

$$\bar{u}_{2_{ri}} = \sum_{i=1}^n \left\{ (\bar{d}_{ij})_f \bar{P}_{mj} \right\} \quad j = 1, \dots, n \quad (16)$$

где $\bar{u}_{2_{ri}} = \frac{u_{2_{ri}}}{R_2}$.

Совместное решение уравнений (13) – (16) и предполагая соответствие $i^{\text{ТЯХ}}$ точек контактных полверхностей ролика и зуба, получаем алгебраическое уравнение совместных перемещений ролика и зуба

$$\left\{ (d_{ij})_m + (d_{ij})_f \right\} \bar{P}_{mj} = \bar{d} \cos \beta_i + (R-1)(1 - \cos \beta_i), \quad (17)$$

где $\bar{d} = \frac{d}{R_2}$, β_i - угол между центром $P^{\text{Э}}$ элемента и общей линией действия нагрузки.

Получено общее решение задачи теории упругости силового взаимодействия элементов зацепления тел близкой разноимённой кривизны, необходимое для прочностного расчёта передач с промежуточными телами качения.

Список литературы: 1. *Hertz H.* Uber Die Berührung fester Elastischer Körper., I. E. Math. (Irelle), vol. 92, 1882. 2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 365 с. 3. *Тимошенко С. П., Гудьер Д.* Теория упругости. - М.: Наука, 1979.– 560 с. 4. *Стрельников В. Н.* Контактная задача зубчатого зацепления с промежуточными телами качения // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Международный сборник научных трудов. - Донецк: ДГТУ. 2004. - Вып. 27. - С. 238 – 254.

УДК 621.833

В.Н. СТРЕЛЬНИКОВ, канд.техн.наук; ЗАО «НКМЗ»

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЯЖЕЛО НАГРУЖЕННЫХ ПЕРЕДАЧ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ

Вирішена контактна задача теорії пружності для циліндричних поверхонь передач із проміжними тілами катіння.

The contact problem of the theory of elasticity for cylindrical surfaces of transfers with intermediate bodies of rolling is solved.

Проектирование новых передач зацеплением связано с решением задач прочности несущих деталей и узлов, исследованием процессов, протекающих в зоне контакта. Состояние материала при контактных нагрузках характеризуется большим градиентом напряжений, локализацией последних в относительно больших объёмах вблизи поверхности и достигающих значительных величин. Контакт между твёрдыми телами носит дискретный характер, и площадь истинного соприкосновения составляет незначительную

часть номинальной площади касания. Взаимодействие поверхностей осуществляется по фактическим площадкам касания, поэтому установление их геометрических форм и размеров прямо связано с нагрузочной способностью, энергетическими затратами на преодоление сил трения.

Для передач зацеплением задача о контактных напряжениях имеет особую практическую значимость. При проектировании, рассмотрении вопросов долговечности и износа зубьев, назначении термической обработки, прежде всего обращаются к возможным значениям местных напряжений на поверхности контакта. В основе методик и стандартов расчёта зубьев на контактную прочность и контактную выносливость лежит задача Герца [1 - 3].

Актуальность вопроса о контактном взаимодействии в зацеплении высших кинематических пар определяется не только практической потребностью результатов, но и отсутствием достаточно точных решений, представленных в удобной форме для практического применения.

Стремление к достижению совершенства геометрических форм и параметров, снижению контактных нагрузок, стимулирует разработку новых разновидностей передач с приоритетными кинематическими и нагрузочными характеристиками.

Особенностью контактной задачи для передач с промежуточными телами качения является близость радиусов кривизны нормальных сечений ролика и вогнутой цилиндрической поверхности зуба. Протяженность дуги контакта может быть соизмерима с размерами контактирующих тел, что делает задачу отличной от классической задачи Герца.

Контактные задачи подобного типа применительно к исследованию сопряжений вал - втулка рассматривались в работах Штаермана [4] и Перссона [5]. Штаерман получил условия сопряжения контактирующих поверхностей отличающиеся от принятых Герцем. Однако при решении контактной задачи следовал методике Герца, рассматривая при определении упругих деформаций контактирующие полупространства. В более точной постановке задача рассматривалась Перссоном, который для упругих деформаций использовал решения для кругового диска и упругого пространства с отверстием, представленные через функции напряжений.

