

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ТРЕНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДОПУСКАЕМЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Запропоновано математичну модель напружено-деформованого стану поверхневого шару деталі. Вона дозволяє врахувати відмінність його фізико-механічних характеристик від властивостей основного матеріалу, що необхідно при уточненому визначенні допустимих напруг.

The mathematical model of stress-strain state of a surface stratum of a detail is offered. It allows take into account difference of its physicomchanical characteristics from of properties of the basic material, that it is necessary at the specified definition of supposed stress.

**Введение.** Актуальной проблемой современного машиностроения является снижение габаритов зубчатых передач при одновременном увеличении передаваемой мощности. Как показано в [1], одним из перспективных путей решения этой проблемы является уточнение допускаемых напряжений с учетом фактической геометрии зубьев, физико-механических свойств материалов и реальной картины усталостных разрушений.

Одним из факторов, который необходимо при этом учитывать, является состояние поверхностного (ПС) слоя детали. Это обусловлено следующими причинами [2]:

1. Структура и физико-механические свойства ПС-слоя могут существенно отличаться от свойств сердцевины (вследствие химико-термической обработки, поверхностного упрочнения и т.д.);

2. При механическом воздействии происходит изменение структуры (текстурирование) ПС-слоя. В результате изменяются его прочность и твердость, в нем возникают остаточные напряжения, различные дефекты в виде микротрещин и пор.

Все это приводит к существенным отличиям напряженно-деформированного состояния (НДС) ПС-слоя от НДС основного материала.

Целью данной статьи является разработка математической модели напряженно-деформированного состояния ПС-слоя с учетом особенностей его физико-механических характеристик, а также оценка его осадки и устойчивости.

**1. Общие положения.** ПС-слой находится в условиях сложного напряженного состояния, так как на него одновременно действуют касательные напряжения сдвига и кручения, а также нормальные напряжения растяжения-сжатия и продольного изгиба.

Реальную картину НДС ПС-слоя можно оценить по величине эквивалентных напряжений, определенных по IV энергетической гипотезе прочности С.П. Тимошенко:

$$\sigma_{экв.IV} = \sqrt{\sigma_{\Sigma}^2 + 3\tau_{\Sigma}^2},$$

где  $\sigma_{\Sigma}$  – нормальные суммарные напряжения в опасном сечении;  $\tau_{\Sigma}$  – суммарные касательные напряжения в опасном сечении. Опасным сечением будет сечение, где действует максимальное контактное напряжение  $q_{\max}$ .

Для проверки правильности определения величины  $\sigma_{\Sigma}$  можно воспользоваться зависимостью по определению нормальных средних напряжений в зонах контакта абсолютно жесткого шара с плоской поверхностью упруго деформированного материала (объемная модель Винклера) [3]:

$$\sigma_n = \frac{0,42E_{np}}{1-\nu_{np}^2} \sqrt{\frac{h}{R}},$$

где  $R$  – радиус шара-индентора;  $\nu_{np}$  – приведенный коэффициент Пуассона материала с ПС-слоем [4];  $E_{np}$  – приведенный модуль упругости материала с ПС-слоем [5];  $h$  – толщина зоны деформированного ПС-слоя.

ПС-слой также находится в условиях пластичности и ползучести, и поскольку они возникают при нестационарном внешнем нагружении, имеет смысл назвать их динамической ползучестью.

Расчет на динамическую ползучесть сводится к определению долговечности детали при известных или заданных температуре, эквивалентных напряжениях и граничной деформации.

Задавая граничной относительной деформацией  $\varepsilon$ , и используя кривую Велера для данной температуры, можно установить долговечность  $N$ , соответствующую характерному значению  $\sigma_{экв}$  или  $\sigma_{-1}$ . Аналогично решается и обратная задача – определение граничных напряжений по заданной долговечности  $N$  и граничной относительной деформации  $\varepsilon$ .

