

Н.Л. УТУТОВ, д.т.н., Луганск, ВНУ, **А.П. КАРПОВ**, асп., ВНУ,
Луганск

ПРОВЕРКА НА ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛА С НЕКРУГЛЫМИ ЗУБЧАТЫМИ КОЛЕСАМИ

The equations for the definition of maximum (critical) frequencies of a cross bend oscillations of the shaft with a non-circular gears are obtained. It is established, that the own and forced frequencies of a cross bend oscillations of the shaft do not coincide and are not multiple each other in case of transmission by non-circular gears, that notifies a resonance of these oscillations.

Наряду с прочностью жесткость валов и осей является основным критерием их работоспособности. На практике установлено, что усталостное разрушение валов является одним из основных видов разрушения. Оно связано с погрешностями окружного шага зубчатых колес, эксцентриситетом оси вращения, погрешностями угла наклона зуба и т.д. Поэтому на практике всегда возникают инерционные силы от дисбаланса, который вызывает колебания валов и связанных с ними других деталей. В свою очередь колебания вызывают усталостные и резонансные разрушения деталей привода, в том числе валов.

Исследованиям всех видов колебаний валов и соединенных с ними круглых зубчатых колес посвящено много работ, в то время как колебаниям валов с некруглыми зубчатыми колесами пока внимания не уделялось. Не установлено влияние сил в зацеплении, переменных радиусов центроид некруглых колес на колебания валов с этими колесами.

Целью данной статьи является оценка влияния некруглых зубчатых колес на колебания вала, на котором они насажены.

Рассмотрим определение критической частоты вращения на примере двухопорного вала с некруглым зубчатым колесом, масса которого с установленными деталями равна m . При этом некруглое колесо расположено

симметрично относительно опор, а вал выполнен с постоянным поперечным сечением и расположен горизонтально (рис. 1).

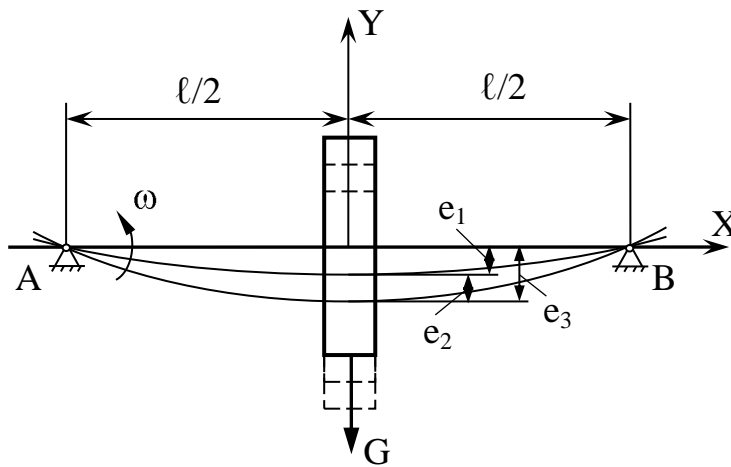


Рис. 1. Прогибы вала

Под действием силы тяжести колеса вал прогнется на величину e_1 в вертикальной плоскости.

$$e_1 = c \frac{G\ell^3}{EI}, \quad (1)$$

где c – коэффициент, зависящий от рода нагрузки и опор; для вала на двух опорах и нагруженного силой тяжести G посередине

$$c = 1/48, \quad (2)$$

G – сила тяжести колеса,

ℓ – длина вала между опорами,

E – модуль упругости материала вала,

I – экваториальный момент инерции сечения вала в месте посадки колеса

$$I = \frac{\pi d^4}{64}, \quad (3)$$

d – диаметр вала под колесом.