В работах [4] и [5] не рассматривалась контактная задача для случая, когда одно из тел представляет полый тонкостенный цилиндр, взаимодействующий не с упругим пространством имеющим отверстие, а с двумя полупространствами с выточками в виде цилиндрических поверхностей, моделирующих зацепление с промежуточными телами качения. Контакт тел, одно из которых является полым тонкостенным цилиндром, обеспечивает значительно более высокую податливость и вместе с тем накладывает особые условия на постановку контактной задачи, отличные от используемых Герцем, Штаерманом и Перссоном [6 - 9].

Решение Перссона является более точным. При больших разностях радиусов контактирующих цилиндров и малых нагрузках результаты, по

методике Герца, Штаермана и Перссона, оказываются близкими. Для малых разностей радиусов контактирующих цилиндров и больших нагрузок появляются расхождения, которые особенно велики для решений Штаермана и Герца. Решение Перссона наиболее близко согласуется с решением Штаермана и отдалается от решения Герца в сторону увеличения контактных напряжений [10]

Теоретические и экспериментальные исследования упругого взаимодействия однородных тел указывают на существование двух наиболее напряжённых зон: поверхностного слоя и области максимальных касательных напряжений, расположенной на незначительной глубине под контактными площадками [11, 12]. В настоящее время сформировалось ряд наиболее значимых направлений теоретических и экспериментальных исследований контактных напряжений тел качения в деталях машин:

- качение с проскальзыванием контактирующих поверхностей;
- гидродинамическая смазка между поверхностями, её влияние;
- неупругие свойства материала, искажающие теоретическую модель упругого взаимодействия тел;
- термические процессы в контактной зоне, изменяющие упругие свойства материала и смазочной плёнки при качении и качении со скольжением, ограничивающие несущую способность сопряжённых элементов.

Сосредоточенная сила приложенная к плоской границе полу бесконечного тела вызывает нормальные $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta$ и касательные напряжения τ_{rz} , определённые Буссинеском [13]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2\pi} \left\{ (1-2\mu) \left[\frac{1}{r^2} - \frac{z}{r^2 \sqrt{r^2+z^2}} \right] - \frac{3r^2 z}{\sqrt{(r^2+z^2)^5}} \right\}, \\ \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi} z^3 \frac{1}{\sqrt{(r^2+z^2)^5}}, \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{2\pi} \left\{ (1-2\mu) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{z}{r^2 \sqrt{r^2+z^2}} \right] + \frac{z}{\sqrt{(r^2+z^2)^5}} \right\}, \\ \tau_{rz} &= -\frac{3Pr}{2\pi} \frac{z^2}{\sqrt{(r^2+z^2)^5}}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где r, z – координаты элементарной площадки; μ – коэффициент Пуассона.

Перемещения u в направлении r перпендикулярном силе P и w в направлении оси z , совпадающей с приложенной силой P

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{2\pi E} P \left[\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} - 1 + \frac{r^2 z}{(1-2\mu)\sqrt{(r^2+z^2)^3}} \right], \\ w &= \frac{P}{2\pi E} \left[\frac{(1+\mu)z^2}{\sqrt{(r^2+z^2)^3}} - 1 + \frac{2(1-\mu^2)}{\sqrt{r^2+z^2}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где E – модуль упругости.

В решении Герца [1 - 3] для условий первоначального точечного контакта однородных изотропных тел с абсолютно гладкими поверхностями, без учёта сил трения, определены форма и размеры поверхности касания и характер распределения контактных давлений. Дальнейшее решение задачи Герца получила в работах А. Н. Динника [14, 15] и Н. М. Беляева [16, 17].