При упругих деформациях в зонах контакта с ПС-слоем число циклов до разрушения (циклическая долговечность) определяется по известной зависимости:

$$n = \left( \frac{\sigma_\epsilon}{\sigma_p} \right)^m,$$

где  $\sigma_\epsilon$  – предел прочности, МПа;  $\sigma_p$  – напряжение растяжения-сжатия, вызванные силами трения, МПа;  $m$  – показатель степени в классическом уравнении Велера, зависит от физико-механических свойств материала (например, для высоколегированных жаростойких конструкционных сталей  $m \approx 4$ , [5, 6]).

В случае пластического ненасыщенного контакта многократное пластическое деформирование вызывает изнашивание от малоциклового усталости. В этом случае число циклов до разрушения равно:

$$n = \left( \frac{2\epsilon_\epsilon}{\epsilon_t} \right)^m,$$

где  $\epsilon_\epsilon$  – деформация, соответствующая пределу прочности  $\sigma_\epsilon$ ;  $\epsilon_t$  – деформация, возникающая под действием сил трения.

При упругом ненасыщенном контакте  $\tau_n = \tau_0 + \beta \cdot q_{\max}$ , где  $\tau_0$  и  $\beta$  – фрикционные характеристики, зависящие от условий работы пары трения [7]. Получим основные показатели изнашивания, а именно коэффициент трения  $\mu$ , интенсивность износа  $I_h$ , удельное давление в зоне контакта  $q_{\max}$  в зависимости от параметров НДС и физико-механических характеристик:

$$\mu = 1,4 \left[ \frac{\tau_0 \alpha \sqrt{v_{np}^2}}{E_{np}} \right] + \beta; \quad I_h = \frac{1,5}{n\alpha} \left( \frac{h}{R} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad q_{\max} = 1,66 \left[ \frac{\tau_0 E_{np}}{\sqrt{v_{np}^2} \alpha} \right]^{\frac{1}{2}},$$

где  $\alpha$  – коэффициент, характеризующий напряженное и кинематическое состояние в зоне контакта,  $\alpha = f \sqrt{\sigma_{\text{экс}}}$ ;  $v$  – скорость скольжения в зоне контакта (для упругого ненасыщенного контакта рекомендуется  $\alpha \approx 0,887$  [6]);  $E_{np}, v_{np}$  – приведенные значения модули упругости и коэффициента Пуассона материала с ПС-слоем [7].

Если  $n \rightarrow \infty$ , что имеет место при поведении ПС-слоя, как квазивязкого тела, то  $\sigma_\epsilon \rightarrow 0$  (возможно

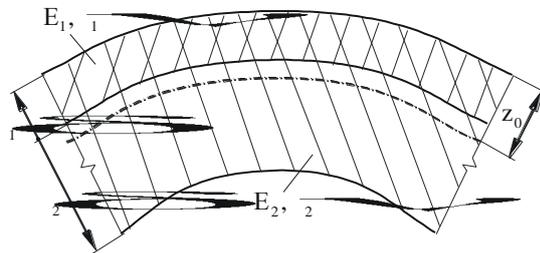


Рис. 1 – Расчетная схема для определения параметра  $z_0$

также одновременное стремление  $m \rightarrow +\infty$ ), т.е. ПС-слой переходит из упругой области в динамическую ползучесть.

Анализ такого рода изменений в трибосистемах с ПС-слоем требует более детального рассмотрения НДС.

**2. Анализ НДС ПС-слоя.** Исходя из гипотез Кирхгофа-Лява, можно сложные пространственные задачи анализа НДС конструктивно-ортотропных систем свести к двумерным, т.е. рассмотреть процесс деформирования поверхности приведения.

ПС-слой представляет собой конструктивно-ортотропную оболочку, поверхность приведения которой определяется параметром  $z_0$  (см. рис. 1).

Исходя из [8], параметр  $z_0$  определяется следующим образом:

$$z_0 = \frac{E_1 \delta_1^2 + 2E_2 \delta_1 \delta_2 + E_2 \delta_2^2}{2 \sqrt{E_1 \delta_1 + E_2 \delta_2}}. \quad (1)$$

Поверхность приведения находится в верхнем слое, если  $E_1 \delta_1^2 > E_2 \delta_2^2$ , или в нижнем слое, если  $E_1 \delta_1^2 < E_2 \delta_2^2$ , и совпадает с поверхностью раздела фаз, если  $E_1 \delta_1^2 = E_2 \delta_2^2$ . Это обстоятельство и определяет физический смысл условия приведения Вилларсо.

