УДК 621.833

В.Н. СТРЕЛЬНИКОВ, канд.техн.н.; ЗАО «НКМЗ», г. Краматорск

НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГОВЫХ ЗУБЬЕВ

Вирішено задачу теорії пружності про пласко – деформований стан кругових зубів передач із проміжними тілами катиння.

The flat problem of the theory of elasticity is solved is intense - the deformed condition of a teeth of a circular structure.

Тенденция роста нагрузок, быстроходности, долговечности, снижения массы передач, повышает значимость задачи о прочности зубьев, требует глубокого и достоверного изучения распределения напряжений. Местные напряжения, возникающие в зубе при изгибе, можно определить численным методом или экспериментально [1]. В работе [2] показано, что основными видами деформации зуба у основания является не только изгиб, но и сдвиг, торсионный изгиб и смещение, что не отражается в расчётных методиках.

Основными задачами данного исследования являются: разработка расчётной модели с оптимальной аппроксимацией зуба; вывод уравнений упругости плоскодеформированного состояния зуба в биполярных координатах. Распределение нагрузки по контуру поперечного сечения определяется из решения контактной задачи и аппроксимируется параболой, на основе чего решается граничная задача прочностного расчета зуба. Параметрами определяющими внешнюю нагрузку являются максимальное давление P_0 и протяженность дуги контакта по контуру зуба в его поперечном сечении.

Выделим из массива зуб цилиндрической поверхностью радиуса R' (рис. 1). Сечение зуба ограничено замкнутым контуром, образованным дугами окружностей боковых поверхностей с радиусом r_1 и радиусом R_1 очерчивающим окружность вершин. Зададим радиус R_1^* центров образующих окружностей, число зубьев z_1 сателлита и определим угловые шаги λ_1. Радиусы окружностей R' получаются геометрическим построением. Взаимодействие зуба с массивом рассматриваем как заделку [3].

Граничную задачу о прочности зуба решаем в биполярных координатах, где координатными линиями являются окружности. Выберем систему координат, для которой окружности радиусов r_1 и R' будут координатными линиями, а окружности с радиусами R_1 заменением близкими к ним координатными линиями. На оси абсцисс координатной плоскости $X0Y$ симметрично относительно начала координат расположим полюсы O' и $0''$, расстояние между ними равно $2a$ (рис. 2).

Из полюсов в точку плоскости $X0Y$ проведем радиусы ρ_1 и ρ_2. Задание абсолютных величин ρ_1 и ρ_2 не определяет однозначно положение точки M на плоскости: для заданных ρ_1 и ρ_2 получаются две точки симметрично относительно оси абсцисс.

Неоднозначность устраним введя биполярные координаты α и β. За координату α примем $\alpha = ln\frac{\rho_1}{\rho_2}$. Правой полуплоскости $X0Y$ соответствуют положительные

