

**Г. Ф. РОМАНОВСКИЙ**, д. т. н., **А. П. ПОПОВ**, д. т. н., Николаев,  
Национальный университет кораблестроения им. адм. Макарова

## **ОСОБЕННОСТИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БОЧКООБРАЗНЫХ ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ МУФТ**

*Have produced the solution of contact problem taking into account a features of interaction tubby tooth of the tooth-type coupling, working with axes stress.*

Эффективность современной техники во многих случаях зависит от способности конструкций компенсировать имеющиеся место перекосы осей, обусловленным одновременным либо раздельным действием конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов. Для компенсации перекосов осей используются различные муфты, среди которых бесспорное предпочтение отдается зубчатым муфтам, состоящим из втулок с бочкообразными и обойм с прямыми зубьями [1].

Бочкообразные зубья по сравнению с прямыми позволяют существенно повысить нагрузочную способность муфты и уменьшить вредное влияние на работу элементов трансмиссий упругих изгибающих моментов от неуравновешенных усилий в муфте и сил трения на зубьях, обусловленных перекосами осей.

Одним из основных критериев работоспособности зубчатых муфт является контактная выносливость зубьев, в связи с чем исследования прочности и особенностей их взаимодействия при перекосах осей являются актуальными, и они, как правило, взаимосвязаны с научными и практическими заданиями в области зубчатых механизмов.

Цель работы – исследование контактной прочности зубчатых муфт при различном взаимодействии бочкообразных и прямых зубьев в условиях перекоса осей с учетом конструктивных и технологических факторов.

При проектировании и изготовлении зубчатых муфт с целью сохранения модели контакта цилиндра с плоскостью (рис. 1, а) необходимо исходить из длины бочкообразных зубьев  $b$ , определяемой по формуле [1]:

$$b = 2 R_1 \psi + b_k \quad (1)$$

где  $R_1$  – радиус бочкообразности зубьев;  $\psi$  – заданный угол перекоса осей;  $b_k$  – полудлина площадки контакта.