В качестве системы координат, определяющей положение точки на поверхности приведения, выберем ортогональную систему криволинейных координат  $\alpha_1, \alpha_2$ , координатные линии которые совпадают с линиями кривизны поверхности приведения. Расположение волокон по толщине будем определять

расстоянием  $z$  от поверхности приведения, причем оно будет положительным, если волокно расположено со стороны внешней нормали.

Относительные удлинения и сдвиги поверхности приведения обозначим через  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega = 2\varepsilon_3$ , изменения кривизны и кручение поверхности приведения – через  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ . Эти параметры полностью определяют деформированное состояние двухслойной оболочки и выражаются через компоненты перемещения вдоль координатных линий  $U, V$  и по внешней нормали  $\omega$  известными формулами [8].

Напряженное состояние оболочки ПС, возникающее в нормальных сечениях, описывается вполне определенными функциями координаты  $z$  независимо от структуры оболочки ПС-слоя по толщине. Суммируя напряжения по толщине оболочки, систему напряжений можно заменить статически эквивалентной системой усилий и моментов  $T_1, T_2, S, G_1, G_2, H_1, H_2$  и, таким образом, расчет оболочки сводится к задаче изучения равновесия и деформирования поверхности приведения. Независимо от структуры оболочки ПС-слоя усилия и моменты удовлетворяют обычным уравнениям равновесия, которые используются в теории тонких однородных оболочек.

Уравнения равновесия двухслойной системы содержащей наружный ПС-слой и внутреннюю базовую поверхность, запишем так:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( A_2 T_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( A_1 S \right) - T_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + S \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \frac{Q_1}{R_1} + A_1 A_2 X = 0; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( A_1 T_2 \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( A_2 S \right) - T_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + S \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - A_1 A_2 \frac{Q_2}{R_2} + A_1 A_2 Y = 0; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( A_2 Q_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( A_1 Q_2 \right) + A_1 A_2 \left( \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} \right) - A_1 A_2 Z = 0; \\ \frac{\partial A_2 G_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( A_1 H_2 \right) - G_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + H_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 Q_1 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( A_1 G_2 \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( A_2 H_1 \right) - G_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + H_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - A_1 A_2 Q_2 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $X, Y, Z$  – компоненты поверхностной нагрузки;  $A_1, A_2$  – параметры Лямэ (показатели анизотропии во взаимоперпендикулярных площадях);  $R_1, R_2$  – наименьшие радиусы кривизны во взаимоперпендикулярных плоскостях. Экспериментально показатели анизотропии  $A_1$  и  $A_2$  наиболее точно определяются с помощью Фурье-анализа [7, 9].

Для определения постоянных интегрирования используем граничные условия, исходя из совпадения граничного контура с координатными линиями.

Например, если граничным контуром есть линия  $\alpha_1 = \text{const}$ , то имеют место следующие граничные условия:

а) когда край свободен:

$$T_1 = S = Q_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} = G_1 = 0; \quad (3)$$

б) когда край жестко заделан:

$$U = V = W = \frac{1}{A_1} \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - \frac{U}{R_1} = 0; \quad (4)$$

в) когда край неподвижно оперт:

$$U = V = W = G_1 = 0, \quad (5)$$

и т.д.

Определив, таким образом, компоненты перемещения  $U, V, \omega$ , находим дальше упругие усилия и моменты:

$$\begin{cases} T_1 = \bar{E}_1 \delta_1 \epsilon_1 + \nu \bar{E}_2 \epsilon_2 \\ T_2 = \bar{E}_1 \delta_1 \epsilon_2 + \nu \bar{E}_1 \epsilon_1 \\ S = \bar{E}_1 \delta_1 \epsilon_3 - \nu \bar{E}_3 \epsilon_3 \\ G_1 = -\frac{\bar{E}_1 \delta_1^3}{12} \xi_1 + \nu \bar{E}_2 \xi_2 \\ G_2 = -\frac{\bar{E}_1 \delta_1^3}{12} \xi_2 + \nu \bar{E}_1 \xi_1 \\ H = -\frac{\bar{E}_1 \delta_1^3}{12} \xi_3 - \nu \bar{E}_3 \xi_3, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\bar{E} = E_1 / (1 - \nu^2)$  – эффективный модуль упругости ПС-слоя.