В результате взаимодействия тел I и II точки M_1 и M_2 переместятся на некоторые расстояния (рис. 1). Контактующие поверхности I и II задаются полиномами второй степени

Коэффициенты A и B определяются из выражений

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2, \\ z_2 &= a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнения (3) приводятся к виду

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2. \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= 0,5(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22}) \sin^2 \frac{\tau}{2}, \\ B &= 0,5(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22}) \cos^2 \frac{\tau}{2}, \\ A + B &= 0,5(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22}), \\ B - A &= 0,5[(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22}) + 2(\rho_{11} - \rho_{12})(\rho_{21} - \rho_{22}) \cos^2 \psi]^{0,5} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где ψ – угол между главными плоскостями с кривизнами ρ_{11} и ρ_{21} ;

$$\cos \tau = \frac{B - A}{B + A} - \text{обозначения Герца.}$$

Сближение δ точек M_1 и M_2 , вписывающихся в контур площадки касания

$$\delta = z_1 + z_2 + w_1 + w_2, \quad (6)$$

где $w_1 + w_2$ – упругие перемещения материала на пути от поверхности касания до точек M_1 и M_2 .

Из уравнений (4) – (6) записывается

$$w_1 + w_2 = \delta - Ax^2 - By^2. \quad (7)$$

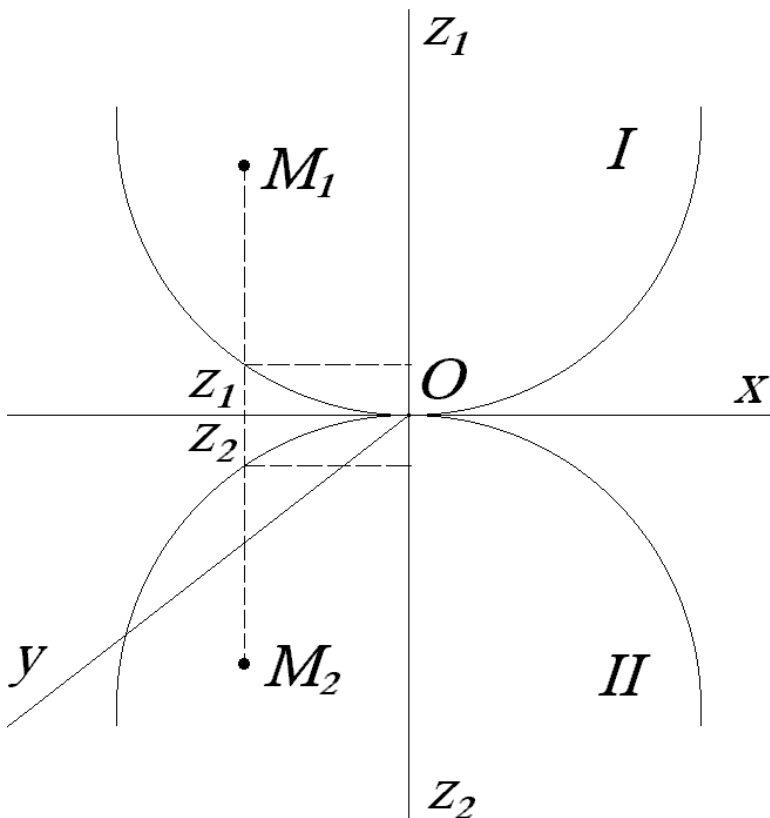


Рис. 1 Схема перемещений точек M_1 и M_2 при сжатии тел I и II контактирующих в точке O

По данным [18]

$$w_1 + w_2 = \left[\frac{1 - \mu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{\pi E_2} \right] \int_{(F)} \frac{p dF}{r}, \quad (8)$$

где r – расстояние точки M до площадки касания; E_1, E_2, μ_1, μ_2 – упругие постоянные контактирующих тел; p – нагрузка на элементарную площадку dF .

Введём обозначения

$$V_1 = \frac{\varphi(1 - \mu_1^2)}{E_1}, \quad V_2 = \frac{\varphi(1 - \mu_2^2)}{E_2}, \quad V = \int_{(F)} \frac{p dF}{r},$$

и определяются значения функции для точек внутри площадки касания

$$V = \frac{\varphi\pi}{V_1 + V_2} (\delta - Ax^2 - By^2) \quad (9)$$

для точек внутри контактной площадки

$$V > \frac{\varphi\pi}{V_1 + V_2} (\delta - Ax^2 - By^2). \quad (10)$$

Герц определил характер распределения давления на эллиптической контактной площадке в форме полуэллипсоида давления с полуосями a , b , P_0 , объём которого приравнивается сжимающей нагрузке P

$$P = \int_{(F)} p dF = \frac{2}{3} \pi ab P_0, \text{ откуда } P_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab}. \quad (11)$$

Уравнение (11) показывает, что давление в центре контактной площадки P_0 в 1,5 раза выше среднего давления P_{cp} .