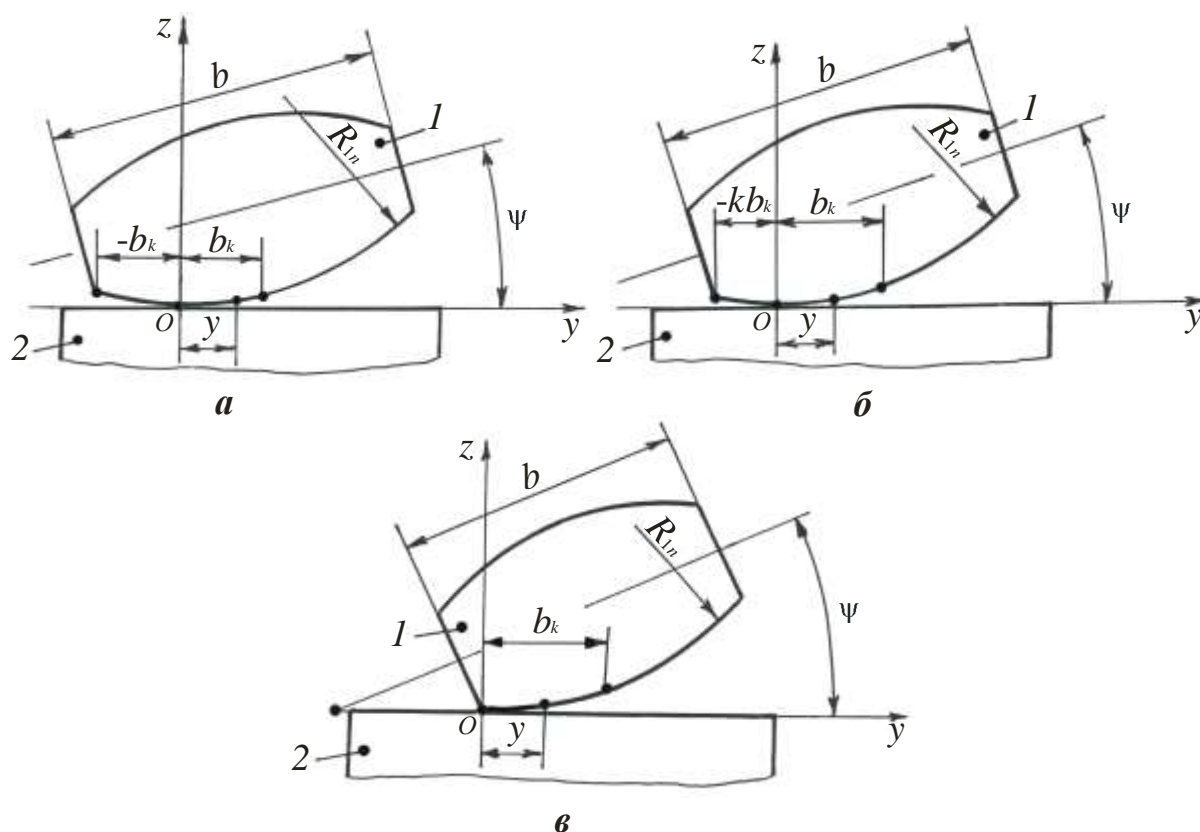


Рис. 1. Схематическое изображение контактного взаимодействия цилиндра (а), усеченного цилиндра (б) и полуцилиндра (в) с плоскостью 2

В действительности при проектировании, исходя из конструкторского опыта, закладывается длина зубьев  $R_1 \psi \leq b \leq 2 R_1 \psi + b_k$ , что приводит к модели контакта усеченного цилиндра с плоскостью (рис. 1, б) либо полуцилиндра с плоскостью (рис. 1, в). Модель контакта (рис. 1, б, в) характеризуется более высокими напряжениями по сравнению с моделью контакта (рис. 1, а). Кроме того, при эксплуатации возможны случаи, когда действительный угол перекоса осей  $\psi_0$  может оказаться больше заданного угла перекоса осей  $\psi$ . В

этом случае даже при правильно выбранной длине зубьев  $b$  (рис. 1, а) модели контакта зубьев могут быть сведены к виду (рис. 1, б, в).

Для решения задачи необходимо иметь две функции контактных деформаций. Одна из функций с учетом параболического закона распределения деформаций (рис. 1, б) будет иметь вид

$$W_{\psi} = W_1_{\psi} + W_2_{\psi} = \frac{kb_k^2}{2R_1} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b_k^2}} + \frac{b_k^2}{2R_1} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b_k^2}}, \quad (1)$$

где  $W_1_{\psi}$ ,  $W_2_{\psi}$  – функции контактных деформаций, изменяющиеся в пределах от  $-kb_k$  до нуля и от нуля до  $b_k$  длины площадки контакта;  $k$  – коэффициент уменьшения полудлины площадки контакта, причем  $0 \leq k \leq 1$ .

Для определения второй функции  $W_{\psi}$  необходимо иметь зависимость коэффициента постели  $A$  в виде константы, так как в действительности при изменении напряжений, как и деформаций, по эллиптическому закону коэффициент постели является функцией переменной величины  $y$ . Переход от переменной величины коэффициента постели к постоянной величине возможен в случае замены площади реальной эпюры контактных напряжений эквивалентной площадью прямоугольника, ординаты которого представляют собой средние контактные напряжения, равные

$$\sigma_m = \frac{F_n}{kb_k + b_k h_p} = \frac{F_n}{b_k(1 + h_p)}, \quad (2)$$

где  $F_n$  – нормальная сила, действующая на сопряженную пару зубьев;  $h_p$  – рабочая высота зуба.