При равномерном вращении вала с угловой скоростью ω возникает центробежная сила инерции, которая изгибает вал на величину e_2 , увеличивая

первоначальный эксцентриситет e_1 до величины e_3 , при котором устанавливается равновесие между центробежной силой $F_{ц}$ и упругим сопротивлением вала изгибу. Упругое сопротивление вала изгибу, как известно из курса сопротивления материалов, пропорционально линейной деформации вала

$$e_2 = c \frac{F_{ц} \ell^3}{EI}, \quad (4)$$

$$F_{ц} = \frac{G}{g} \omega^2 e_3, \quad (5)$$

где g – ускорение силы тяжести,

e_3 – суммарная величина эксцентриситета вала

$$e_3 = e_1 + e_2.$$

Разложим центробежную силу (5) на составляющие по осям координат Y и Z (рис. 2)

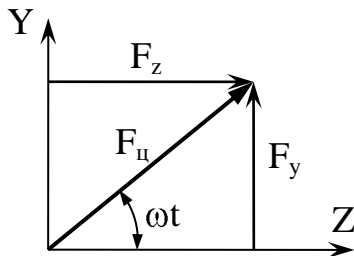


Рис. 2. Разложение центробежной силы инерции по осям координат

$$F_y = F_{ц} \sin \omega t, \quad (7)$$

$$F_z = F_{ц} \cos \omega t. \quad (8)$$

Силы F_y и F_z являются гармоническими возмущающими силами, вызывающими собственные колебания изгиба в направлении осей Y и Z .

Кроме силы F_y в вертикальной плоскости будет также действовать на вал сила тяжести колеса. Тогда возмущающая сила, действующая в вертикальной плоскости будет равна

$$F_{\text{By}} = F_y + G = G \left(\frac{\omega^2}{g} e_3 \sin \omega t + 1 \right). \quad (9)$$

В горизонтальной плоскости кроме силы F_z на вал будет также действовать радиальная сила в зацеплении зубчатой передачи

$$F_{\text{Ir}} = \frac{T_1 \text{tg} \alpha}{r_1 \cos \beta} = \frac{T_1 |1 + i(\phi_1)| \text{tg} \alpha}{a_w i(\phi_1) \cos \beta}, \quad (10)$$

где T_1 – момент крутящий на ведущем валу, принимаем $T_1 = \text{const}$,

α – угол зацепления, приближенно принимаем равным углу профиля зуба на центроиде,

β – угол наклона линии зуба на зубчатом колесе,

r_1 – радиус центроиды колеса, для ведущего некруглого колеса

$$r_1 = \frac{a_w i(\phi_1)}{1 + i(\phi_1)}, \quad (11)$$

a_w – межосевое расстояние передачи,

$i(\phi_1)$ – функция передаточного отношения передачи.

Тогда с учетом значения (8) возмущающая сила, действующая на вал в горизонтальной плоскости, будет равна

$$F_{\text{Bz}} = F_z + F_{\text{Ir}} = \frac{G}{g} \omega^2 \cos \omega t + F_{\text{Ir}}. \quad (12)$$

Из выражений (9) и (12) видно, что возмущающие силы F_{By} и F_{Bz} переменные, изменяются с углами поворота вала. Эти силы вызывают вынужденные колебания вала с зубчатым колесом.

Результирующая возмущающая сила на валу

$$F_{\text{B}} = \sqrt{F_{\text{By}}^2 + F_{\text{Bz}}^2} = \sqrt{F_{\text{ц}}^2 + G^2 + F_{\text{Ir}}^2 + 2F_{\text{ц}} G \sin \omega t + F_{\text{Ir}} \cos \omega t}. \quad (13)$$

Вектор силы F_{B} направлен под углом γ к вертикали (рис. 3)

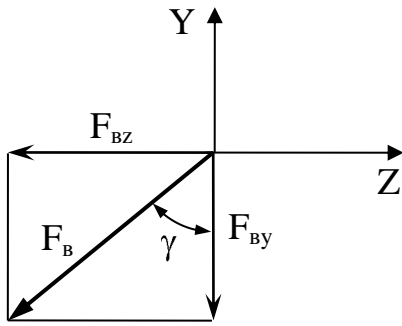


Рис. 3. Направление возмущающей силы на вал с зубчатым колесом

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{F_{BZ}}{F_{By}}. \quad (14)$$