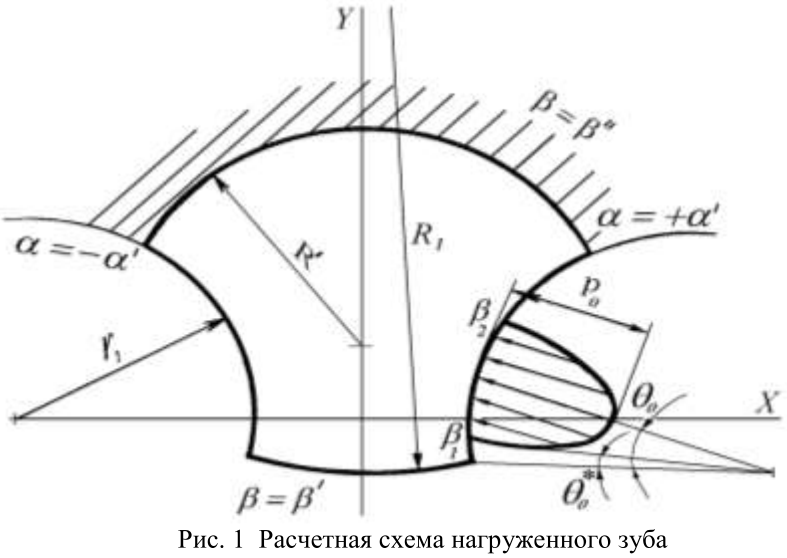

Рис. 1 Расчетная схема нагруженного зуба

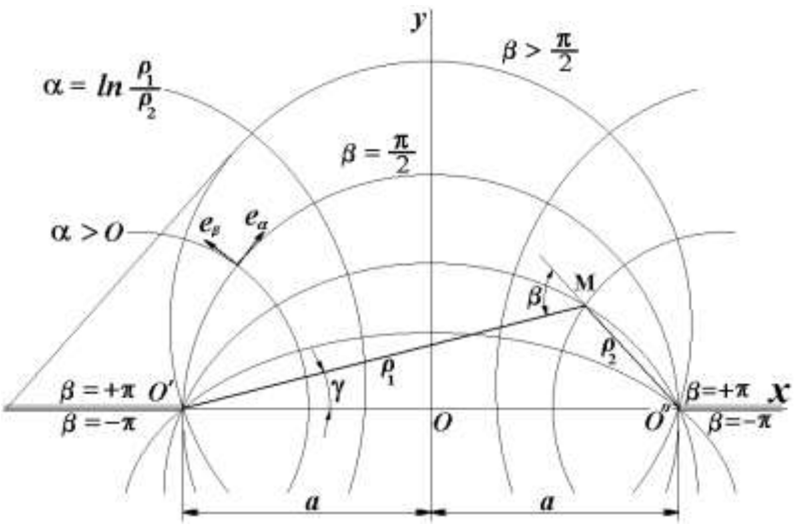

Рис. 2 Координатные линии биполярной системы координат

значения α, левой – отрицательные. Координата β - внешний угол треугольника $0'0''M$, отсчитанный от продолжения радиуса r_2 до r_1, $|\beta|<180°$. Верхней полуплоскости соответствуют положительные значения углов β, нижней – отрицательные. Однозначность нарушается на оси абсцисс при $|X|\geq a$. Вдоль линий $Y=0$ при $X\leq -a$ и $X\geq a$ следует сделать разрезы. Верхним берегам разрезов соответствуют значения $\beta=\pi$, нижним $\beta=-\pi$. Выразим радиусы ρ_1 и ρ_2 через координаты α и β

$$\rho_1=\rho_2\cdot e^{\alpha},\ \ \rho_1=\frac{2ae^{\alpha}}{\sqrt{e^{2\alpha}+1+2e^{\alpha}\cos\beta}},\ \ \rho_2=\frac{2a}{\sqrt{e^{2\alpha}+1+2e^{\alpha}\cos\beta}}\ . \tag{1}$$

Из треугольника $0'0''M$ находим: $\rho_1\cos\gamma = X+a.$ Установим зависимость между декартовыми и биполярными координатами

$$X=\frac{a\cdot Sh\,\alpha}{Ch\,\alpha+\cos\beta},\qquad Y=\frac{a\cdot\sin\beta}{Ch\,\alpha+\cos\beta}. \tag{2}$$

Формулы (2) определяют уравнения координатных линий в параметрической форме, если в них поочередно полагать $\alpha = const$ или $\beta = const$. Найдем уравнения координатных линий в явной форме. Из (2): $\sin\beta=\frac{Y}{X}sh\,\alpha,\ \cos\beta=\frac{a}{X}Sh\,\alpha-Ch\,\alpha.$
Исключим параметр β и получим уравнение окружности

$$\left(X-a\frac{Ch\,\alpha}{Sh\,\alpha}\right)^2+Y^2=\frac{a^2}{Sh^2\alpha}\ . \tag{3}$$

Из уравнения (3) следует, что центры окружностей $\alpha=const$ расположены на оси X, имеют координаты $\left(a\cdot\frac{Ch\,\alpha}{Sh\,\alpha};0\right)$ и радиусы $R_{\alpha}=\frac{a}{Sh\,\alpha}$. Полагаем $\beta=const$, из (2) исключим α, находим: $Sh\,\alpha=\frac{X}{Y}Sin\,\beta$, $Ch\,\alpha=\frac{a\cdot\sin\beta}{Y}-\cos\beta$, исключаем α

$$X^2+(Y+a\cdot ctg\,\beta)^2=\frac{a^2}{\sin^2\beta}\ . \tag{4}$$

Координатные линии $\beta = const$ – окружности (4) с центрами на оси Y, имеют координаты $(0;\,-a\,Ctg\,\beta)$ и радиусы $R_{\beta}=\frac{a}{\sin\beta}$.