Давление P в произвольной точке контактной площадки

$$p = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{0.5}, \quad (12)$$

где x и y – координаты точки внутри контура контактной площадки.

Полуоси a и b эллиптической площадки контакта определяются в соответствии с представлением [19]

$$\left. \begin{aligned} a &= v_1 \sqrt[3]{\frac{8}{3} \frac{P}{\sum \rho} (V_1 + V_2)}, \\ b &= v_2 \sqrt[3]{\frac{8}{3} \frac{P}{\sum \rho} (V_1 + V_2)}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где $\sum \rho = \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22}$; v_1 и v_2 – коэффициенты, зависящие от геометрии соприкасающихся поверхностей.

Сближение δ точек M_1 и M_2

$$\delta = \frac{3}{8} P \frac{V_1 + V_2}{\pi a} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)(1+k^2 z^2)}. \quad (14)$$

Значение интеграла в формуле (14) приведены в табл. 1

Таблица 1

Геометрические параметры, характеризующие условия контакта поверхностей

$\cos \tau$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,85	0,9	0,95	0,97	0,99	0,997	1,0
v_1	1,0	1,07	1,15	1,25	1,36	1,46	1,66	1,89	2,29	2,60	3,09	4,08	5,09	7,83	12,21	-
v_2	1,0	0,931	0,871	0,821	0,760	0,721	0,666	0,610	0,539	0,506	0,461	0,396	0,356	0,290	0,224	0,0
\mathcal{J}	1,57	1,68	1,80	1,90	2,06	2,17	2,36	2,566	2,865	3,05	3,3	3,73	4,29	4,61	5,46	-

В работах [7, 11] приведены результаты, позволяющие определить напряжения контактной площадки круговой формы [7] и эллиптической формы поверхности контакта

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -2\mu P_0 - (1-2\mu)P_0 \frac{b}{a+b}, \\ \sigma_y &= -2\mu P_0 - (1-2\mu)P_0 \frac{a}{a+b}, \\ \sigma_z &= -P_0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

На концах осей эллиптической площадки имеет место условие: $\sigma_x = -\sigma_y$ - чистого сдвига.

На концах большой и малой полуосей касательные напряжения

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= (1-2\mu)P_0 \frac{k}{e^2} \left(\frac{1}{e} \operatorname{arctg} he - 1 \right), \\ \tau_{xz} &= (1-2\mu)P_0 \frac{k}{e^2} \left(1 - \frac{k}{e} \operatorname{arctg} \frac{e}{k} \right), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где $k = b/a$, $e = 1/a \sqrt{a^2 + b^2}$.

При линейном контакте цилиндрических поверхностей

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{q(V_1 + V_2)}{\pi(\rho_1 + \rho_2)}}, \quad \delta = \frac{V_1 + V_2}{4\pi} q \left(1 - 2 \ln \frac{b}{2} \right), \\ P_0 &= \frac{2q}{\pi b}, \quad q = \frac{\pi b P_0}{2}, \quad V = \frac{4(1 - \mu^2)}{E}, \end{aligned}$$

где V – характеризует упругие свойства материала;

q – нагрузка, приходящаяся на единицу длины контакта поверхностей.

Максимальные нормальные и касательные напряжения на поверхности вдоль линии первоначального контакта ($z = 0$, $y = 0$)

$$\sigma_{x_{max}} = \frac{2q}{\pi b} \cdot 2\mu, \quad \sigma_{y_{max}} = \frac{2q}{\pi b} \cdot 2\mu, \quad \sigma_{z_{max}} = \frac{2q}{\pi b}, \quad \tau_{max} = \frac{q}{\pi b} (1 - 2\mu). \quad (17)$$

Выполнен анализ ряда основных направлений постановки и решения контактной задачи теории упругости, используемой в прочностных расчётах несущих элементов зацепления высших кинематических пар. Полученное решение контактной задачи позволяет с высокой степенью точности оценить нагрузочную способность передач зацеплением по контактным напряжениям. Приведенные результаты используются в проектно – конструкторских работах отрасли тяжёлого машиностроения.