Далее определим компоненты деформации ПС-слоя:

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{1}{B} T_1 - \nu_{np} T_2 \\ \epsilon_2 = \frac{1}{B} T_2 - \nu_{np} T_1 \\ \epsilon_3 = \frac{1}{B} S \\ \xi_1 = -\frac{1}{D} G_1 - \nu_{np} G_2 \\ \xi_2 = -\frac{1}{D} G_2 - \nu_{np} G_1 \\ \xi_3 = -\frac{1}{D} H \end{cases} \quad (7)$$

В системе (7) введены следующие параметры:  $\nu_{np}$  – приведенный коэффициент Пуассона,

$$\nu_{np} = \frac{\nu_1 \bar{E}_1 \delta_1 + \nu_2 \bar{E}_2 \delta_2}{E_1 \delta_1 + E_2 \delta_2}; \quad (8)$$

$B$  – приведенная жесткость двухслойной системы при растяжении-сжатии,

$$B = \frac{E_1 \delta_1 + E_2 \delta_2}{1 - \nu_{np}^2}; \quad (9)$$

$D$  – приведенная жесткость двухслойной системы при изгибе,

$$D = \frac{E_1^2 \delta_1^4 + 4E_1 E_2 \delta_1^3 \delta_2 + 6E_1 E_2 \delta_1^2 \delta_2^2 + 4E_1 E_2 \delta_1 \delta_2^3 + E_2^2 \delta_2^4}{12(E_1 \delta_1 + E_2 \delta_2)}. \quad (10)$$

Определить компоненты деформации ПС-слоя можно также через компоненты перемещений  $U, V, \omega$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} + \frac{V}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{W}{R_1}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} + \frac{U}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{W}{R_2}; \\ 2\varepsilon_3 &= \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{V}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{U}{A_1} \right); \\ \xi_1 &= -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - \frac{U}{R_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} - \frac{V}{R_2} \right); \\ \xi_2 &= -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} - \frac{V}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left( \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - \frac{U}{R_1} \right); \\ \xi_3 &= -\frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_1} \left( \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \alpha_2} - \frac{U}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} - \frac{V}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right). \end{aligned} \right. \quad (11)$$

После определения компонент деформации поверхности приведения переходим к определению напряжений в нормальных сечениях двухслойной системы согласно обобщенному закону Гука с учетом гипотез Кирхгофа-Лява в верхнем слое (ПС-слое) системы:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_1^{\text{н}} &= \bar{E}_1 \varepsilon_1 + \nu_1 \varepsilon_2 + z \varepsilon_3 + \nu_1 \xi_2 \\ \sigma_2^{\text{н}} &= \bar{E}_1 \varepsilon_2 + \nu_1 \varepsilon_1 + z \varepsilon_3 + \nu_1 \xi_1 \\ \tau^{\text{н}} &= \bar{E}_1 \varepsilon_3 - \nu_1 \xi_3 + z \xi_3 \end{aligned} \right. \quad (12)$$

в нижнем основании системы:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_1^{\text{н}} &= \bar{E}_2 \varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2 + z \varepsilon_3 + \nu_2 \xi_2 \\ \sigma_2^{\text{н}} &= \bar{E}_2 \varepsilon_2 + \nu_2 \varepsilon_1 + z \varepsilon_3 + \nu_2 \xi_1 \\ \tau^{\text{н}} &= \bar{E}_2 \varepsilon_3 - \nu_2 \xi_3 + z \xi_3 \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Таким образом, создана математическая модель НДС ПС-системы, что позволяет определить компоненты деформаций и напряжений во внешнем ПС-слое и во внутренней основе такой системы.

