УДК 621.833+515.2

А.Ф. КИРИЧЕНКО, докт. техн. наук,
Н.В. МАТЮШЕНКО, канд. техн. наук, (г.Харьков)

К ВОПРОСУ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ГЕОМЕТРИИ ЗАЦЕПЛЕНИЯ НОВИКОВА С АРОЧНОЙ ФОРМОЙ ЗУБЬЕВ К ВИДУ, УДОБНОМУ ДЛЯ АНАЛИЗА

У статті показана реалізація метода узагальненої розгортки Б.А. Гессена стосовно зубчатих передач Новикова.

In this paper there is shown the realization of B.A. Gessen general development regarding to Novikov tooth gearing.

Общая постановка. Зубчатые передачи, являясь одной из важнейших составных частей привода современных машин, имеют исключительно широкое применение во всех отраслях машиностроения, приборостроения и других видов промышленности Украины. В современной технике применяются различные системы зацепления, однако господствующей является эвольвентная система, геометрическая теория которой была заложена двести лет назад в России Леонардом Эйлером. При эвольвентном зацеплении поверхность зуба одного колеса является огибающей [2] семейства поверхностей зуба другого колеса в относительном движении, а линия касания является дискриминантной линией этого семейства. В этом случае, по поверхности одного зуба, а также заданному относительному расположению осей вращения и соотношению угловых скоростей однозначно определяется геометрия сопряженной поверхности.

Существуют другие методы аналитического построения сопряженных поверхностей, напр. метод Х.И. Гохмана, Б.А. Гессена и др.

По методу Б.А. Гессена [1] поверхность зуба состоит из некоторой последовательности линий, след которых при вращении поверхности в неподвижном пространстве дает новую поверхность, являющуюся обобщенной разверткой поверхности зуба. При обратном вращении развертки в пространстве колеса семейство линий на развертке описывает поверхность зуба. Развертки поверхностей зубьев имеют одну общую линию

Цель. Сочетание образований Б.А. Гессена с методами векторного анализа позволяет вести исследование зубчатых передач Новикова [4]; вскрывать и исследовать многие дифференциальные свойства поверхностей около точек контакта.

Решение. Зубчатое колесо А находится в зацеплении с зубчатым колесом В. Поверхность $П_a$ колеса А с поверхностью $П_b$ колеса В имеет общую точку M (для передач ОЛЗ), или две (для передач ДЛЗ). Выделим основную неподвижную прямоугольную систему декартовых координат $O_o x_o y_o z_o$. Тогда $\overrightarrow{r_a}$ - радиус-вектор точки M в системе координат; $\overrightarrow{V_a}$ -скорость точки M на поверхности $П_a$.

$$\vec{V}_a = \vec{\omega}_a \times \vec{r}_a .$$

С колесом А связано пространство Q_A; с колесом В - Q_B и с неподвижным пространством полюсной системы- Q_p. Выделим в Q_p гладкую класса C^2 кривую Γ_λ. В произвольной точке M, положение которой определяется длиной дуги S_λ, единичные векторы основного триэдра [5] есть $\overrightarrow{\tau_\lambda}$, $\overrightarrow{n_\lambda}$, $\overrightarrow{b_\lambda}$ и вектор Дарбу:

$$\overset{\circ}{\vec{\aleph}}_\lambda = \vec{\tau}_\lambda T_\lambda + \vec{b}_\lambda K_\lambda ,$$

где T_λ и K_λ - кручение и кривизна кривой Γ_λ.

В реальной передаче [3] пространства Q_A и Q_p находятся в относительном движении так, что Q_A вращается относительно Q_p с угловой скоростью $\overrightarrow{\omega_a}$. Сообщим системе пространств Q_A и Q_p угловую скорость $-\omega_a$. Тогда Q_A окажется неподвижным, а Q_p - вращающимся с угловой скоростью $-\omega_a$. Точка M кривой Γ_λ участвует в двух движениях: одно из которых есть перемещение вдоль кривой Γ_λ; другое- вращение вместе с Q_p с угловой скоростью $-\omega_a$. В результате такого движения точка M опишет в Q_A некоторую кривую Γ_ν, которая пересекается с кривой Γ_λ в точке M. Характер кривой Γ_ν зависит от характера кривой Γ_λ и от закона движения точки M по кривой Γ_ν. Кривая Γ_ν является отображением кривой Γ_λ в пространстве Q_A, причем это отображение является обобщенной разверткой кривой Γ_λ. Аналогично до вышеизложенного, вводим в рассмотрение вектор Дарбу $\overrightarrow{\overset{\circ}{\aleph}_\nu}$, связанный с кривой Γ_ν с помощью основного триэдра. Если бы в самом начале была выделена кривая Γ_ν в пространстве Q_A и определено на ней движение точки M, то при вращении Q_A с угловой скоростью $\overrightarrow{\omega_a}$ относительно пространства Q_p в последнем следом точки M была бы кривая Γ_λ. Это означает, что кривые Γ_λ и Γ_ν

