

**А.Ф. КИРИЧЕНКО**, д-р. техн. наук, НТУ «ХПИ»  
**Ю.О. КОПОТЬ**, асп., НТУ «ХПИ»

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ДИНАМИКИ ШЕВРОННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ НОВИКОВА ДЗП.

У статті розглянуті геометро-кінематична та математична моделі для дослідження внутрішньої динаміки передач Новикова шевроного виконання ДЗП. Показані принципіальні відмінні математичних моделей звичайного та шевроної передачі Новикова ДЗП.

The geometric and kinematical model for investigation of the inner dynamics of the Novikov gears of herringbone type with two lines engagement is presented. The differences between mathematical models of common and herringbone Novikov gears with two lines engagement are shown.

С момента появления передач Новикова [1] прошло 50 лет. За этот период передачи Новикова показали, что их применение в отдельных механизмах практически решает возникшие проблемы. В связи с этим передачи Новикова были подвергнуты большому количеству разносторонних исследований. Однако, как не странно, созданные передачи для решения контактных проблем, проверялись именно на контактную прочность зубьев. Проводились и другие испытания. Но динамическим испытаниям передачи Новикова практически не подвергались, хотя со всей очевидностью было ясно, что именно эти исследования следовало проводить в первую очередь, поскольку эти передачи от других отличались по геометрии, кинематике, жесткостным характеристикам, реализации погрешностей изготовления и монтажа и рядом других параметров. Поэтому отсутствие практических рекомендаций в этой области долгое время не позволяло использовать передачи Новикова в крупных быстроходных редукторах. Следует здесь подчеркнуть, что некоторые неудачи, встречающиеся при промышленном внедрении передач Новикова, явились следствием недостаточности исследования динамики передач Новикова, особенно ДЛЗ.

Заметим, что, несмотря на это, исследованию динамики эвольвентных зубчатых передач уделялось достаточное внимание [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Как показали исследования и опыт эксплуатации, прямое использование этих результатов для оценки динамики зацепления Новикова не может быть корректным. Как известно, образование сопряженных поверхностей зубьев с зацеплением Новикова основано на принципе контактных линий при первоначальном точечном контакте [1]. Для цилиндрических зубчатых колес с параллельными осями контактные линии расположены на цилиндрах строго определенного радиуса. Эти соображения, прежде всего и легли в основу построения математической модели обычной передачи Новикова [10, 11, 12]. Из рассмотрения кинематической схемы такой передачи вытекает, что для получения шевронной передачи, достаточно обычную передачу геометрически и кинематически отобразить симметрично относительно одного из ее торцов, в результате чего получим кинематическую схему шевронной передачи, которая представлена на рис.1. Здесь введены следующие обозначения:  $I_1$  – момент инерции источника энергии,  $n_1$  – число оборотов привода,  $M_1$  – крутящий момент на валу двигателя,  $\varphi_1$  – обобщенная координата массы двигателя,  $x_{uz}$  – система координат,  $I_{ш}$  – момент инерции шестерни,  $O_{ш}$  – центр тяжести шестерни, который теперь в отличие от [10] расположен в торцовом сечении шестерни, проходящем через проточку между зубьями,  $O_{ш}^*$  – центр тяжести шестерни в отклоненном положении,  $x_{ш}$  – обобщенная координата,  $\psi_{ш}$  – обобщенная координата,  $C_{ш}^n$  и  $C_{ш}^n$  – жесткости опор шестерни,  $C_1$  – крутильная жесткость соединительного вала,  $I_k$  – момент инерции колеса,  $O_k$  – центр тяжести колеса,  $O_k^*$  – отклоненное положение центра тяжести колеса,  $x_k$  – обобщенная координата,  $\psi_k$  – обобщенная координата,  $\varphi_k$  – обобщенная координата,  $C_k^n$  и  $C_k^n$  – жесткости опор колеса,  $C_4$  – жесткость соединительного вала,  $I_4$  – момент инерции исполнительного органа,  $n_4$  – число оборотов исполнительного органа,  $M_4$  – крутящий момент на валу исполнительного органа,  $z_k$  – координатная ось,  $\varphi_4$  – обобщенная координата исполнительного органа,  $C_3$  – приведенная жесткость к точке контакта шестерни с колесом в данной фазе зацепления.