Координатные линии проходят через полюсы биполярной системы координат. Для доказательства в уравнении (4) семейства линий надо положить $Y = 0$, получаем $X = \pm a$. Через каждую точку плоскости с координатами $(\alpha;\ \beta)$ проходит пара ортогональных координатных линий α=const; β = const. Для доказательства ортогональности координатных линий, определим угловые коэффициенты касательных K_{α} и K_{β} к линиям $\alpha = const$ и $\beta = const$, в точке их пересечения

$$K_{\alpha}=\frac{Y'_{\beta}}{X'_{\beta}}=\frac{(1+Ch\,\alpha\cdot\cos\beta)}{Sh\,\alpha\cdot\sin\beta}\ ,\ \ K_{\beta}=\frac{Y'_{\alpha}}{X'_{\alpha}}=-\frac{\sin\beta\cdot Sh\,a}{(1+Ch\,\alpha\cdot\cos\alpha)}\ . \tag{5}$$

Из формул (5) следует условие ортогональности координатных линий $K_{\alpha}\cdot K_{\beta}=1.$

Вдоль линий β = *const* и α = *const* направим орты $\vec{e}_\alpha$ и $\vec{e}_\beta$. Связь между приращением криволинейной координаты и дифференциалом дуги координатной
линии определяется коэффициентами Ляме: $dS_\alpha = H_\alpha \cdot d\alpha$, $dS_\beta = H_\beta \cdot d\beta$.

$$H_\alpha = \sqrt{(X'_\alpha)^2 + (Y'_\alpha)^2}\ , \qquad H_\beta = \sqrt{(X'_\beta)^2 + (Y'_\beta)^2}\ . \qquad (6)$$

Подставим в выражения (6) значения X'_α, X'_β, Y'_α, Y'_β

$$H_\alpha = H_\beta = H = \frac{a}{Ch\,\alpha + \cos\beta}\ . \qquad (7)$$

В соответствии с значениями (6, 7) найдем частные производные

$$\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha} = -\frac{H}{R_\beta} \cdot \vec{e}_\beta\ ; \quad \frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial \alpha} = \frac{H}{R_\beta} \cdot \vec{e}_\alpha\ ; \quad \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \beta} = -\frac{H}{R_\alpha} \vec{e}_\beta\ ; \quad \frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial \beta} = \frac{H}{R_\alpha} \vec{e}_\alpha\ . \qquad (8)$$

В точках O'_1, O''_2 пересечения этих лучей с окружностью радиуса R^*_1 получим центры O'_1 и O'_2 образующих окружностей зубьев сателлита радиуса r_1 (рис. 3).

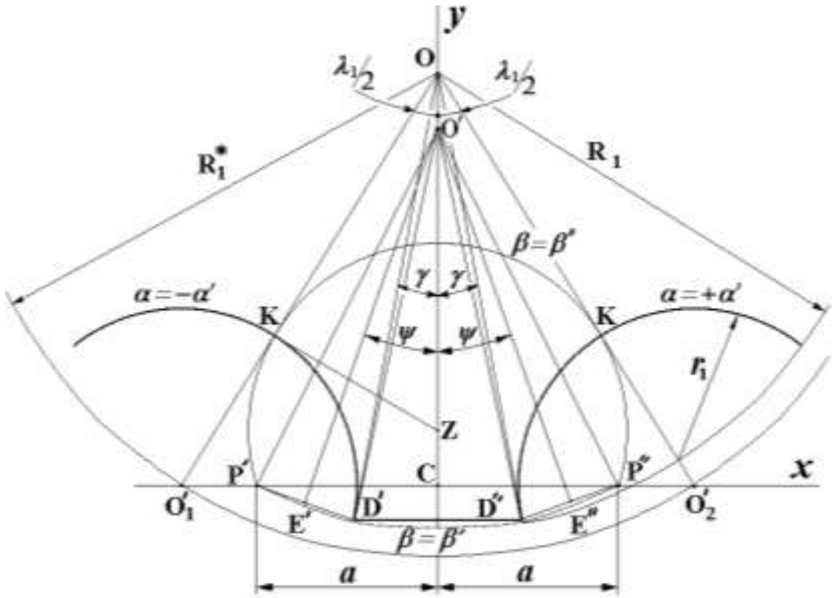

Рис. 3

Аппроксимация профиля зуба сателлита

Эти кружности принимаем за координатные линии $\alpha = -\alpha'$ и $\alpha = +\alpha'$ биполярных координат. Из точки *к* пересечения луча, проведенного под углом $\lambda_1/2$ из центра о С образующей зуба сателлита проведем касательную до пересечения с осью *y* в точке *z*. Радиусом *kz* проводим в массиве дугу окружности. Находим на оси *x* точки *p′* и *p″*. Если точки *p′* и *p″* принять за полюсы, то дуга окружности радиуса *kz*=*r′* будет координатной линией $\beta=\beta''$. Определим половину межполюсного

Расстояния *p′c* = *a*. Смещение центра окружности $\beta=\beta''$ имеющей радиус *r′*

$$CZ = \frac{r_1 - R_1^* \cdot \sin^2 \lambda_1/2}{\cos\lambda_1/2}\ , \quad R' = (R_1^* - r_1) tg\lambda_1/2\ . \qquad (9)$$

