

А.Г. ПРИЙМАКОВ, канд. техн. наук,
А.В. УСТИНЕНКО, канд. техн. наук,
Г.А. ПРИЙМАКОВ, бакалавр механики

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ ЗУБЧАТЫХ ПАР С ПОЗИЦИЙ СИНЕРГЕТИКИ

Розглянуто основи моделювання процесів саповпорядкування та структурної адаптації до умов експлуатації в зубчатих парах. Запропоновано досліджувати тріщиностійкість поверхонь зубців з позицій синергетики. Встановлено розрахункову залежність, що дозволяє визначити напруження, при яких починається розвиток втомних тріщин на несучій поверхні зубця. Визначено кількість зростаючих мікротріщин та час їх зростання в функції еквівалентних напружень.

Fundamentals of simulation by self-organizing and structural adaptation processes in gear-and-pinion sets are surveyed. It is offered to investigate crack resistance of teeth surfaces from synergetics positions. The formula is established, permitting to determine stresses at which fatigue crack initiation on a tooth surface begins. Quantity of growing microcracks and time of their growth in a function of the equivalent stresses is determined.

Введение. При определении допускаемых напряжений в зубчатых передачах следует ориентироваться на их выносливость и износостойкость, а, значит, и на трещиностойкость. Перспективным, по мнению авторов, является подход, при котором можно спрогнозировать параметры трещиностойкости зубчатых пар аналитически, исходя из позиций синергетики и самоорганизации к возникновению трещин в некотором поверхностном слое (ПС) зубчатого колеса.

Анализ литературы. Анализ литературных источников [1-8] показывает, что трещиностойкость зубчатых пар с позиции синергетики и структурной самоорганизации не рассматривалась за исключением работы [1], где эта проблема поставлена в общем виде.

Цель статьи. Таким образом, целью статьи является аналитическое определение параметров трещиностойкости на рабочих и переходных поверхностях зубчатых колес (далее называемых несущими) через анализ их структурной самоорганизации и приспособляемости (синергетики).

Самоорганизация и синергетика ПС как развивающейся информационной системы. Основой получения формализованных законов, описывающих поведение сложных самоорганизующихся систем, являются вариационные принципы, например принцип Гамильтона. Этот принцип оптимизирует поведение системы с целью получения результата при минимальных затратах ресурсов.

Для механических систем принцип Гамильтона также называют принципом наименьшего действия. Он заключается в том, что функционал

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt,$$

который по Гамильтону [2, 3] называется действием на отрезке $[t_0, t_1]$, на прямом пути принимает экстремальное значение по сравнению с другими непрямыми путями.

В функционале обозначено: q – обобщенная координата; t – время; α – параметр, нулевое значение которого соответствует прямому пути.

В терминах вариационного исчисления уравнение Лагранжа является дифференциальными уравнениями Эйлера для вариационной задачи:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt = 0.$$

При этом прямой путь принято называть экстремалью [4].

Основным в теории самоорганизации является реакционно-диффузионное уравнение [5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_i a_i \nabla^2 x_j \frac{\partial u}{\partial x_i} + F(u, x_j); \quad (1)$$

$i, j = 1 \dots 3,$

где u – искомая функция; t, x_j – независимые переменные; F – действующие силы.

Уравнение (1) будет иметь эмпирический характер до тех пор, пока не будут найдены соответствующие вариационные принципы самоорганизации. Например, открытая система получает и преобразовывает энергию; такой процесс можно описать известными уравнениями [6, 7, 8].

В системах, где стадия медленного движения сменяется динамикой скачкоподобного перехода, возможен переход в некоторое когерентное состояние, которое предшествует этому переходу. Одна из возможных реализаций этого поведения связана с выбором начального состояния, которое может быть как нестойким, так и стойким.