По аналогии с решениями [2], используя зависимость (2), запишем выражение контактной податливости каждого из сопряженной пары зубьев, полагая коэффициенты Пуассона  $\nu_1 \neq \nu_2$  и модули упругости материалов  $E_1 \neq E_2$ :

$$\delta_{k1} = \frac{1 - \nu_1^2}{2(1 + k)E_1 b_k h_p} L; \quad \delta_{k2} = \frac{1 - \nu_2^2}{2(1 + k)E_2 b_k h_p} L,$$

где  $L$  – некоторый линейный размер, принимаемый равным  $2b_k$  [2].

С учетом двух последних уравнений зависимость коэффициента постели при  $L = 2b_k$  примет вид

$$A = 2b_k (\delta_{k1} + \delta_{k2}) = \frac{b_k}{h_p} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right). \quad (3)$$

Имея выражение (3), представим в окончательном виде функцию  $w$ , исходя из подчинения сближаемых друг с другом зубьев под действием силы  $F_n$  в пределах упругости гипотезе Винклера, следующим образом:

$$W = A (w_1 + w_2) = \frac{b_k}{h_p} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) (w_1 + w_2), \quad (4)$$

где  $w_1$ ,  $w_2$  – функции удельной нагрузки, распределенной по рабочей высоте зуба, действующие в пределах длин площадки контакта, соответственно равных  $-kb_k$  и  $b_k$ .

Умножив функции (1) и (4) на  $dy$ , определим уравнение элементарной площади эпюры контактных деформаций. В результате интегрирования данного уравнения в пределах длины площадки контакта, т. е. от  $-kb_k$  до  $b_k$ , получим выражение

$$\begin{aligned} A \left[ \int_{-kb_k}^0 w_1 dy + \int_0^{b_k} w_2 dy \right] &= AF_n = \frac{b_k}{h_p} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) F_n = \\ &= \frac{b_k^2}{2R_1} \int_{-kb_k}^0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b_k^2}} dy + \frac{b_k^2}{2R_1} \int_0^{b_k} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b_k^2}} dy = \frac{\pi(1 + k^3) b_k^3}{8R_1}. \end{aligned}$$

В результате решения последнего уравнения запишем выражение параметра  $b_k$  в виде:

$$b_k = 1,596 \sqrt{\frac{R_1 F_n}{(1 + k^3) h_p} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)}. \quad (5)$$

С учетом зависимости  $W_2 dy = Aw_2 dy$ , полагая  $\sigma_2 = w_2 / h_p$ , найдем функцию напряжений

$$\sigma_2 = \frac{W_2}{Ah_p} = \frac{b_k^2}{2R_1Ah_p} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b_k^2}},$$

исходя из которой при  $y=0$  определим выражение максимальных контактных напряжений

$$\sigma_H = \frac{b_k^2}{2R_1Ah_p}. \quad (6)$$

Объединив уравнения (3), (5) и (6), представим выражение максимальных контактных напряжений следующим образом:

$$\sigma_H = 0,798 \sqrt{\frac{F_n}{1 + k^3 \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) R_1 h_p}}. \quad (7)$$

Упростим зависимости (5) и (7), приняв  $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0,3$  и  $E_1 = E_2 = E$ , в итоге определим:

$$b_k = 2,153 \sqrt{\frac{R_1 F_n}{1 + k^3 E h_p}}; \quad (8)$$

$$\sigma_H = 0,5915 \sqrt{\frac{E F_n}{1 + k^3 R_1 h_p}}. \quad (9)$$

Если в уравнениях (8) и (9) принять коэффициент  $k=1$ , то данные уравнения будут сведены к известным формулам Герца:

$$\left. \begin{aligned} b_k &= 1,522 \sqrt{\frac{R_1 F_n}{E h_p}}; \\ \sigma_H &= 0,418 \sqrt{\frac{E F_n}{R_1 h_p}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Эпюра распределения контактных напряжений в пределах длины  $2b_k$  на основании уравнений (10) и функции

$$\sigma = \sigma_H \sqrt{1 - \frac{y^2}{b_k^2}}$$

приведена на рис. 2, а.