Из условия равновесия сил сопротивления F_c вала и возмущающей силы F_B можно определить суммарную величину прогиба вала

$$e_3 = c \frac{F_B \ell^3}{EI} = \frac{c \ell^3}{EI} \sqrt{F_{ц}^2 + G^2 + F_{lr}^2 + 2F_{ц} G \sin \omega t + F_{lr} \cos \omega t}. \quad (15)$$

Так как результирующая возмущающая сила F_B направлена под углом γ (14) к вертикальной плоскости, то и максимальная стрела e_3 вала будет направлена под этим углом к вертикальной плоскости.

Из выражения (15) видно, что величина прогиба вала переменная, зависящая не только от центробежных сил инерции, но и от силы тяжести колеса и от радиальных сил в зацеплении зубчатой передачи. Величина e_3 является критической амплитудой колебаний вала с зубчатым колесом по условию изгибной жесткости вала. При этом условии угловая скорость вала будет критической.

Для определения критической угловой скорости вала возведем в квадрат левую и правую часть уравнения (15).

$$\left(\frac{G^2 \omega^4}{g^2} - E^2 I^2 \right) e_3^2 + \frac{2\omega^2}{g} G \sin \omega t + F_{lr} \cos \omega t \bar{e}_3 + G^2 + F_{lr}^2 = 0. \quad (16)$$

Из уравнения (15) видно, что амплитуда изгибных колебаний вала с зубчатым колесом, передающим крутящий момент, величина переменная,

изменяющаяся с поворотом вала от максимума при эксцентриситете при e_3 внизу (по направлению силы тяжести колеса) до минимума при противоположном нахождении эксцентриситета.

Для определения критической угловой скорости вала решим уравнение (16) относительно неизвестной величины $\omega_{кр}$.

Получим биквадратное уравнение

$$\frac{G^2}{g^2} e_3^2 \omega^4 + 2 \frac{G}{g} e_3 \left(G \sin \omega t + F_{1r} \cos \omega t \right) \omega^2 + G^2 + F_{1r}^2 - \frac{E^2 I^2 e_3^2}{c^2 \ell^6} = 0. \quad (17)$$

Отсюда имеем выражение для критической частоты

$$\omega_{кр} = \frac{g \left(G \sin \omega t + F_{1r} \cos \omega t \right)}{G e_3} \left\{ -1 \pm \sqrt{1 - \frac{G^2 + F_{1r}^2 - \frac{E^2 I^2 e_3^2}{c^2 \ell^6}}{\left(G \sin \omega t + F_{1r} \cos \omega t \right)^2}} \right\}. \quad (18)$$

Из уравнения (18) видно, что перед знаком радикала необходимо брать знак плюс, так как угловая скорость в нашем случае – величина положительная. Очевидно, что первое слагаемое в фигурных скобках и первое слагаемое под знаком радикала существенного влияния на конечный результат величины критической угловой скорости вала с зубчатым колесом не окажет. Поэтому их можно не учитывать. Тогда выражение (18) можно записать после несложных преобразований

$$\omega_{кр} = \frac{g \sqrt{E^2 I^2 e_3^2 - c^2 \ell^6 \left(G^2 + F_{1r}^2 \right)}}{c \ell^3 G e_3}. \quad (19)$$

Из уравнения (19) видно, что критическая угловая скорость вала с круглым зубчатым колесом будет постоянной, так как радиальная сила F_r в зацеплении считается постоянной. При некруглом зубчатом колесе на валу радиальная сила F_{1r} в зацеплении, как видно из выражения (10), переменная. В результате критическая угловая скорость вала, она же вынужденная частота поперечных колебаний вала, будет изменяться непрерывно в течении каждого полного оборота вала. Периодичность этих дополнительных колебаний вала будет равна

$$\omega_j = j_1 \omega_{кр}, \quad (20)$$

где j_1 – количество максимальных значений радиуса центроиды ведущего некруглого колеса.