Заметим, что на данном этапе исследований, явлениями в горизонтальной плоскости пренебрегаем.

При сделанных допущениях и обозначениях из анализа системы вытекает, что данная динамическая модель определяется восьмью обобщенными координатами.

Опираясь на контактные винтовые линии, моделирование упругой связи непосредственно в зацеплении зубчатых колес осуществлено с помощью пружинки кинематически соответствующих точке контакта зубьев и геометрически расположенных в нужном месте (рис. 2). Эта модель получена в виде проекции зацепления на фронтальную плоскость проекций, где символом  $h$  отображены диссипативные явления в зацеплении.

Каждой пружинкой здесь моделируется вполне конкретная точка контакта зубьев в конкретной фазе зацепления и имеющая в данный момент времени конкретную приведенную погрешность и контактную жесткость, которая по ширине зубчатого венца (полушеврона) функционально меняется. Светлые точки относятся к доплюсовой линии зацепления, черные – к заплусовой. На каждой из линий зацепления пружины расположены друг относительно друга на расстоянии  $p_x$ (осевой шаг зацепления), а смещение по

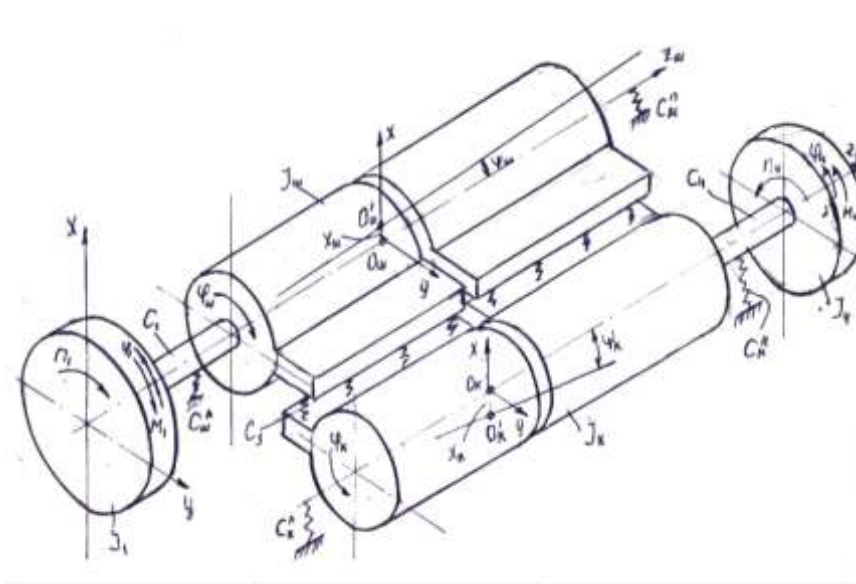


Рис. 1

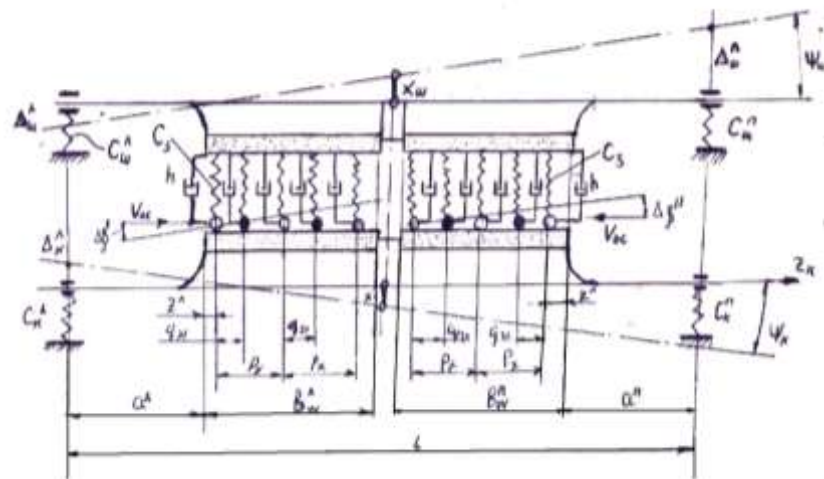


Рис. 2

$q_{2i}$ (осевое смещение). Согласно [1] точки контакта перемещаются вдоль линии зацепления, т.е. параллельно осям вращения  $z_u$  и  $z_k$  со скоростью

$$V_{oc} = \frac{\pi n_i}{30} R_i \operatorname{ctg} \beta \quad (i = u, k), \quad (1)$$

где  $n_i$  – частота вращения соответствующей массы;  $R_i$  – радиус цилиндра;  $\beta$  – угол линии зуба на начальном цилиндре;  $R_i = \frac{z_i m}{2 \cos \beta}$ ;  $m$  – нормальный модуль зацепления.