Список литературы: 1. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastiques Körper. I. für Reine und Angewandte Mathematik. 1881. Bd. 92. 2. *Hertz H.* Über die Berührung fester elastiques Körper und über die Härte. Verhandlungen des Vereine zur Beforderung des Gevberfleisses. Berlin, Nov. 1882, s. 449. 3. *Hertz H.* Gesammelte Werke. Bd. 1, 1895, Leipzig, s. 155 – 196. 4. *Штаерман И. Я.* К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел. – Докл. АН СССР, 1939, т. 25, № 5, с. 360—362. 5. *Persson A.* On the Stress Distribution of Cylindrical Elastic Bodies in Contact. – Dissertation,

Chalmers Tekniska Hogskola, Göteborg, 1964. 6. *Стрельников В.Н.* Перспективные направления развития механических приводов тяжёлых машин. (Часть 2).- М.: ВНИИМЕТМАШ, 1990.- 97с. 7. *Стрельников В.Н.* Взаимодействие упругих роликов с вогнутыми зубьями близкой кривизны.- М.: Машиностроение, 1992. - 322 с. 8. *Стрельников В.Н.* Контактная задача зубчатого зацепления с промежуточными телами качения // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Междунар. сб. научн. тр. - Донецк ДГТУ. 2004. - Вып. 27.- С.238 –254. 9. *Стрельников В.Н.* Влияние особенностей контактного взаимодействия на упругие деформации полого цилиндра // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Междунар. сб. научн. тр. - Донецк: ДГТУ. 2006. - Вып. 31. - С. 198 – 203. 10. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М., «Мир», 1989 г., с. 509. 11. *Bufler H.* Beanspruchung und Schlupf beim Rollen elastische walzen Forschung Gel Ing. W. 1960, 27, 121. 12. *Johnson K. L.* Tangential friction and microslip in rolling contact. Rolling Contact phenomena Ed. Bidwell. Amsterdam, 1960. 13. *Boussinesq I.* Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris. 1885. 14. *Динник А. Н.* Удар и сжатие упругих тел. Известия Киевского политехнического института. – Кн. 4. – Киев: 1909. С. 27 – 30. 15. *Динник А. Н.* Избранные труды. Изд. - во АН УССР, т. 1, - Киев: 1952. 16. *Беляев Н. М.* К вопросам о местных напряжениях в связи с сопротивлением рельсов смятию. Труды ЛИИПС. – Вып. 99. – Л.: 1929. С. 21 – 26. 17. *Беляев Н. М.* Местные напряжения при сжатии упругих тел. Инженерные сооружения и строительная механика. – Л.: Путь, 1942. С. 18 – 28. 18. *Ерошкин А. И.* Исследование нагрева и охлаждения смазки высокоскоростных подшипников. Труды института им. Баранова. – № 329. - Л.: 1958. С. 86 – 94. 19. *Спицын Н. А.* Подшипники качения. Справочник машиностроения. – М.: Машгиз, 1960. С. 121 – 134.

УДК 621.833

А.Ф.КИРИЧЕНКО, д-р. техн. наук, НТУ «ХПИ»

А.И.ПАВЛОВ, канд. техн. наук, ХНАДУ

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ ЗАЦЕПЛЕНИЯ В ЭВОЛЮТНОЙ ПЕРЕДАЧЕ

Розглядаються формули для розрахунку параметрів та характеристик зубчастої передачі та будуються графіки їх залежності між собою. Це дозволяє використовувати наведений матеріал для побудови оптимальної зубчастої передачі.

Formulas for calculation of parameters and characteristics of a tooth gearing are considered(examined) and diagrams of dependence of them among themselves are under construction. It allows to use the given material for construction of an optimum tooth

Постановка проблеми. Развитие теории зацеплений позволило получить новые зацепления, которым дано название эволютных [3]. Применение новых зацеплений требует глубоких их исследований.

Анализ литературы. В монографии [1], как и в других источниках, нет даже упоминания о возможных новых зацеплениях.

Цель статьи – установить зависимость наиболее важных характеристик новых зацеплений от параметров зубчатой передачи, что позволит выбирать наиболее оптимальные варианты.

Основные характеристики. Радиус кривизны рабочей поверхности является одним из наиболее важных параметров [1-8] любого зацепления.