### 3. Определение радиальной осадки ПС-слоя и оценка его устойчивости на поверхности трения.

Определение радиальной осадки ПС-слоя под действием нормальной радиальной нагрузки можно определить, исходя из модели Винклера [9], позволяющей считать ПС-слой упругой балкой, лежащей на квазижестком основании при постоянстве напряжений сжатия в радиальном направлении по толщине слоя и отсутствии других компонентов напряжений.

При этом получается простейшая зависимость перемещений от удельных давлений на поверхности упругого слоя [9]:

$$U_\varphi = \frac{q_\varphi \cdot h_2}{E_2}, \quad (14)$$

где  $q_\varphi$  – нормальное поверхностное давление;  $h_2$  – толщина ПС-слоя;  $E_2$  – модуль упругости материала ПС-слоя (см. рис. 2).

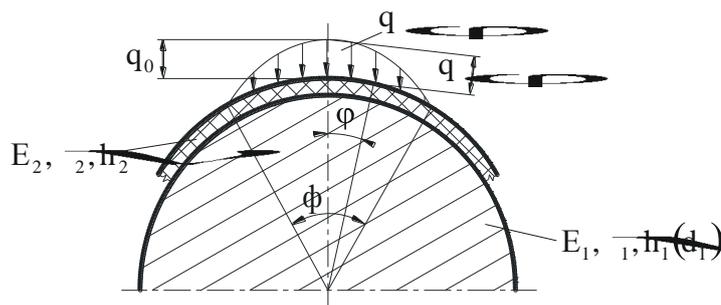


Рис. 2 – Расчетная схема для определения радиальной осадки ПС-слоя

К аналогичному решению можно прийти, исходя из решения [10].

В.З. Власов и Н.И. Леонтьев в работе [11] подвергли критике модель Винклера, однако привели график, из которого следует, что при определении осадки поверхности применение этой модели приводит к незначительным погрешностям.

Д.С. Коднир, используя интегральное преобразование Фурье, получил более общее решение [12]:

$$U_{\varphi} = \frac{2 \sqrt{1-\nu_2^2}}{\pi E_2} P \cdot \Phi \left[ \frac{\varepsilon-x}{2h} \right], \quad (15)$$

где  $P$  – сосредоточенная нормальная нагрузка;  $\Phi \left[ \frac{\varepsilon-x}{2h} \right]$  – интегральная функция, для которой в упомянутой работе [12] приводится таблица численных значений.

Переходя от сосредоточенной нагрузки к распределенной, автор работы [12] получил следующее выражение для определения радиальной осадки:

а) для случая, когда материал слоя может свободно растекаться:

$$U_{\varphi} = \frac{q_{\varphi} \cdot h_2}{E_2} \sqrt{1-\nu_2^2}; \quad (16)$$

б) для случая, когда перемещения материала вдоль слоя отсутствуют:

$$U_{\varphi} = \frac{q_{\varphi} h_2}{E_2} \cdot \frac{\sqrt{1-2\nu_2} + \sqrt{1+\nu_2}}{1-\nu_2}. \quad (17)$$

Авторы считают, что в действительности имеет место промежуточный случай для ПС-слоя, т.е. можно принять:

$$U_{\varphi} = \frac{q_{\varphi} \cdot h_2}{E_2} \cdot \frac{2 \sqrt{1-\nu_2^2}}{\pi}. \quad (18)$$

В первом приближении можно считать, что закон распределения давлений  $q_{\varphi}$  – косинусоидальный, как показано в [8, 9]:

$$q_{\varphi} = q_0 \cos k\varphi, \quad (19)$$

где  $k = \pi/2\phi$ ;  $q_0$  – давление в центре площадки контакта.

Величину максимального давления  $q_0$  можно найти из формулы для расчета произвольного усилия  $F_r$ , передаваемого на ПС-слой:

$$F_r = 2rbq_0 \int_0^{\phi} \cos \varphi \cos k\varphi d\varphi, \quad (20)$$

где  $r$  – радиус диска-индентора;  $b$  – его ширина;  $\phi$  – угол распределенной нагрузки;  $\varphi$  – текущее значение угла распределенной нагрузки.