Запишем уравнение этой окружности

$$X^2 + \left(Y - \frac{r_1 - R_1^* \sin^2 \lambda_1/2}{\cos\lambda_1/2} \right)^2 = (R_1^* - r_1)^2 \cdot tg^2 \lambda_1/2\ . \qquad (10)$$

Половину межполюсного расстояния найдем полагая в уравнении (10) *y=0, x = a*

$$a = \sqrt{R_1^{*2} \sin^2 \lambda_1/2 - r_1^2}\ . \qquad (11)$$

Определяем параметр координатной линии β″, $\sin\beta'' = \dfrac{a}{KZ}$. Подставим значения *KZ* и *a* по формулам (9) и (11) в полученную выше формулу

$$\beta'' = \arcsin\left(\frac{\sqrt{R_1^{*2} \cdot \sin^2 \lambda_1/2 - r_1^2}}{(R_1^* - r_1) tg\,\lambda_1/2} \right). \qquad (12)$$

Угол β' выбирается больше $90°$. Для получения координатной линии $\beta = \beta'$, радиусом R_1 строим окружность. На пересечении с окружностями радиусов r_1 точки D', D'' соответствуют кромкам зуба. Отрезок PD' делим пополам и к середине восстанавливаем перпендикуляр. Точка O' пересечения перпендикуляра с осью Y является центром окружности координатной линии $\beta = \beta'$. Радиусом $R'_\beta = 0'P'$ проводим окружность. Окружность β' аппроксимирует линию выступов. Определим параметр β'. Точка D' на пересечении окружностей радиусов R_1 и r_1. Запишем уравнения этих окружностей

$$X^2 + (Y - R_1^* \cos\lambda_1/2)^2 = R_1^2, \quad (X - R_1^* \sin\lambda_1/2)^2 + Y^2 = r_1^2. \qquad (13)$$

Из разности уравнений (13) определяем угол γ

$$\cos(\lambda_1/2 - \gamma) = \frac{R_1^2 - r_1^2 + R_1^{*2}}{2R_1R_1^*}. \qquad (14)$$

Посредством координат точки E'' и апофемы O_1E'' определим угол ψ и радиус $R_{\beta'}$

$$\sin\psi = \frac{R_1 \cdot \cos\gamma - R_1^* \cos\lambda_1/2}{\sqrt{(R_1\cos\gamma - R_1^*\cos\gamma_1/2) + (a - R_1 \cdot \sin\gamma)^2}}, \qquad (15)$$

$$R_{\beta'} = \frac{1}{2\sin\psi}\sqrt{(R_1\sin\gamma + a)^2 + (R_1\cos\gamma - R_1^*\cos\lambda_1/2)^2}. \qquad (16)$$

Вычисляем параметры β ' и α': $\beta' = arcsin\left(\frac{a}{R_{\beta'}}\right)$, $Sh\,\alpha' = \frac{a}{R_\alpha}$, получим

$$\alpha' = \ln\left(\frac{R_1^*}{r_1}\sin\lambda_1/2 + \sqrt{\frac{R_1^{*2}}{r_1^2}\sin^2\lambda_1/2 - 1}\right) \qquad (17)$$

Уравнение координатной линии β=β'' центрального колеса (рис. 4)

