УДК 621.833

А.Ф.КИРИЧЕНКО, д-р. техн. наук, НТУ "ХПИ"
П.С.БЕСЧЕРЕВНЫХ, асп., НТУ "ХПИ"

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СТОЛБЦА СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ МАТРИЦЫ РИТЦА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НДС КОНИЧЕСКИХ ПРЯМЫХ ЗУБЬЕВ.

В запропонованій роботі будується алгоритм обчислення поверхневих інтегралів по плямі контакту.

This article describes problems building of algorithm calculation of surface integrals on stain of contact.

При решении задачи напряженно-деформированного состояния конического прямозубого зубчатого колеса неизбежно возникает проблема граничных условий. Для решения этой задачи методом Ритца естественные граничные условия сводятся к столбцу свободных членов системы Ритца.

В предложенной работе строится алгоритм вычисления поверхностных интегралов по пятну контакта.

Из [4] запишем систему Ритца в развернутом виде необходимую для программирования:

$$\begin{cases}
\sum\limits_{i+j+k=0}^{n}\left\{C_{ijk}^{x}\iiint\limits_{V}\left[(\eta+2)\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}+\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}+\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}\right]dV+\right.\\
\quad +C_{ijk}^{y}\iiint\limits_{V}\left[\eta\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}+\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\right]dV+\\
\quad \left.+C_{ijk}^{z}\iiint\limits_{V}\left[\eta\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}+\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\right]dV\right\}=\frac{1}{\mu}\iint\limits_{S}p\,f_{\alpha\beta\gamma}\cos(n,x)\,dS\\
\sum\limits_{i+j+k=0}^{n}\left\{C_{ijk}^{x}\iiint\limits_{V}\left[\eta\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}+\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}\right]dV+\right.\\
\quad +C_{ijk}^{y}\iiint\limits_{V}\left[\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}+(\eta+2)\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}+\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}\right]dV+\\
\quad \left.+C_{ijk}^{z}\iiint\limits_{V}\left[\eta\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial z}+\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial y}\right]dV\right\}=\frac{1}{\mu}\iint\limits_{S}p\,f_{\alpha\beta\gamma}\cos(n,y)\,dS\\
\sum\limits_{i+j+k=0}^{n}\left\{C_{ijk}^{x}\iiint\limits_{V}\left[\eta\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}+\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\right]dV+\right.\\
\quad +C_{ijk}^{y}\iiint\limits_{V}\left[\eta\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}+\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\right]dV+\\
\quad \left.+C_{ijk}^{z}\iiint\limits_{V}\left[\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}+\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}+(\eta+2)\frac{\partial f_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_{ijk}}{\partial x}\right]dV\right\}=\\
\quad =\frac{1}{\mu}\iint\limits_{S}p\,f_{\alpha\beta\gamma}\cos(n,z)\,dS
\end{cases}\qquad(1)$$

где C_{ijk}^{x}, C_{ijk}^{y}, C_{ijk}^{z} – компоненты неизвестных коэффициентов, которые будут определены из условия минимизации функционала Ритца;

$f_{ijk}=\omega_1(x,y,z)\,p_i(x)\,p_j(y)\,p_k(z)$ – координатные функции, построенные на основе полиномов Лежандра;

$p_i(x)$, $p_j(y)$, $p_k(z)$– полиномы Лежандра, имеющие следующий общий вид:

$$p_i(x)=\frac{1}{2^i\cdot i!}\sqrt{i+\frac{1}{2}}\cdot\frac{d^i\left[(x-x_o)^2-1\right]^i}{dx^i}$$

$$p_j(y)=\frac{1}{2^j\cdot j!}\sqrt{j+\frac{1}{2}}\cdot\frac{d^j\left[(y-y_o)^2-1\right]^j}{dy^j}$$

$$p_k(z)=\frac{1}{2^k\cdot k!}\sqrt{k+\frac{1}{2}}\cdot\frac{d^k\left[(z-z_o)^2-1\right]^k}{dz^k}$$

p – интенсивность распределенной нагрузки по пятну контакта.