Вторая возможность возникает в том случае, когда начальная фаза индукции, характеризующаяся очень малой скоростью изменения соответствующей переменной, сменяется взрывоподобным поведением, которое инициализируется в некоторый характерный момент времени t_e (см. рис.). В итоге в системе устанавливается состояние, которое будет единственно стойким в диапазоне интересующих нас значений параметров.

Проиллюстрируем основные особенности динамики такого типа на примере адиабатического взрыва (сгорания в замкнутом объеме). В этом случае тепло от сгорания расходуется на нагревание горючей смеси. Это – необратимая экзотермическая реакция



в которой зависимость константы скорости $k(T)$ от температуры T определяется законом Аррениуса:

$$k \cong k_0 e^{-E_0/k_B T}. \quad (3)$$

При этом уравнение баланса массы и энергии имеет вид

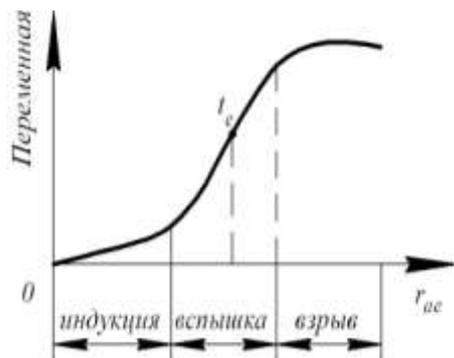


Рисунок – Иллюстрация самоорганизации системы в виде взрывоподобного поведения

$$\frac{dx}{dt} = -k x, \quad (4)$$

или

$$C_v \frac{dT}{dt} = -r_v \frac{dx}{dt} = r_v k x, \quad (5)$$

где C_v и r_v – соответственно теплоемкость и теплота реакции при постоянном объеме.

Умножив (4) на r_v , с учетом (5) можно получить закон сохранения:

$$C_v T_v + r_v x_0 = C_v T_0 + r_v x \equiv C_v T_{\max}, \quad (6)$$

где T_0 и x_0 – начальные значения T и x ; T_{\max} – конечная температура по завершению реакции. Благодаря этому закону сохранения уравнение (5) становится замкнутым. Например, уравнение теплового баланса запишется в следующем виде:

$$\frac{dT}{dt} = k_{\max} - T k. \quad (7)$$

Введем теперь в рассмотрение понятие флуктуаций. При этом имеем дело с процессом типа "гибели", поскольку концентрация вещества может только уменьшаться. Основное уравнение можно записать в виде [7, 9]

$$\frac{dP_{x,t}}{dt} = \lambda_{x-1} P_{x-1,t} + \mu_{x+1} P_{x+1,t} - \lambda_x P_{x,t} - \mu_x P_{x,t}, \quad (8)$$

где λ и μ – скорости рождения и гибели. При этом константа скорости рождения $\lambda \approx 0$. Обозначив через x число частиц реагента, имеем

$$\frac{dP_{x,t}}{dt} = \mu_{x+1} P_{x+1,t} - \mu_x P_{x,t}. \quad (9)$$

Скорость гибели легко найти, воспользовавшись законом сохранения:

$$\mu_x \cong k x = k_0 x \exp\left[-\frac{E_0}{k_B (T_{\max} - r_v x / C_v N)}\right], \quad (10)$$

где N – параметр, пропорциональный размеру системы.

Таким образом, синергетический подход к предложенной модели показывает возможность скачкоподобного перехода ПС как открытой информационной системы из некоторого когерентного состояния (индукция) к определенному уровню самоорганизации (например, к квазибездвижному трению и полной трещиностойкости).

Синергетика термонапряженного состояния зубчатых пар. Такое термонапряженное состояние открытой трибосистемы вызывает отход от теплового равновесия, поэтому оно является неуравновешенным и для него характерны нестойкие процессы самоорганизации [1-3]. Следовательно, эта система может считаться синергетической, так как, изменяя температуру ΔT , мы можем управлять этой системой снаружи.