Таким образом, введенная параметризация в рассматриваемой модели по геометрическим, кинематическим и динамическим характеристикам адекватна действительности и полностью позволяет составить дифференциальные уравнения движения при малых колебаниях для всей системы. В основу для составления этих уравнений положено дифференциальное уравнение Лагранжа второго рода, имеющее следующий общий вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i(t) - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы;  $\Pi$  – потенциальная энергия системы;  $Q_i$  – обобщенная сила, соответствующая  $i$ -той обобщенной координате;  $\Phi$  – диссипативная функция Релея;  $q_i$  –  $i$ -я обобщенная координата;  $\dot{q}_i$  – скорость  $i$ -той обобщенной координаты;  $t$  – время, отсчитываемое от момента каждого пересопряжения.

Выражение для кинетической энергии системы, являющееся квадратичной функцией обобщенных скоростей, имеет вид:

$$2T = I_1 \dot{\phi}_1^2 + I_u \dot{\phi}_u^2 + I'_u \dot{\psi}_u^2 + I_k \dot{\phi}_k^2 + I'_k \dot{\psi}_k^2 + m_u \dot{x}_u^2 + m_k \dot{x}_k^2 + I_4 \dot{\phi}_4^2, \quad (3)$$

где  $I'_u$  и  $I'_k$  – моменты инерции соответственно шестерни и колеса относительно оси  $y$ , соединяющей центры масс  $O_u$  и  $O_k$ ;

$$I'_u = \frac{m_u r_{uu}^2}{2}; \quad I'_k = \frac{m_k r_{uk}^2}{2}, \quad (4)$$

где  $m_u$  и  $m_k$  – масса шестерни и колеса соответственно;  $r_{uu}$  – радиус инерции шестерни относительно оси  $O_u O_k$ ;  $r_{uk}$  – радиус инерции колеса относительно оси  $O_u O_k$ ;

$$r_{uu} = \sqrt{\frac{b_w^2 + b_w^2 + 3R_u^2}{12}} \quad (5)$$

$$r_{uk} = \sqrt{\frac{b_w^2 + b_w^2 + 3R_k^2}{12}} \quad (6)$$

Потенциальную энергию целесообразно представить в виде суммы слагаемых

$$P = P_{on} + P_{e1} + P_{e4} + P_3 \quad (7)$$

где  $P_{on}$  – потенциальная энергия опор;  $P_{e1}$  – потенциальная энергия ведущего вала;  $P_{e4}$  – потенциальная энергия ведомого вала;  $P_3$  – потенциальная энергия зацепления.

