9}{P_{89} a_{89}}$$

$$k_{\omega}^{6,9} = \frac{k_v^{6,9}}{k_{\ell} \overline{\omega_s}^{6,9}}, \quad k_{\omega}^{4,9} = \frac{k_v^{4,9}}{k_{\ell} \overline{\omega_s}^{4,9}}, \quad k_{\omega}^{4,6} = \frac{k_v^{4,6}}{k_{\ell} \overline{\omega_s}^{4,6}}$$

и

Картины скоростей (см. рис.3а) всего дифференциального механизма получаются как алгебраические суммы скоростей одинаковых точек и звеньев частных механизмов.

Например,

$$V_{P_3} = \overline{P_{23} a_{23}} \overline{k}_v = \left(\overline{P_{23} a_{23}}^{6,9} \right) k_v^{6,9} + \left(\overline{P_{23} a_{23}}^{4,9} \right) k_v^{4,9} + \left(\overline{P_{23} a_{23}}^{4,6} \right) k_v^{4,6}$$

$$\omega_3 = \overline{\omega_3} \overline{k}_{\omega} = \left(\overline{\omega_3}^{6,9} \right) k_{\omega}^{6,9} + \left(\overline{\omega_3}^{4,9} \right) k_{\omega}^{4,9} + \left(\overline{\omega_3}^{4,6} \right) k_{\omega}^{4,6}$$

Для наглядности изображения угловые скорости сателлитов на картинах угловых скоростей не показаны. Их построение тривиально.

Общий вывод: доказаны теоремы сложения скоростей точек и звеньев любого дифференциального механизма (базовой и составных схем) и предложен общий метод определения этих скоростей с использованием частных механизмов.

Список литературы: 1. Кирдяшев Ю.Н. Многопоточные передачи дифференциального типа. Л-д, Машиностроение, 1981, 223с. 2. Шабанов К.Д. Замкнутые дифференциальные передачи. М. Машиностроение, 1972, 160с. 3. Петров А.Д. Планетарные гидромеханические передачи колесных и гусеничных машин. М. Машиностроение, 1986, 272с. 4. Ткаченко В.А. Планетарные механизмы (оптимальное проектирование). Харьков, Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ». 2003. 446с. 5. Ткаченко В.А. О многократном резервировании механических приводов, Вестник ХГПУ, 2000, вып.109, с.43-48. 6. Ткаченко В.А., Шабанов И.Г. Вопросы синтеза простых дифференциальных зубчатых редукторов для привода воздушных и гребных винтов, Вестник ХГПУ «ХПИ», Х. НТУ, 2002. №10. Т.3 вып.12, с.46-53.