$$X^2 + (Y - CZ)^2 = (KZ)^2. \qquad (18)$$

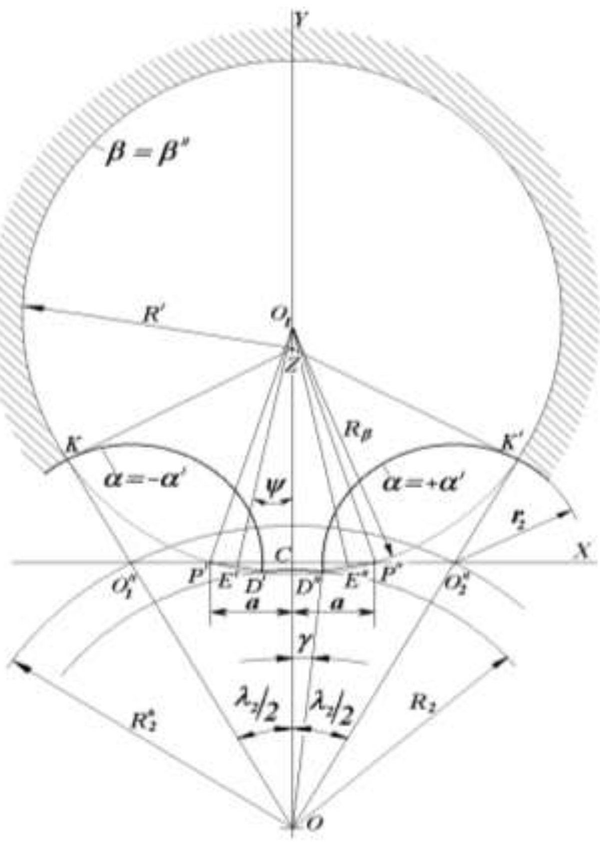

Рис. 4 Аппроксимация профиля зуба центрального колеса

Половина межполюсного расстояния a' определяется из (18) при $Y = 0$, $X = a'$

$$a' = \sqrt{R_2^{*2}\sin^2\lambda_2/2 - r_2^2}. \qquad (19)$$

Определяем параметры β'' и α' и угол ψ'

$$\beta'' = \arcsin\left(\frac{\sqrt{R_2^{*2}\sin^2\lambda_1/2 - r_2^2}}{(R_2^* + r_2)tg\lambda_2/2}\right);\ \alpha' = \ln\left[\frac{R_2^*}{r_2}\sin\lambda_2/2 + \sqrt{\left(\frac{R_2^*}{r_2}\sin\lambda_2/2\right)^2 - 1}\right]. \qquad (20)$$

$$\sin\psi' = \frac{-R_2^*\cos\lambda_2/2 + R_2\cos\gamma}{\sqrt{(R_2^*\cos\lambda_2/2 - R_2\cos\gamma)^2 + R_2\sin\gamma + a')^2}}. \qquad (21)$$

По теореме Пифагора вычисляем радиус $R_{\beta'}$

$$R_{\beta'} = \frac{\sqrt{(R_2\sin\gamma + a')^2 + (R_2^*\cos\lambda_2/2 - R_2\cos\gamma)^2 + (a - R_2\sin\gamma)^2\cdot\sin^2\psi'}}{2\sin\psi'}. \qquad (22)$$

Плоскодеформированное состояние описывается тензором напряжений:

$$T = \bar{e}_\alpha\cdot\bar{e}_\alpha\cdot\sigma_\alpha + (\bar{e}_\alpha\cdot\bar{e}_\beta + \bar{e}_\beta\cdot\bar{e}_\alpha)\tau_{\alpha\beta} + \bar{e}_\beta\cdot\bar{e}_\beta\cdot\sigma_\beta, \qquad (23)$$

где σ_α, σ_β – напряжения нормальные к координатным линиям $\alpha=const$, $\beta=const$; $\tau_{\alpha\beta}$ – касательные напряжения на гранях элемента, выделенного координатными линиями.

Уравнения равновесия компонентов тензора напряжений в тензорной форме

$\nabla T = 0$, $\nabla = \frac{1}{H}\left(\bar{e}_\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \bar{e}_\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)$ – оператор Гамильтона. В силу ортогональности $\bar{e}_\alpha$, $\bar{e}_\beta$

$$(\bar{e}_\alpha\cdot\bar{e}_\alpha) = (\bar{e}_\beta\cdot\bar{e}_\beta) = 1,\quad (\bar{e}_\alpha\cdot\bar{e}_\beta) = (\bar{e}_\beta\cdot\bar{e}_\alpha) = 0. \qquad (24)$$

Запишем уравнение равновесия с учетом значений (23) и (24)

$$\begin{gathered}\left(\bar{e}_\alpha\frac{\partial\bar{e}_\alpha}{\partial\alpha}\right)\bar{e}_\alpha\sigma_\alpha + \frac{\partial\bar{e}_\alpha}{\partial\alpha}\sigma_\alpha + \bar{e}_\alpha\frac{\partial_\sigma}{\partial\alpha} + \bar{e}_\alpha\left(\frac{\partial\bar{e}_\alpha}{\partial\alpha}\bar{e}_\beta\tau_{\alpha\beta}\right) + \frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\alpha}\tau_{\alpha\beta} + \bar{e}_\beta\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + \\ + \bar{e}_\alpha\left(\frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\alpha}\bar{e}_\beta\tau_{\alpha\beta}\right) + \bar{e}_\alpha\left(\frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\alpha}\bar{e}_\beta\sigma_\beta\right) + \bar{e}_\beta\left(\frac{\partial\bar{e}_\alpha}{\partial\beta}\bar{e}_\alpha\sigma_\alpha\right) + \bar{e}_\beta\left(\frac{\partial\bar{e}_\alpha}{\partial\beta}\bar{e}_\beta\tau_{\alpha\beta}\right) + \qquad (25) \\ + \bar{e}_\beta\left(\frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\beta}\bar{e}_\alpha\tau_{\alpha\beta}\right) + \frac{\partial\bar{e}_\alpha}{\partial\beta}\tau_{\alpha\beta} + \bar{e}_\alpha\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + \bar{e}_\beta\left(\frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\beta}\bar{e}_\beta\sigma_\beta\right) + \frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\beta}\sigma_\beta + \bar{e}_\beta\frac{\partial\sigma_\beta}{\partial\beta} = 0.\end{gathered}$$