Потенциальная энергия опор может быть представлена выражением:

$$2P_{on} = C_u^a (\Delta_u^a)^2 + C_u^n (\Delta_u^n)^2 + C_k^a (\Delta_k^a)^2 + C_k^n (\Delta_k^n)^2 \quad (8)$$

Из рис. 2 вытекает соотношение между деформациями опор, геометрическими размерами передачи и соответствующими обобщенными координатами

$$\begin{aligned} \Delta_u^a &= x_u - \psi_u \left( a^a + b_w^a + \frac{\delta}{2} \right); \quad \Delta_k^a = x_k + \psi_k \left( a^a + b_w^a + \frac{\delta}{2} \right); \\ \Delta_u^n &= x_u + \psi_u \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right); \quad \Delta_k^n = x_k - \psi_k \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) через  $\delta$  обозначена ширина проточки между полушевронами.

Потенциальная энергия ведущего и ведомого валов имеет вид

$$2(P_{e1} + P_{e4}) = C_1 (\varphi_1 - \varphi_u)^2 + C_4 (\varphi_k - \varphi_4)^2 \quad (10)$$

Слагаемое  $P_3$  в (7) представляет собой в данный момент суммарную потенциальную энергию деформации зацепления с учетом возможных погрешностей и фазы зацепления. Тогда для левого и правого полушевров в развернутом виде его можно представить следующим выражением

$$\begin{aligned} 2P_3^a &= C_3 (z^a) \left[ \varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \Delta\beta' z^a + x_u - x_k + z^a (\psi_u - \psi_k) \right]_-^2 + \\ &+ C_3 (z^a + q_{21}) \left[ \varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \Delta\beta' (z^a + q_{21}) + x_u - x_k + (z^a + q_{21}) (\psi_u - \psi_k) \right]_-^2 + \\ &+ C_3 (z^a + p_x) \left[ \varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \Delta\beta' (z^a + p_x) + x_u - x_k + (z^a + p_x) (\psi_u - \psi_k) \right]_-^2 + \\ &+ C_3 (z^a + p_x + q_{21}) \left[ \varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \Delta\beta' (z^a + p_x + q_{21}) + x_u - x_k + \right. \\ &\quad \left. + (z^a + p_x + q_{21}) (\psi_u - \psi_k) \right]_-^2 + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) первое слагаемое выражает потенциальную энергию одной конкретной точки контакта по доплюсной линии зацепления и находящейся на расстоянии  $z^a$  от левого торца, а также учитывающей ее жесткость, реализуемую в этой фазе, погрешность линии зуба  $\Delta\beta$  и податливость опор. Второе слагаемое представляет потенциальную энергию точки контакта того же зуба, но по заплуюсной линии зацепления и учитывающей те же условия, что и первое. В зависимости от сочетания  $p_x$ ,  $q_{21}$  и  $b_w^a$  в зацеплении могут находиться несколько пар зубьев одновременно. поэтому в (11) третий член выражает потенциальную энергию точки контакта второй пары зубьев (за первой) по доплюсной линии зацепления, а четвертое – точки контакта второй пары зубьев, но уже по заплуюсной линии зацепления. Учитывая возможные варианты, когда в зацеплении одновременно могут находиться 1, 2, 3, 4 и т.д. пары зубьев (турбинные передачи) выражение (11) можно представить в самом общем виде:

$$\begin{aligned} 2P_3^a &= \sum_i \sum_j \{ A_{ij} C_3 \left[ \varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \Delta\beta' (z^a \pm (i-1)p_x) + x_u - \right. \\ &\quad \left. - x_k + (z^a \pm (i-1)p_x) (\psi_u - \psi_k) \right]_-^2 + \{ A_{ij} C_3 \left[ \varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \Delta\beta' (z^a \pm (i-1)p_x + q_{21}) + \right. \\ &\quad \left. \times [\varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \Delta\beta' (z^a \pm (i-1)p_x + q_{21}) + x_u - x_k + \right. \\ &\quad \left. + (z^a \pm (i-1)p_x + q_{21}) (\psi_u - \psi_k) \right]_-^2 \} \end{aligned} \quad (12)$$

Сочетание знаков « $\pm$ » при  $p_x$  введено для того, чтобы осуществлять проверку не только на  $-p_x$ , т.е. на последующую пару зубьев, входящих в зацепление, но и на  $+p_x$  – для определения вышла ли предыдущая пара из зацепления (при количестве одновременно находящихся в зацеплении пар зубьев, превышающих 3).