Согласно [10] эволюционный стохастический переход из состояния q_1 в состояние q_2 описывается уравнением

$$\dot{q}_1 = \alpha q_1 + \beta q_1 q_2 + f(t), \quad (11)$$

где α, β – управляющие параметры, которые задаются или определяются детерминировано; $f(t)$ – "флуктуационные" силы, являющиеся недетерминированными и делающие эволюцию временной.

Если принять энтропию S за меру неопределенности состояния предложенной системы, то с разбалансировкой температур степень упорядоченности структурного слоя Δr уменьшается, и одновременно инициализируется процесс самоорганизации структуры этого слоя ("S-теорема" [11, 12]). Там же показано, что изменение энтропии носит колебательный (пульсирующий) характер, описываемый уравнением

$$\Delta T (S_1 - S_2) - \frac{\rho}{2} \langle \delta V^2 \rangle > 0, \quad (12)$$

где ΔT – изменение температуры; S_1, S_2 – энтропия состояний 1 и 2; δV – пульсация скорости изменения структурного состояния шестерни зубчатого сопряжения.

В рассматриваемой системе вырабатывается энтропия, причем, одновременно с ее выработкой внутри системы происходит теплообмен с внешней средой. Тогда

$$dS = d_i S + \frac{dQ}{T}, \quad (13)$$

где $d_i S$ – энтропия, вырабатываемая внутри открытой системы, dQ/T – поток тепла.

Выработка энтропии происходит с определенной скоростью и в условиях неравновесия всегда

$$\frac{d_i S}{dt} > 0. \quad (14)$$

Обозначив через ξ производство энтропии в единицу времени на единицу объема открытой трибосистемы, можно записать:

$$\frac{d_i S}{dt} = \int \xi dV > 0. \quad (15)$$

Величину ω согласно [13, 14] назовем функцией диссипации энтропии.

Значение $d_i S/dt$ фактически определяет скорость выработки энтропии, причем во время изменения напряженно-деформированного состояния (НДС) эта скорость будет некоторым образом изменяться. Наша задача состоит в определении, от чего и как зависит скорость выработки энтропии и соответствующей ей удельной величины ω .

Энтропия dS вырабатывается благодаря теплопроводности зубчатой пары. Из-за разности температур возникает поток энергии dE/dt , причем его движущей силой служит разница температур ΔT . Зная зависимость энтропии от температуры [13, 14], для рассматриваемого зубчатого сопряжения можно записать

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}, \quad T_2 > T_1; \quad (16)$$

$$\xi = \frac{dE}{dt} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = \frac{dE}{dt} \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \right). \quad (17)$$

Таким образом, функция диссипации энтропии выражается произведением потока энергии на иницирующую его силу; другими словами, в рассматриваемой системе действует "насос" по перекачке энтропии [15, 16], на производительность которого активно влияют тепловой поток и изменение НДС.

Известно, [4, 6], что уменьшение энтропии ведет к увеличению информации и наоборот. В нашем случае такое увеличение информации выражается через структурные изменения внутри системы, реологические и синергетические изменения свойств тел трибосистемы. Численно связь информации о состоянии трибосистемы с ее энтропией выражается известной формулой Шеннона [5, 6]. К такому же выводу приходит и автор работы [4].

В работе [9] показано, что закон теплопередачи в термонапряженных трибосистемах имеет вид

$$J = \frac{dT}{r_\tau} \approx \frac{dE}{dt}, \quad (18)$$

где J – поток энергии в системе; r_τ – тепловое сопротивление системы.

Там же показано, что при конечном интервале времени

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{1}{r_{\tau} + T/J}. \quad (19)$$

Из (19) следует, что при постоянном потоке энергии $J = \text{const}$ и постоянной величине ΔT скорость выработки энтропии определяется только свойствами системы, характеризующими ее тепловое сопротивление r_{τ} . Таким образом, при $J = \text{const}$ и $\Delta T = \text{const}$ скорость выработки энтропии достигает максимума при $r_{\tau} \rightarrow \min$.