Из (25) с помощью (8) получим уравнения равновесия в напряжениях

$$\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + \frac{H}{R_\alpha}(\sigma_\beta - \sigma_\alpha) + \frac{2H}{R_\beta}\tau_{\alpha\beta} = 0,\quad \frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\sigma_\beta}{\partial\beta} + \frac{H}{R_\beta}(\sigma_\beta - \sigma_\alpha) - \frac{2H}{R_\alpha}\tau_{\alpha\beta} = 0. \qquad (26)$$

Определим компоненты тензора деформации $E^* = \frac{1}{2}\left(\nabla\bar{U} + (\nabla\bar{U})'\right)$,

где $\bar{U} = \bar{e}_\alpha U + \bar{e}_\beta(V)$ – вектор смещения; $(\nabla\bar{U})'$ – транспонирование $\nabla\bar{U}$.

Найдем выражение $\nabla\bar{U}$ и выполним операцию транспонирования

$$\nabla\bar{U} = \bar{e}_\alpha\bar{e}_\alpha\left(\frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{V}{R_\beta}\right) + \bar{e}_\alpha\bar{e}_\beta\left(\frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial\alpha} - \frac{U}{R_\beta}\right) + \bar{e}_\beta\bar{e}_\alpha\left(\frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\beta} + \frac{V}{R_\alpha}\right) + \bar{e}_\beta\bar{e}_\beta\left(\frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial\beta} - \frac{U}{R_\alpha}\right), \qquad (27)$$

$$(\nabla\bar{U})' = \bar{e}_\alpha\bar{e}_\alpha\left(\frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{V}{R_\beta}\right) + \bar{e}_\alpha\bar{e}_\beta\left(\frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\beta} + \frac{V}{R_\alpha}\right) + \bar{e}_\beta\bar{e}_\alpha\left(\frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\alpha} - \frac{V}{R_\beta}\right) + \bar{e}_\beta\bar{e}_\beta\left(\frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial\beta} - \frac{U}{R_\alpha}\right). \qquad (28)$$

Значения (27) и (28) подставим в выражение тензора деформации E^*

$$\begin{gathered}E^* = \left(\frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{V}{R_\beta}\right)\bar{e}_\alpha\bar{e}_\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}\left(\frac{\partial U}{\partial\beta} - \frac{\partial V}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{V}{R_\alpha} - \frac{U}{R_\beta}\right)\right)\bar{e}_\alpha\bar{e}_\beta + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}\left(\frac{\partial U}{\partial\beta} + \frac{\partial V}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{V}{R_\alpha} - \frac{U}{R_\beta}\right)\right)\bar{e}_\beta\bar{e}_\alpha + \left(\frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial\beta} - \frac{U}{R_\alpha}\right)\bar{e}_\beta\bar{e}_\beta.\end{gathered} \qquad (29)$$

Множители при ортах служат компонентами тензора относительной деформации:

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{V}{R_\beta},\ \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial\beta} - \frac{U}{R_\alpha},\ \gamma_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\beta\alpha} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial U}{\partial\beta} + \frac{\partial V}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{V}{R_\alpha} - \frac{U}{R_\beta}\right). \qquad (30)$$

Компоненты тензора напряжений для плоско-деформированного состояния выразим через компоненты тензора деформаций с помощью обобщенного закона Гука

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\alpha &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha}\left[(Ch\,\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)+V\sin\beta-\frac{\nu}{1-\nu}U Sh\,\alpha\right],\\
\sigma_\beta &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha}\left[(Ch\,\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\partial V}{\partial\beta}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial U}{\partial\alpha}\right)-U Sh\,\alpha+\frac{\nu}{1-\nu}V\sin\beta\right],\\
\tau_{\alpha\beta} &= \frac{E}{2(1+\nu)\alpha}\left[(Ch\,\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)+V Sh\,\alpha-U\sin\beta\right].
\end{aligned}\right\}\quad (31)\qquad (43)$$