Коэффициенты  $A_{1j}$  и  $A_{2j}$ , отслеживающие точку контакта реально находящуюся в зацеплении, и принимающие в связи с этим значения 0 и 1 (по доплюсной и заплуюсной линиям соответственно).

Аналогично запишем потенциальную энергию зацепления для правого полушеврона, учитывая при этом, что движение здесь происходит справа налево (рис. 2). Тогда

$$\begin{aligned}
2\Pi_3^n = & C_3(z^n) \overline{\varphi_w R_w - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta'' z^n + x_w - x_\kappa - z^n(\psi_w - \psi_\kappa)}^{\overline{-}} + \\
& + C_3(z^n + q_{21}) \overline{\varphi_w R_w - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta''(z^n + q_{21}) + x_w - x_\kappa - (z^n + q_{21})(\psi_w - \psi_\kappa)}^{\overline{-}} + \\
& + C_3(z^n + \rho_x) \overline{\varphi_w R_w - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta''(z^n + \rho_x) + x_w - x_\kappa - (z^n + \rho_x)(\psi_w - \psi_\kappa)}^{\overline{-}} + \\
& + C_3(z^n + \rho_x + q_{21}) \overline{[\varphi_w R_w - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta''(z^n + \rho_x + q_{21}) + x_w - x_\kappa - \\
& - (z^n + \rho_x + q_{21})(\psi_w - \psi_\kappa)]^2}^{\overline{-}} + \dots
\end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично с (11) в (13) первый член выражает потенциальную энергию первой (справа на правом полушевроне) точки контакта по доплюсной линии зацепления, второй – первой по заплуюсной, третий – второй по доплюсной, четвертый – второй по заплуюсной и т.д. Выражение (13) аналогично с (11) можно представить в следующем общем виде:

$$\begin{aligned}
2\Pi_3^n = & \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{L}^n \pm (i-1)p_x \overline{[\varphi_w R_w - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta''(z^n \pm (i-1)p_x) + x_w - \\
& - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x)(\psi_w - \psi_\kappa)]^2}^{\overline{-}} + \{A_{ij} C_3 \mathfrak{L}^n \pm (i-1)p_x + q_{21} \overline{\times} \\
& \times [\varphi_w R_w - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta''(z^n \pm (i-1)p_x + q_{21}) + x_w - x_\kappa - \\
& + (z^n \pm (i-1)p_x + q_{21})(\psi_w - \psi_\kappa)]^2}^{\overline{-}}
\end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, выражение для полной потенциальной энергии системы принимает вид:

$$\begin{aligned}
2\Pi = & C_u^n \left( x_w - \psi_w \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right) \right)^2 + C_u^n \left( x_w + \psi_w \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right) \right)^2 + \\
& + C_\kappa^n \left( x_\kappa + \psi_\kappa \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right) \right)^2 + C_\kappa^n \left( x_\kappa - \psi_\kappa \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right) \right)^2 + \\
& + C_1(\varphi_1 - \varphi_4)^2 + C_4(\varphi_\kappa - \varphi_4)^2 + \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 (z^n \pm (i-1)p_x) [\varphi_w R_w - \varphi_\kappa R_\kappa + \\
& + \Delta\beta''(z^n \pm (i-1)p_x) + x_w - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x)(\psi_w - \psi_\kappa)]^2 + \\
& + \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{L}^n \pm (i-1)p_x + q_{21} \overline{[\varphi_w R_w - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta''(z^n \pm (i-1)p_x + q_{21}) + \\
& + x_w - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x + q_{21})(\psi_w - \psi_\kappa)]^2}^{\overline{-}} + \\
& + \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{L}^n \pm (i-1)p_x \overline{[\varphi_w R_w - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta''(z^n \pm (i-1)p_x) + \\
& + x_w - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x)(\psi_w - \psi_\kappa)]^2}^{\overline{-}} + \\
& + \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{L}^n \pm (i-1)p_x + q_{21} \overline{[\varphi_w R_w - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta''(z^n \pm (i-1)p_x + q_{21}) + \\
& + x_w - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x + q_{21})(\psi_w - \psi_\kappa)]^2}^{\overline{-}}
\end{aligned} \quad (15)$$

В (15) следует принимать «i» соответствующее количеству осевых шагов в полушевроне, а  $j = 1$  или  $j = 2$  соответственно доплюсная и заплуюсная контактные линии.