$\eta = \dfrac{\lambda}{\mu}$, $\lambda = \dfrac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$ и $\mu = \dfrac{E}{2(1+\sigma)}$ - упругие постоянные Ляме (E - модуль упругости первого рода, σ - коэффициент Пуассона);

$\cos(\bar{n}, x), \cos(\bar{n}, y), \cos(\bar{n}, z)$ –направляющие косинусы внешней нормали.

В [5] смоделировано пятно контакта. Используя полученные уравнения, получим соотношения для вычисления правой части уравнений (1). Запишем соотношения для вычисления поверхностных интегралов по пятну контакта:

$$\begin{aligned}
&\iint_S p\, f_{\alpha\beta\gamma} \cos(\bar{n}, x)\, dS \\
&\iint_S p\, f_{\alpha\beta\gamma} \cos(\bar{n}, y)\, dS \\
&\iint_S p\, f_{\alpha\beta\gamma} \cos(\bar{n}, z)\, dS
\end{aligned} \tag{2}$$

Запишем уравнения поверхности контакта конического прямозубого зубчатого колеса:

$$\begin{cases} x(t, u) = (R_3 \cos(t - t_0) + x_{O3})(1 - u) \\ y(t, u) = (R_3 \sin(t - t_0) + y_{O3})(1 - u) \\ z(t, u) = L_e u \end{cases} \tag{3}$$

Для вычисления поверхностных интегралов найдем dS:

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, dt\, du \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
&E = R_3{}^2 (1 - u)^2; \\
&F = R_3 (1 - u)(x_{O3} \sin(t - t_0) - y_{O3} \cos(t - t_0)); \\
&G = R_3{}^2 + x_{O3}{}^2 + y_{O3}{}^2 + 2R_3 (x_{O3} \cos(t - t_0) + y_{O3} \sin(t - t_0))
\end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, подставляя (5) в (4), получим:

$$\begin{aligned}
dS = R_3 (1 - u)\big(&R_3{}^2 + x_{O3}{}^2 + y_{O3}{}^2 + 2R_3 x_{O3} \cos(t - t_0) + 2R_3 y_{O3} \sin(t - t_0) - \\
&- x_{O3}{}^2 \sin^2(t - t_0) - y_{O3}{}^2 \cos^2(t - t_0) + 2x_{O3} y_{O3} \sin(t - t_0) \cos(t - t_0)\big)^{\frac{1}{2}} dt\, du
\end{aligned} \tag{6}$$

Далее найдем направляющие косинусы нормали поверхности контакта зубчатого колеса:

$$\bar{n} = \frac{\bar{N}}{|N|} \tag{7}$$

где $\bar{N} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_t & y_t & z_t \\ x_u & y_u & z_u \end{vmatrix}$

Таким образом, проведя все вычисления в (5), получим:

$$\bar{n} = \left(\frac{L_e \cos(t - t_0)}{A}; \frac{L_e \sin(t - t_0)}{A}; \frac{R_3 + x_{O3} \cos(t - t_0) + y_{O3} \sin(t - t_0)}{A} \right) \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
A = \big(&L_e{}^2 + R_3{}^2 + 2R_3 (x_{O3} \cos(t - t_0) + y_{O3} \sin(t - t_0)) + 2x_{O3} y_{O3} \cos(t - t_0) \sin(t - t_0) + \\
&+ x_{O3}{}^2 \cos^2(t - t_0) + y_{O3}{}^2 \sin(t - t_0)\big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$k = 0{,}05m$ $l = 0{,}1m$

Для вычисления интегралов на ЭВМ выполним разбиение пятна контакта на $k = \left[\dfrac{b}{0{,}05m} \right]$ разбиений вдоль направляющей конической поверхности и на $l = \left[\dfrac{\Delta}{0{,}1m} \right]$ — вдоль образующей:

$$\begin{aligned}
&dt = \frac{\Delta}{l} \\
&du = \frac{b}{k},
\end{aligned} \tag{9}$$

где Δ – ширина площадки контакта, b – ширина зубчатого венца.