Стойкость стационарного состояния характеризуется достижением максимальной скорости выработки энтропии, поэтому условие стойкости для рассматриваемой системы можно выразить как

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} \rightarrow \max \text{ если } r_{\tau} \rightarrow \min. \quad (20)$$

Отметим, что теплопередача в зубчатом сопряжении осуществляется через контакт двух тел, при этом генерация тепла также происходит в поверхностных слоях зубьев шестерни и колеса. Тепловое сопротивление r_{τ} нашей трибосистемы следует определять с учетом законов разветвления Кирхгофа как в активных звеньях (генерируемые потоки), так и в пассивных (рассеиваемые потоки), согласно рекомендациям [7, 8].

Зная, сколько тепла Q возникло в поверхностном слое тела, можно показать, сколько механической работы A трансформировалось в этом слое.

Таким образом, условия стойкости стационарного состояния трибосопряжения зубьев под воздействием постоянного внешнего давления:

- равновесие теплового и механического взаимодействий в системе;
- отсутствие направленного теплообмена через фрикционный контакт;
- равенство генерируемого и рассеиваемого потоков в теле и контртеле;
- пропорциональность потоков, генерируемых в телах, их теплопроводностям.

Математически это может быть выражено как

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{r_{\tau 1}}{r_{\tau 2}} = \frac{A_1}{A_2}. \quad (21)$$

Соотношение (21) наступает, когда в системе минимизированы самопроизвольные процессы, например, отсутствует направленный теплообмен через фрикционный контакт.

Для не приработанного зубчатого сопряжения состояние стойкости маловероятно. Для достижения равновесия, определяемого термодинамическим принципом максимума потока произведенной энтропии, в системе должно произойти согласование физико-механических свойств поверхностей трения с аналогичными характеристиками тел, которым принадлежат эти поверхности. В результате износа такое согласование вполне вероятно, особенно в аспекте геометрии микрорельефа поверхностей. По мере износа происходят изменения свойств поверхностей трения, при этом происходит изменение работы диссипации. Тогда, в соответствии с принципом минимума работы диссипативных сил, это изменение будет направлено на уменьшение работы диссипации до минимума. Следовательно, вполне возможно достижение стойкого стационарного состояния трибосистемы.

В [9] показано, что трение в произвольной трибосистеме обладает свойством автономной перестройки геометрических параметров микрорельефа. Это приводит к выборочному разрушению шероховатостей, а также к фрикционному усталостному разрушению. Другими словами, выборочное разрушение фрикционных связей служит механизмом саморегулирования трения.

Обозначив через R_1^{cp} и R_2^{cp} средние радиусы шероховатостей поверхностей трения тел 1 и 2, согласно [9] можно записать

$$\frac{R_1^{\text{cp}}}{R_2^{\text{cp}}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \left(\frac{r_{\tau 1}}{r_{\tau 2}}\right)^3. \quad (22)$$

В соответствии с теорией кинетической прочности, разрушение рассматривается как постепенный кинетический термоактивный процесс, развивающийся во времени [8, 9]. Следовательно, скорость разрушения V в зависимости от номинальных характеристик материала u_0, τ_0, γ , действующего контактного напряжения σ_H и изменения температуры ΔT [8]:

$$V = \frac{1}{\tau_0} \exp\left[-\frac{u_0 - \gamma \sigma_H}{R \Delta T}\right], \quad (23)$$

где R – постоянная Больцмана.

Считая, что тепловыделение происходит через контактную деформацию, можно предположить, что зоны одинакового тепловыделения имеют и равные контактные напряжения. Тогда зоны шероховатостей с одинаковыми контактными напряжениями будут иметь длительное "время жизни" и меньшую скорость разрушения вследствие более низкой температуры взаимодействия. К этим выводам можно прийти из анализа характера зависимостей (22) и (23).

Вопрос определения скоростей износа трибосопряжений достаточно полно рассмотрен в [9].