Подставим выражения (31), (7) в уравнения упругости (26) с учётом значений:

$$\frac{H}{R_\alpha}=\frac{Sh\alpha}{Ch\alpha+\cos\beta},\quad \frac{H}{R_\beta}=\frac{\sin\beta}{Ch\alpha+\cos\beta},\quad \frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\alpha}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha}\left[Sh\alpha\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu\,Ch\,\alpha}{1-\nu}U+(Ch\,\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\partial^2U}{\partial\alpha^2}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2V}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\sin\beta-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial U}{\partial\alpha}Sh\,\alpha\right],$$

$$\frac{\partial\sigma_\beta}{\partial\beta}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha}\left[-\sin\beta\left(\frac{\partial V}{\partial\beta}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial U}{\partial\alpha}\right)+\frac{\nu}{1-\nu}U\cos\beta+(Ch\,\alpha+\cos\beta)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial^2V}{\partial\beta^2}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2U}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)-\frac{\partial U}{\partial\beta}Sh\alpha+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial V}{\partial\beta}\sin\beta\right],\quad \frac{\partial\,\tau_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}=\frac{E}{2(1+\nu)\alpha}\left[Sh\alpha\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+V\,Ch\,\alpha+(Ch\,\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\partial^2U}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial^2V}{\partial\alpha^2}\right)+\frac{\partial V}{\partial\alpha}Ch\,\alpha+\frac{\partial U}{\partial\alpha}\sin\beta\right],\quad \frac{\partial\,\tau_{\alpha\beta}}{\partial\beta}=\frac{E}{2(1+\nu)\alpha}\times$$

$$\times\left[-\sin\beta\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)-U\cos\beta+(Ch\,\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\partial^2U}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2U}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)+\frac{\partial V}{\partial\beta}Sh\alpha-\frac{\partial U}{\partial\beta}\sin\beta\right],$$

$$\sigma_\beta-\sigma_\alpha=\frac{E}{(1+\nu)\alpha}\left[(Ch\,\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\partial V}{\partial\beta}-\frac{\partial U}{\partial\alpha}\right)-U\,Sh\,\alpha-V\sin\beta\right],$$

получим уравнения упругости в перемещениях:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2U}{\partial\alpha^2}+\frac{2}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2V}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2U}{\partial\beta^2}+\frac{(3-4\nu)\cdot\sin\beta}{2(1-\nu)(Ch\alpha+\cos\beta)}\cdot\frac{\partial V}{\partial\alpha}+\\
&+\frac{(3-4\nu)\cdot Sh\alpha}{2(1-\nu)(Ch\alpha+\cos\beta)}\frac{\partial V}{\partial\beta}-\frac{1}{(Ch\alpha+\cos\beta)}\left(Ch\alpha-\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\cos\beta\right)U=0,\\
&\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2V}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2U}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2V}{\partial\beta^2}-\frac{(3-4\nu)\sin\beta}{2(1-\nu)(Ch\alpha+\cos\beta)}\frac{\partial U}{\partial\alpha}-\\
&-\frac{(3-4\nu)Sh\alpha}{2(1-\nu)(Ch\alpha+\cos\beta)}\frac{\partial U}{\partial\beta}-\frac{1}{(Ch\alpha+\cos\beta)}\left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}Ch\alpha-\cos\beta\right)V=0.
\end{aligned}\right\}\quad (32)$$

Решение системы уравнений (32) определяет напряженно − деформированное состояние зуба. Это решение должно удовлетворять граничным условиям на контуре поперечного сечения зуба. Зададим граничные условия на координатных линиях, ограничивающих профиль зуба (рис. 1). На линии $\alpha=-\alpha$ отсутствует нагрузка. Следовательно на этой линии отсутствуют напряжения σ_α, $\tau_{\alpha\beta}$

$$\sigma_\alpha(-\alpha_1',\beta)=0,\ \ (\beta_1\le\beta\le\beta_2);\qquad \tau_{\alpha\beta}(-\alpha_1',\beta)=0,\ \ (\beta_1\le\beta\le\beta_2).\quad (33)$$

На линии $\alpha=\alpha'$ на участке изменения координаты β от β_1 до β_2 действует контактное давление $P(\beta)$. Остальные участки $\beta'\le\beta\le\beta_1$ и $\beta_2\le\beta\le\beta''$ свободны от нагрузки. Трением в зоне контакта пренебрегаем

$$\sigma_\alpha(\alpha*,\beta)=\begin{cases}0, & \beta'\le\beta\le\beta_1,\\ -P(\alpha*,\beta), & \beta_1<\beta<\beta_2,\\ 0, & \beta_2\le\beta\le\beta'';\end{cases}\quad \tau_{\alpha\beta}(\alpha*,\beta)=0,\ (\beta'\le\beta\le\beta'').\quad (34)$$