Подставляя (6), (8) и (9) в (2), получим уравнения для поверхностных интегралов, пригодных для использовании при написании программы на ЭВМ:

$$\iint\limits_S p\,f_{\alpha\beta\gamma}\cos(n,x)\,dS=\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{k-1}pf_{\alpha\beta\gamma}\frac{L_e\cos\left(i\cdot\frac{\Delta}{l}-t_0\right)}{A\left(i\cdot\frac{\Delta}{l},j\cdot\frac{b}{k}\right)}B\left(i\cdot\frac{\Delta}{l},j\cdot\frac{b}{k}\right)\frac{\Delta}{l}\frac{b}{k}$$

$$\iint\limits_S p\,f_{\alpha\beta\gamma}\cos(n,y)\,dS=\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{k-1}pf_{\alpha\beta\gamma}\frac{L_e\sin\left(i\cdot\frac{\Delta}{l}-t_0\right)}{A\left(i\cdot\frac{\Delta}{l},j\cdot\frac{b}{k}\right)}B\left(i\cdot\frac{\Delta}{l},j\cdot\frac{b}{k}\right)\frac{\Delta}{l}\frac{b}{k}\qquad(10)$$

$$\iint\limits_S p\,f_{\alpha\beta\gamma}\cos(n,z)\,dS=\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{k-1}pf_{\alpha\beta\gamma}\frac{R_3+x_{O3}\cos\left(i\cdot\frac{\Delta}{l}-t_0\right)+y_{O3}\sin\left(i\cdot\frac{\Delta}{l}-t_0\right)}{A\left(i\cdot\frac{\Delta}{l},j\cdot\frac{b}{k}\right)}\times$$

$$\times B\left(i\cdot\frac{\Delta}{l},j\cdot\frac{b}{k}\right)\frac{\Delta}{l}\frac{b}{k}$$

где

$$A(t,u)=\left[L_e^2+R_3^2+2R_3\left(x_{O3}\cos(t-t_0)+y_{O3}\sin(t-t_0)\right)+2x_{O3}y_{O3}\cos(t-t_0)\sin(t-t_0)+\right.$$

$$\left.+x_{O3}^2\cos^2(t-t_0)+y_{O3}^2\sin^2(t-t_0)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$B(t,u)=R_3(t-u)\left[R_3^2+x_{O3}^2+y_{O3}^2+2R_3x_{O3}\cos(t-t_0)+2R_3y_{O3}\sin(t-t_0)-\right.$$

$$\left.-x_{O3}^2\sin^2(t-t_0)-y_{O3}^2\cos^2(t-t_0)+2x_{O3}y_{O3}\sin(t-t_0)\cos(t-t_0)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Таким образом получены зависимости (10) для численного интегрирования поверхностных интегралов (2).

Список литературы: 1 Производство зубчатых колес// Справочник под ред. д.т.н., проф. Б. А. Тайца. Изд. Машиностроение, 2-е, переработанное. М:, 1975. 728с. 2. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М., Гос.изд. технико-теоретический литературы., 1950. 450с. 3. *Кириченко А.Ф., Бесчеревных П.С.* Геометрическое моделирование граничной поверхности области зуба прямозубого конического зубчатого колеса. Вестник ХГПУ №50. – Харьков, 1999. с.128-134. 4. *Кириченко А.Ф., Бесчеревных П.С.* Математическое моделирование торцевого профиля прямого зуба конического колеса. Вестник ХГПУ №85. – Харьков, 1999. с.108-117. 5. *Кириченко А.Ф., Бесчеревных П.С.* Моделирование пятна контакта в зацеплении прямозубых конических эвольвентных зубчатых колес. Вестник ХГПУ №109. – Харьков, 2000. с.143-149. 6. *Кириченко А.Ф., Бесчеревных П.С.* Об алгоритмизации задачи напряженно-деформированного состояния прямозубых конических зубчатых колес, решаемой методам Ритца с использованием R-функций. Вестник НТУ «ХПИ». №9. – Харьков, 2003. с.36-40.

Поступила в редакцию 20.05.05