Математическое описание явления адаптации при трещинообразовании в зубчатых парах. Наиболее интересный момент при исследовании адаптации ПС – определение времени роста и слияния растущих трещин.

Рассмотрим конечное состояние, результатом которого будет разрушение ПС.

Примем количество параметров, определяющих поведение микротрещин в случае приложения нагрузки равным k . Значения этих параметров при переходе от одной микротрещины к другой изменяются дискретно, а их совокупность является непрерывной системой. Совокупность всех возможных значений параметров из-за непрерывности их изменения образует некоторую односвязную область в k -мерном пространстве. Количество трещин D_1 в неопределенном объеме характеризуется параметрами z_1, z_2, \dots, z_k , находящимися в области ΔW k -мерного пространства и может быть найдено из уравнения

$$D_1 = \int_{\Delta W} f(z_1, z_2, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k dz_i, \quad (24)$$

где $\prod_{i=1}^k dz_i$ – элемент k -мерного объема; $f(z_1, z_2, \dots, z_k)$ – дифференциальная функция распределения, зависит от свойств структуры металла и обуславливает вероятность того, что случайно выбранная микротрещина имеет параметры в границах

$$z_1, z_2, \dots, z_k \in [z_1, z_2, \dots, z_k] \pm \prod_{i=1}^k dz_i. \quad (25)$$

Так как распространение микротрещины происходит при некотором уровне напряжений, можно предположить, что значения их параметров лежат внутри области ΔW и характеризуется тензором $\sigma_{i,j}(r, \theta)$. Этот тензор соответствует динамическому полю напряжений, которое с достаточной вероятностью описывается зависимостью

$$\Delta W_1 = \Phi[\sigma_{i,j}, \theta]. \quad (26)$$

С учетом того, что между областью ΔW и тензором $\sigma_{i,j}(r, \theta)$ существует зависимость $f[(z_1, z_2, \dots, z_k), \sigma_{i,j}(r, \theta)] = 0$, число трещин, потерявших стойкость, по аналогии с (24) можно вычислить как

$$D_1 = \int_{\Phi} f(z_1, z_2, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k dz_i. \quad (27)$$

Кинематическое условие, определяющее усталостное разрушение материала ПШ, заключается в том, что значения тензора на протяжении интервала времени t не будут попадать в вовнутрь области W значений $\sigma_{i,j}$, т.е.

$$\sigma_{i,j} \in W \text{ при } t_1 \leq t \leq t_1 + \bar{t}_2, \quad (28)$$

где t_1 – фиксированный момент времени; $\bar{t}_2 = f(z_1, z_2, \dots, z_k; a_1, a_2, \dots, a_n)$; a_1, a_2, \dots, a_n – упругие константы материала.

Из анализа уравнений (26) и (28) можно заключить, что они являются необходимыми и достаточными условиями реализации накопленных напряжений, выражающейся в развитии усталостных трещин. Эти зависимости могут быть обобщенным критерием конечной стадии разрушения.

Известно, что учет взаимовлияния развивающихся микротрещин чрезвычайно важен. Однако это влияние на развитие трещин существенно ослабевает с увеличением интенсивности нагружения.

Поэтому предпосылка о независимости параметров, характеризующих рост микротрещин, в случае импульсного нестационарного нагружения является полностью оправданной.

Таким образом, количество микротрещин подчиняется закону

$$D_k = k_0 e^{-v_k^2} dS_0, \quad (29)$$

где k_0 – постоянная, характеризующая структуру ПС; v_k – постоянный коэффициент (с размерностью $1/m^2$), зависящий от физико-механических свойств ПС и определяющий его прочность.

Связь между действующими напряжениями и размерами микротрещин, на границе которых концентрация напряжений достигает критической величины, определяется уравнением Гриффитса

$$\sigma = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{E\mu_1 L}{S_1}}, \quad (30)$$

где L – линейный размер микротрещины; μ_1 – коэффициент Пуассона; S_1 – площадь микротрещины.