Известно [2], что собственная частота поперечных колебаний вала

$$\omega_c = \sqrt{\frac{cg}{G}}. \quad (21)$$

Сравним частоты ω_c и $\omega_{кр}$, разделив выражение (19) на (21), где $\omega_{кр}$ принимаем за вынужденные колебания

$$\frac{\omega_{кр}}{\omega_c} = \frac{\sqrt{g}}{\ell^3 e_3 c^{3/2} \sqrt{G}} \sqrt{E^2 I^2 e_3^2 - c^2 \ell^6 G^2 + F_{lr}^2}. \quad (22)$$

Из уравнения (22) видно, что изгибные частоты колебаний вала с некруглым зубчатым колесом вынужденные и собственные не совпадают и не кратны друг другу. Следовательно, резонанса этих частот не ожидается.

Полученные уравнения можно применить и в случае передачи круглыми зубчатыми колесами, положив в уравнении (11) $i(\phi_1) = 1/u$ (u – передаточное число передачи).

Для исследования влияния углов поворота ведущего некруглого колеса (при постоянной угловой скорости вала) на критическую частоту вращения и амплитуду прогиба обозначим $\omega t = \phi_1$ и с учетом этого запишем уравнения (15) и (18)

$$\omega_{кр} = \frac{g \left(G \sin \phi_1 + \frac{T_1 |1 + i \phi_1 \overline{\text{tg}} \alpha}{a_w i \phi_1 \underline{\cos} \beta} \cos \phi_1 \right)}{G e_3} \times$$

$$\times \left\{ -1 \pm \sqrt{1 - \frac{G^2 + \left[\frac{T_1 |1 + i \phi_1 \overline{\text{tg}} \alpha}{a_w i \phi_1 \underline{\cos} \beta} \right]^2 - \frac{E^2 I^2 e_3^2}{c^2 \ell^6}}{\left(G \sin \phi_1 + \frac{T_1 |1 + i \phi_1 \overline{\text{tg}} \alpha}{a_w i \phi_1 \underline{\cos} \beta} \cos \phi_1 \right)^2}} \right\}; \quad (23)$$

$$e_3 = \frac{c \ell^3}{EI} \sqrt{\left[\frac{G}{g} \omega^2 e_3 \right]^2 + G^2 + \left[\frac{T_1 |1 + i \phi_1 \overline{\text{tg}} \alpha}{a_w i \phi_1 \underline{\cos} \beta} \right]^2 +}$$

$$+2 \frac{G}{g} \omega^2 e_3 \left(G \sin \varphi_1 + \frac{T_1 |1 + i \varphi_1 \overline{\text{tg} \alpha}}{a_w i \varphi_1 \overline{\cos \beta}} \cos \varphi_1 \right). \quad (24)$$

Таким образом, получены уравнения для определения максимальных (критических) частот поперечных изгибных колебаний вала с зубчатым некруглым колесом с учетом упругого сопротивления вала при его постоянной угловой скорости. Такой случай наблюдаем с ведущем валом редуктора при круглых зубчатых колесах.

Установлено, что собственные и вынужденные частоты поперечных изгибных колебаний вала не совпадают и не кратны друг другу в случае передачи некруглыми зубчатыми колесами, что предупреждает резонанс этих колебаний.

Список литературы: 1. Н.Л. Утутов. Уравнительные зубчатые передачи. Монография. – Луганск: Изд-во ВУГУ, 1997. – 112с. 2. Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наукова думка, 1975. – 707с. 3. М.Н. Иванов. Детали машин. – М.: Высш. шк., 1991. – 383с.