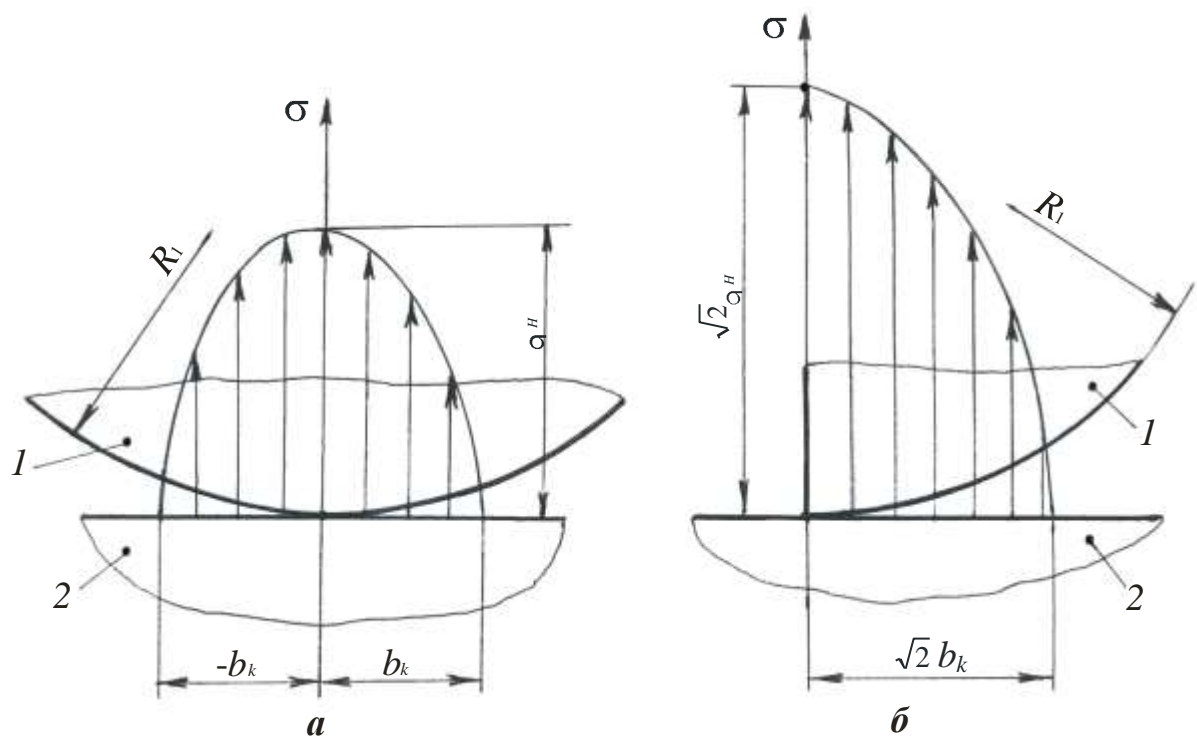


Рис. 2. Эпюры контактных напряжений при взаимодействии цилиндра 1 с плоскостью 2 (а) и полуцилиндра 1 с плоскостью 2 (б)

При  $k=0$  уравнения (8) и (9) будут выглядеть следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} b_k &= 2,153 \sqrt{\frac{R_1 F_n}{E h_p}}; \\ \sigma_n &= 0,5915 \sqrt{\frac{E F_n}{R_1 h_p}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

На рис. 2, б изображена эпюра распределения контактных напряжений в пределах ширины площадки контакта в соответствии с приведенным выражением функции  $\sigma$  и формулами (11). При этом максимальные контактные напряжения, по сравнению с рис. 2, а, возросли в  $\sqrt{2}$  раз, а длина площадки контакта уменьшилась в  $\sqrt{2}$  раз.