Если приложенная нагрузка вызывает появление полей напряжений σ_1 , то все микротрещины с площадью $S \gg S_1$ начнут расти. Количество таких растущих трещин

$$D_k = k_0 \int_S e^{-v_k^2} dz. \quad (31)$$

С учетом (30) и (31) можно принять, что расстояние, пройденное микротрещиной к поверхности, рассматривается как двухстадийный процесс развития. Тогда общее время разрушения единицы объема материала ПС

$$t = \frac{1}{W} \left(\frac{14v_k}{k_0 \sqrt{\pi}} \right)^{1/3} \left[1 - \Phi \left(\frac{4 E \mu_1 L}{7 \sigma^2} \right)^{-1/3} - \frac{E}{2} e^{-k\sigma_p} \left(\sigma - \sigma_\delta \right) \right]. \quad (32)$$

Из анализа (32) видно, что даже при стремлении напряжения к бесконечно большой величине время разрушения ПС остается конечным, а при $\sigma = 0$ $t \rightarrow \infty$, что, как известно из [6, 8], согласуется с поведением реальных твердых тел.

Выводы. Процесс самоорганизации и структурной адаптации к условиям эксплуатации в зубчатых парах происходит в поверхностном слое, причем скачкообразно.

1. Трещиностойкость несущих поверхностей зубьев зубчатых передач целесообразно моделировать с позиций синергетики и самоорганизации открытых трибосистем.

2. Установлена расчетная зависимость, позволяющая определять критические напряжения, при которых начинается развитие усталостных трещин на несущей поверхности зуба. Следовательно, эти напряжения можно принять за базовую величину допускаемых эквивалентных напряжений (по сути дела, аналог базового предела изгибной выносливости $\sigma_{F\lim b}$ по ГОСТ 21354-87).

3. Определено количество растущих микротрещин, время их роста в функции эквивалентных напряжений. Полученные результаты подтверждают правомерность уравнения Гриффитса для пластичных материалов.

Список литературы: 1. Ханин М.В. Механическое изнашивание материалов. – М.: Изд-во стандартов, 1984. – 152 с. 2. Дрозд С.Г. Контактное взаимодействие сферических пар трения с учетом накопленных повреждений и изменения физико-механических свойств в поверхностном слое // Трение и износ. – 1996. – Т.17. – №2. – С.163–169. 3. Алексеев Н.М. Новое о структурных особенностях изнашивания твердых тел // Трение и износ. – 1989. – Т.10. – №2. – С.197–205. 4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 362 с. 5. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 242 с. 6. Гиндин И.А., Неклюдов И.М. Физика программного упрочнения. – К.: Наукова думка, 1978. – 182 с. 7. Хакен Г. Синергетика / Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах // Под ред. Ю.Л. Климонтовича. – М.: Мир, 1985. – 419 с. 8. Канарчук В.Е. Адаптация материалов к динамическим воздействиям – К.: Наукова думка, 1986. – 263 с. 9. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. – М.: Мир, 1966. – 136 с. 10. Лившиц Н.А., Пугачев В.Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления – М.: Сов. радио, 1963. – 896 с. 11. Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лившиц Е.Н. Курс общей физики / Механика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1969. – 934 с. 12. Поверхностная прочность материалов при трении / Под ред. Б.И. Костецкого – К.: Техніка, 1981. – 387 с. 13. Любарский И.М., Палатник Л.С. Металлофизика трения. – М.: Наука, 1976. – 754 с. 14. Буше Н.А., Копытько В.В. Совместимость трущихся поверхностей. – М.: Машиностроение, 1981. – 363 с. 15. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Камбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. – М.: Машиностроение, 1977. – 384 с. 16. Приймаков А.Г., Приймаков Г.А., Бобровицкий А.В. Метод скользящего интервала // Интеграції технології та енергозбереження. – 2004. – Вип.1. – С.94–103.

Поступила в редколлегию 31.05.07