На линии $\beta=\beta'$ отсутствует нагрузка и на этой линии $\sigma_\beta=0$, $\tau_{\alpha\beta}=0$

$$\sigma_\beta\,(\alpha,\ \beta')=0,\quad (-\alpha'\le\alpha\le\alpha'),\qquad \tau_{\alpha\beta}\,(\alpha,\beta')=0,\quad (-\alpha'\le\alpha\le\alpha'). \tag{35}$$

Граничное условие на линии контура $\beta=\beta''$ рассматриваем как заделку

$$U\,(\alpha_1\beta_2)=0,\quad (-\alpha'\le\alpha\le\alpha');\qquad V\,(\alpha_1\beta_2)=0,\quad (-\alpha'\le\alpha\le\alpha'). \tag{36}$$

Заменяя $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta}$ по формулам (31) получим граничные условия в перемещениях:

$$\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)+\frac{\sin\beta}{Ch\alpha*+\cos\beta}V-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{Sh\alpha*}{Ch\alpha*+\cos\beta}U\right.=\underset{\alpha=-\alpha'}{0},$$

$$\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)-\frac{Sh\alpha*}{Ch\alpha*+\cos\beta}V-\frac{Sin\beta}{Ch\alpha*+\cos\beta}U\right\}=\underset{\alpha=-\alpha'}{0},$$

$$\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)+\frac{\sin\beta}{Ch\alpha*+\cos\beta}V-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{Sh\alpha*}{Ch\alpha*+\cos\beta}U\right\}_{\alpha=\alpha'}=$$

$$=\begin{cases}0, & \beta'\le\beta\le\beta_1,\\ -\dfrac{P\alpha(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}, & \beta_1<\beta<\beta_2,\\ 0, & \beta_2\le\beta\le\beta'.\end{cases}\quad \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)+\frac{Sh\alpha*}{Ch\alpha*+\cos\beta}V-\frac{\sin\beta}{\ldots+cos*}\right\}=\underset{\alpha=\alpha'}{0}, \tag{37}$$

$$\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial\beta}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial U}{\partial\alpha}-\frac{Sh\alpha}{Ch\alpha+\cos\beta_1}U+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\sin\beta_1}{Ch\alpha+\cos\beta_1}V\right)\right\}=\underset{\beta=\beta'}{0},$$

$$\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)+\frac{Sh\alpha}{Ch\alpha+\cos\beta_1}U\right\}=\underset{\beta=\beta'}{0}.$$

Уравнения упругости (32) совместно с граничными условиями (36) и (37) дают единственное решение задачи о напряженно - деформированном состоянии зуба. Для решения могут быть использованы приближенные методы.

Выполнен прочностной расчёт зуба сателлита редуктора поворота шагающего экскаватора ЭШ6,5×45: ёмкость ковша *6,5 м*^{3}, вылет стрелы *45 м.* Масса редуктора *4300кг*; передаточное число *u=24.* Размеры зуба: радиус вершин R_1*=252мм*, радиус центров образующих R_1^* *=252мм*, радиус образующих r_i*= 26 мм,* число зубьев z_i = *24*; *E = 2,06 МПа,* ν *= 0,3.* При номинальной нагрузке редуктора $M_2=7\cdot10^4$ Нм, нормальная нагрузка на зуб составляет $N=318{,}8$кН/м.

— Преобладающими являются напряжения сжатия σ_α , $\sigma_{\alpha_{max}}=42$*мПа,* они действуют вблизи зоны контакта, затухают по мере приближения к корню зуба.

— Напряжения σ_β, $\sigma_{\beta_{max}}=13{,}5$*мПа* - аналог нормальных напряжений в теории изгиба балок, их уровень значительно ниже, определенных по элементарной теории. Это обусловлено благоприятной формой зуба с точки зрения прочностных свойств.

— Касательные напряжения $\tau_{\alpha\beta_{max}}=7{,}5$*мПа* действуют в основном в зоне контакта.

Список литературы: **1.** *Иосилевич Г. Б., Осипова Г. В.* Применение численных методов решения задач теории упругости к расчёту зубчатых передач. - Вестник машиностроения, 1976, № 4,с. 19-23. **2.** *Marunic Cordana.* Analiza fleksibilnosti osnove zubi Celnika analusis of gear teeth base flexibitity. Eng. Rev. 2000. 20. c. 45-52. **3.** *Стрельников В. Н.* Расчёт зубьев кругового профиля на прочность // Опыт исследования, проектирования, изготовления и эксплуатации передач Новикова. Тезисы докладов Межреспубликанской научно - технической конференции - Рига: ЛРП ВНТОМ. - 1989. - С. 31 - 33.

Поступила в редакцию 10.03.05