взаимно обратимы, т.е. одна является обобщенной разверткой другой при соответствующем относительном вращении пространств Q_A и Q_p.

Рассмотрим теперь систему пространств Q_p и Q_B, последнее из которых вращается относительно первого с угловой скоростью $\overrightarrow{\omega_B}$. Точка M опишет в пространстве Q_B некоторую новую кривую Γ_μ, которая также будет обобщенной разверткой линии Γ_λ в пространстве Q_B. Движение точки M на кривой Γ_μ определено функциональной зависимостью $S_\mu = S_\mu(t)$. В точке M выделяются вектора основного триэдра и вектор Дарбу $\overrightarrow{\aleph^\circ_\mu}$.

В пространстве Q_p двигается некоторая линия Γ_α, все время пересекая в точке M линию Γ_λ. Ввиду того, что образующая Γ_α все время пересекает в точке M направляющую Γ_λ, отнесем линию Γ_α к системе координат пространства Q°_λ основного триэдра кривой Γ_λ. В точке M образующая имеет единичные вектора основного триэдра и вектор Дарбу $\overrightarrow{\aleph^\circ_\alpha}$. В системе Q°_λ скорость точки кривой Γ_α, совпадающей в данный момент с точкой M, может отличатся от скорости $\overrightarrow{V_\lambda}$ за счет скольжения вдоль $\overrightarrow{\tau_\alpha}$. Но тогда можно выбрать другую нулевую направляющую, такую чтобы скольжение кривой Γ_α по направлению $\overrightarrow{\tau_\alpha}$ отсутствовало. Пусть такой нулевой направляющей является Γ_α. Положение произвольной точки M^* кривой Γ_α определяется в системе Q°_λ радиус-вектором $\overrightarrow{\rho_\alpha}$, проведенным из точки M в точку M^*. При неизменном положении точки M радиус-вектор $\overrightarrow{\rho_\alpha}$ будет функцией дуги S_α кривой Γ_α, изменяемой от точки M до точки M^*. При движении же точки M, т.е. с изменением дуги S_λ, одна и та же точка M^* (S_α=const) будет в общем случае менять свое положение в пространстве Q°_λ. Следовательно, радиус-вектор $\overrightarrow{\rho_\alpha}$ в общем случае должен быть функцией двух дуг S_α и S_λ. Тогда абсолютный радиус-вектор $\overrightarrow{r^*_\lambda}$ точки M^* будет

$$\bar{r}^*_\lambda = \bar{r}_\lambda(S_\lambda) + \bar{\rho}_\alpha(S_\lambda, S_\alpha). \tag{1}$$

При движении вдоль Γ_λ кривая Γ_α может вращаться и деформироваться в пространстве Q°_λ.

Иначе говоря, если определить движение точки M во времени $S_\lambda = S_\lambda(t)$ и рассматривать одну и ту же точку M^* линии Γ_α, то для нее будет:

$$\overrightarrow{V_{\lambda^*}} = \overrightarrow{V_\lambda} + \left(\overrightarrow{\omega_{\alpha\lambda}} + \overrightarrow{\aleph^\circ_\lambda}\frac{dS_\lambda}{dt}\right) \times \overrightarrow{\rho_\alpha} + \frac{\partial\overrightarrow{\rho_\alpha}}{\partial\varepsilon_\alpha}\varepsilon_\alpha,$$

где $\overrightarrow{V_\lambda} = \dfrac{d\overrightarrow{r_{\lambda^*}}}{dt} = \overrightarrow{\tau_{\lambda^*}}\dfrac{dS_{\lambda^*}}{dt}$ - скорость движения точки M^* (S_α=const); $\overrightarrow{\omega_{\alpha\lambda}}$ – угловая скорость вращения кривой Γ_α относительно Q°_λ; ε_α – параметр, учитывающий деформацию кривой Γ_α.