Таким образом, полученные решения позволяют при любых значениях  $k$ , изменяющихся от единицы до нуля, определять максимальные значения контактных напряжений, влияющих на работоспособность зубчатых муфт. В заключение на основании выполненных исследований рассмотрим вопрос о возможности переноса аналогии метода отображения

изгибающих моментов на метод отображения контактных напряжений при взаимодействии полуцилиндра с плоскостью либо полуцилиндра с цилиндром.

В работе [3] изложен метод отображения изгибающих моментов, который заключается в следующем. Если в середине пластины приложить сосредоточенную силу, то при этом будет иметь место симметричная относительно линии действия силы эпюра изгибающих моментов, максимальное значение ординаты которой совпадает с направлением силы.

Если по линии действия силы разрезать пластину на две равные части и отбросить одну из частей, то в этом случае эпюра отброшенной половины пластины накладывается на эпюру оставшейся части пластины, в связи с чем максимальная величина изгибающего момента по линии действия силы возрастет вдвое. Учитывая, что изгибающий момент прямо пропорционален сосредоточенной силе  $F$ , т. е.  $M_n = f \cdot F$ , а напряжения изгиба  $\sigma_n$ , в свою очередь, прямо пропорциональны  $M_n$ , то имеем  $\sigma_n = f \cdot F$ . Следовательно, метод отображения моментов [3] по сути дела является методом отображения напряжений изгиба.

Аналогичная картина наблюдается и при рассмотрении рис. 2 с той лишь разницей, что вместо напряжений  $\sigma_n = f \cdot F$  имеют место контактные напряжения  $\sigma_n = f \cdot F_n^{0,5}$ . Из этого рисунка очевидно, что при взаимодействии цилиндра с плоскостью либо цилиндра с цилиндром, нагруженных силой  $F_n$ , возникает симметричная эпюра распределения контактных напряжений (рис. 2, а).

Если цилиндр 1 по линии симметрии эпюры напряжений разрезать на два полуцилиндра и отбросить один из полуцилиндров, то в этом случае эпюру напряжений отброшенного полуцилиндра следует наложить на эпюру оставшегося полуцилиндра с учетом того, что суммарные ординаты наложенных эпюр отброшенного и оставшегося полуцилиндров при сложении, исходя из влияния силы  $F_n$  на напряжения, следует уменьшить в

$\sqrt{2}$  раз. При этом длина площадки контакта также снизится в  $\sqrt{2}$  раз, в связи с чем она будет равна  $2b_k / \sqrt{2} = \sqrt{2}b_k$  (рис. 2, б).

Таким образом, по аналогии с методом отображения моментов или методом отображения напряжений изгиба имеет место и метод отображения контактных напряжений, который выглядит так. Если при упругом сжатии друг с другом двух цилиндров или цилиндра с плоскостью разрезать цилиндр на два полуцилиндра и отбросить один из полуцилиндров, то при этом эпюру контактных напряжений отброшенного полуцилиндра следует наложить на эпюру напряжений оставшегося полуцилиндра. В результате указанного наложения эпюр друг на друга, учитывая, что  $\sigma_n = f \cdot n^{0,5}$ , максимальные значения напряжений возрастут в  $\sqrt{2}$  раз, а длина площадки контакта уменьшится в  $\sqrt{2}$  раз.

**Список литературы:** 1. Попов А. П. Зубчатые муфты в судовых агрегатах. – Л.: Судостроение, 1985. – 240 с. 2. Попов А. П., Попова Л. А. Исследование максимальных контактных напряжений в зацеплении эвольвентных зубьев // 36. наук: праць УДМТУ. – Миколаїв, 2002, №4 (382). – С. 109 – 118. 3. Виллауэр Е. Т., Сайрег А. Исследование напряжений у корня зуба зубчатых колес с использованием консольной пластины в качестве модели зуба. – Экспресс-информация. Сер. «Редукторостроение и детали машин». – М.: ВНИИТИ, 1960, № 2. – С. 1 – 14.