После интегрирования (20), и, решая равенство относительно  $q_0$ , получаем его значение:

$$q_0 = \frac{F_r \sqrt{1-\nu_2^2}}{2rbk \cos \phi}, \quad (21)$$

где  $F_r$  можно определить по известной зависимости:

$$F_r = \frac{2M \operatorname{tg}(\alpha + \rho')}{2r}, \quad (22)$$

где  $M$  – момент внешней нагрузки;  $\alpha$  – угол давления;  $\rho'$  – угол трения ( $\rho' \approx 5^\circ$ ).

Подставляя значение  $q_{\varphi}$  в выражение для  $U_{\varphi}$  (15), при  $\varphi=0$  и  $k = \pi/2\phi$  получаем максимальное значение радиальной осадки ПС-слоя в центре площадки контакта  $U_0$ :

$$U_0 = \frac{F_r \sqrt{1-\nu_2^2} h_2 \sqrt{1-\nu_2^2}}{rbkE_2 \cos \phi \pi}. \quad (23)$$

Таким образом, нам удалось определить величины  $U_0$ ,  $q_0$ ,  $F_r$ , а также общий закон распределения давлений по дуге контакта  $q_{\varphi}$ , опираясь на модель Винклера. Погрешность в определении указанных величин не превышает 2...3%, как следует из [12].

Поскольку величина осадки существенным образом зависит от радиального усилия, а по линии контакта это усилие изменяется по линейному закону, то создаются условия для перемещения ПС-слоя из области больших радиальных усилий в область меньшего радиального усилия.

При равномерном осевом сжатии  $F_a$  (при преобладающем влиянии радиальных усилий  $F_r$ ) элемента двухслойной системы на некотором удалении от торцов прогиб будет постоянным по длине и,

следовательно, при возрастании осевой нагрузки  $F_a$  может наступить потеря устойчивости системы, т.е. двухслойная система начинает выпучиваться и один слой начинает отделяться от другого.

Это приведет к отсутствию условия совместности деформации и, строго говоря, к разрушению конструктивно-ортотропной системы (в принципе ПС-слой может отделиться от основы).

Предположим, что при отделении ПС-слоя от основы волнообразование на поверхности раздела двух поверхностей является осесимметричным.

Дифференциальное уравнение, описывающее осесимметричную форму потери устойчивости двухслойной системы при совместном действии радиальной и осевой составляющей нагрузки, имеет вид:

$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 2\beta^2 \frac{d^2 \omega}{dx^2} + \alpha^4 = -\frac{B_1 T}{B_1 D_1 - A_1^2} \cdot \frac{d^2 \omega}{dx^2}, \quad (24)$$

где  $\alpha^4$ ,  $\beta^2$  определяются выражениями:

$$\alpha^4 = \frac{B_1 B_2 - \nu^2 B^2}{D_1 D_1 - A_1^2 R^2}; \quad \beta^2 = \frac{\nu B A_1}{D_1 D_1 - A_1^2 R^2},$$

где  $A_1$  – параметр взаимного влияния изгибных сдвиговых и сжимающих деформаций,  $A_1 = E_1 S_1 / l_1$ ;  $S_1$  – сдвиговое внутреннее усилие;  $R$  – радиус срединной поверхности системы;  $B_1$  – жесткость системы в направлении сдвиговых и сжимающих деформаций,  $B_1 = B + E_1 F_1 / l_1$ ;  $B_2$  – жесткость системы в направлении изгибных деформаций,  $B_2 = B + E_2 F_2 / l_1$ ;  $D_1$  – приведенная цилиндрическая жесткость при изгибе в направлении сдвиговых и сжимающих деформаций,  $D_1 = D + E_1 I_{x1} / l_1$ .

При малой толщине ПС-слоя можно принять  $l_1 \approx l_2$ .

Характеристическое уравнение – решение дифференциального уравнения (24) найдем в виде:

$$\omega = A \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (25)$$

Решая дифференциальное уравнение (24) в виде (25) относительно величины критической нагрузки  $T_{кр}$ , получаем формулу:

$$T_{кр} = \left( D_1 - \frac{A_1^2}{B_1} \right) \left[ \frac{m\pi/l}{\alpha} + \frac{\alpha^4}{m\pi/l} - 2\beta^2 \right], \quad (26)$$

где целочисленный параметр  $m=1, 2, 3, \dots$  выбирается из условия минимума правой части.