Кривую Γ_α можно выбрать так, что одновременно будут выполняться два равенства:

$$\overrightarrow{\omega_{\alpha\lambda}} = 0;\ \varepsilon_\alpha = 0,$$

т.е. кривая Γ_α остается неподвижной в пространстве Q°_λ.

Уравнение (1) задает некоторую поверхность $П_\alpha$, которую можно представить набором движущихся кривых Γ_α, если произвести замену $S_\lambda(t)$:

$$\overrightarrow{r^*_\lambda} = \overrightarrow{r_\lambda}(t) + \overrightarrow{\rho_\alpha}(S_\alpha, t).$$

Рассмотрим систему пространств Q_p и Q_A, последнее из которых вращается относительно первого с угловой скоростью $\overrightarrow{\omega_a}$. Сообщим системе угловую скорость $-\overrightarrow{\omega_a}$. Пространство Q_A окажется неподвижным, а пространство Q_p – вращающимся с угловой скоростью $-\overrightarrow{\omega_a}$. Отметим в Q_A след линии Γ_α при ее движении вдоль Γ_λ и одновременном вращении вместе с Q_p с угловой скоростью $-\overrightarrow{\omega_a}$. В результате такого сложного движения в Q_A определится набор кривых Γ_α в виде поверхности $П_a$. Эта поверхность является обобщенной разверткой поверхности $П_a$- поверхности зуба колеса А. Поверхности $П_\alpha$ и $П_a$ взаимны, т.е. если одна из поверхностей $П_\alpha$ и $П_a$ является разверткой другой при прямом движении Q_p

и Q_A, то при обратном движении Q_p и Q_A поверхности $П_α$ и $П_а$ меняются ролями. Поэтому поверхность $П_а$ будем называть поверхностью зуба колеса А; поверхность $П_α$ – разверткой поверхности $П_а$.

Аналогично рассуждая получаем радиус-вектор поверхности $П_β$, являющейся обобщенной разверткой поверхности $П_в$ зуба колеса В.

В работающей передаче существуют такие области $\overset{\circ}{\Sigma}$, в которых пара поверхностей зубьев $П_а$ и $П_в$ разных колес имеют одну (для передач ОЛЗ) и две (для передач ДЛЗ) точки контакта. Более того, контакт между этими поверхностями внутри указанной области должен быть непрерывным, в противном случае положение ведомого колеса оказывается неопределенным [6]. В таком случае мы можем в полюсном пространстве отметить след точки контакта поверхностей. В результате получим линию зацепления – нулевую направляющую Γ_λ.

Выводы. Методом вспомогательных поверхностей, выделенных в полюсном пространстве, с помощью преобразования в виде обобщенной развертки, образованы поверхности зубьев обоих колес.
Такого типа образования, применительно к цилиндрическим передачам Новикова ДЛЗ, дают возможность получить такие локально-дифференциальные характеристики передачи как деривационные соотношения, которые являются теоретической базой для гидродинамики смазки передачи.

Список литературы. **1.** *Гессен Б.А.* Аналитический метод исследования пространственных зацеплений. Труды семинара по теории машин и механизмов, вып. 19, АН СССР, 1949. **2.** *Залгаллер В.А.* Теория огибающих. – М.: Наука, 1975. – 102 с.**3.** *Короткин В.И., Дорожкин В.Н.* О некоторых геометрических особенностях зубчатых передач зацеплением Новикова // Проблемы качества и эффективности технологии изготовления зубчатых передач. тез. докл. конф.- Омск, ОПИ, 1979.- С.50-53. **4.** *Новиков М.Л.* Зубчатые передачи с новым зацеплением. ВВИА, Москва, 1958. **5.** *Фавар Ж.* Курс локальной дифференциальной геометрии. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.- 123с. **6.** *Wu X., Song X., Liu H.* A New method in curvature calculation of the conjugate gear surfaces in 3-d meshing. Mathematical theory and applications // Vol. 23. №3, 2003.-p. 49-52.

Поступила в редакцию 22.05.07