Нетрудно показать, что критическое значение параметра  $m\pi/l_{кр} = \alpha$ , и, следовательно, длина полуволны при осесимметричном выпучивании границы раздела компонентов системы определяется выражением:

$$\frac{l}{m} = \pi \sqrt[4]{\frac{D_1 D_1 - A_1^2 R^2}{B_1 B_2 - \nu^2 B^2}}. \quad (27)$$

Ранее, авторами [13], для определения критической осевой нагрузки конструктивно-ортотропной системы при осесимметричной форме потери устойчивости была получена такая формула:

$$T_{кр} = \frac{2}{R} \sqrt{B_2 D_1 - \nu_1 \nu_2}. \quad (28)$$

Зависимость (28) получается из (26) с учетом свойств конструктивно-ортотропных систем и приведенных характеристик прочности и жесткости.

Таким образом, получена зависимость для определения критической нагрузки, превышение которой может привести к отделению ПС-слоя от основного материала.

Отметим, что оценка радиальной осадки ПС-слоя и его устойчивости по вышеизложенной методике является приближенной, так как деталь представлена в виде двухслойной конструкции. В тоже время в [2] показано, что ПС-слой состоит из трех частей (верхняя часть – адсорбированные частицы рабочей среды, второй слой состоит из оксидов, а третий – из кристаллитов, подвергшихся изменениям под действием пластической деформации и температуры). При этом неоднородность и анизотропия материала поверхностного слоя не позволяют использовать для его описания классические теории (упругости, пластичности, усталости и др.). Однако в первом приближении рассмотренное в статье моделирование ПС-слоя представляется вполне допустимым.

**Выводы.** Показана необходимость учитывать НДС ПС-слоя детали при уточненном определении допустимых напряжений. Для решения этой задачи создана математическая модель НДС ПС-слоя, а также получены зависимости для определения его усадки и критической нагрузки. Полученные результаты в

дальнейшем могут быть использованы при разработке математической модели деформируемого тела [1], подверженного переменным нагрузкам и находящегося в условиях контактного и триботехнического воздействия.

**Список литературы:** 1. Кириченко А.Ф., Устиненко А.В. К вопросу об определении допускаемых напряжений при расчете зубчатых передач // Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. – Харьков, 2003. – №8. – Т.2. – С.20–22. 2. Приймаков А.Г., Устиненко А.В. К вопросу о рациональном выборе допускаемых напряжений в машиностроении. – *Механіка та машинобудування*. – 2004. – №2. – С.57–62. 3. Биргер И.А., Шор Б.Ф., Иосилевич И.В. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. – М.: Машиностроение, 1979. – 702с. 4. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712с. 5. Демаков И.П., Балагезан Ю.Г. Оптимизация испытаний на надежность и обработка их результатов. – М.: Машиностроение, 1979. – 56с. 6. Приймаков О.Г. Втомленість авіаційних конструкцій та засоби її попередження. // *Інтегральні технології та енергозбереження*. – 2002. – №1 – С.32–41 7. Приймаков О.Г., Лисяк О.О., Приймаков Г.О. Прогнозування надійності та довговічності авіаційної техніки // *Вестник науки и техники*. – 2003. – №1. – С.12–19. 8. Королев В.И. Упруго-пластические деформации пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1971. – 302с. 9. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругости анизотропных оболочек. – К.: Машиностроение, 1980. – 214с. 10. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576с. 11. Власов В.З., Леонтьев Н.И. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 491с. 12. Коднир Д.С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. – М.: Машиностроение, 1976. – 304с. 13. Приймаков А.Г., Рудницкий В.И. Определение приведенного модуля упругости двухслойного металлополимерного гибкого колеса волновой зубчатой передачи. // *Динамика и прочность машин*. – Харьков, 1984. – Вып.39. – С.49–51.

*Поступила в редакцию 20.12.2004*