Диссипативная функция Релея принята в следующем виде:

$$2\Phi = h'_3 \dot{\varphi}_3^2 + h'_u \dot{\varphi}_u^2 + h_u^n (\dot{\Delta}_u^n)^2 + h_\kappa^n (\dot{\Delta}_u^n)^2 + h_\kappa^n (\dot{\Delta}_\kappa^n)^2 + h_\kappa^n (\dot{\Delta}_\kappa^n)^2, \quad (16)$$

где  $h'_3, h'_u, h_u^n, h_\kappa^n, h_\kappa^n, h_\kappa^n$  – коэффициенты диссипации.

Обобщенные силы найдены как частные производные по обобщенным координатам от выражения для виртуальной работы и не зависят от вида зацепления:

$$Q(t) = P_u^n \Delta_u^n + P_u^n \Delta_u^n + P_\kappa^n \Delta_\kappa^n - P_\kappa^n \Delta_\kappa^n + \varphi_1 M_1 - \varphi_w M_1 - \varphi_4 M_4 + \varphi_\kappa M_4, \quad (17)$$

где  $P_u^n$  – реакция левой опоры шестерни;  $P_u^n$  – реакция правой опоры шестерни;  $P_\kappa^n$  – реакция левой опоры колеса;  $P_\kappa^n$  – реакция правой опоры колеса.

При использовании уравнений (16) и (17) в (2) необходимо  $\Delta_u^n, \Delta_u^n, \Delta_\kappa^n, \Delta_\kappa^n$  заменить выражениями (9).

Выполняя в (3), (15), (16) и (17) дифференцирование по обобщенным координатам в соответствии с (2) и подставляя в последнее полученные результаты, будем иметь систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которая отражает динамическое состояние зубчатой передачи с присоединенными массами:

$$\begin{aligned}
& I_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1 - \varphi_4) - M_1 = 0; \\
& I_u \ddot{\varphi}_u + \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 (z^n \pm (i-1)p_x) R_w [\varphi_w R_w - \varphi_\kappa R_\kappa + \\
& + \Delta\beta''(z^n \pm (i-1)p_x) + x_w - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x)(\psi_w - \psi_\kappa)]^2 + \\
& + \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{L}^n \pm (i-1)p_x + q_{21} \overline{R_w} [\varphi_w R_w - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta''(z^n \pm (i-1)p_x + q_{21}) + \\
& + x_w - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x + q_{21})(\psi_w - \psi_\kappa)]^2 + \\
& + \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{L}^n \pm (i-1)p_x \overline{R_w} [\varphi_w R_w - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta''(z^n \pm (i-1)p_x) + \\
& + x_w - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x)(\psi_w - \psi_\kappa)]^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{E}^n \pm (i-1)p_x + q_{21} \overline{R}_u [\varphi_u R_u - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta^n(z^n \pm (i-1)p_x + q_{21}) + \\
& + x_u - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x + q_{21})(\psi_u - \psi_\kappa)]\}^2 + h'_u \dot{\varphi}_u + M_1 = 0; \\
& I_\kappa \ddot{\varphi}_\kappa - \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 (z^n \pm (i-1)p_x) R_\kappa [\varphi_u R_u - \varphi_\kappa R_\kappa + \\
& + \Delta\beta'(z^n \pm (i-1)p_x) + x_u - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x)(\psi_u - \psi_\kappa)]\}^2 - \\
& - \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{E}^n \pm (i-1)p_x + q_{21} \overline{R}_\kappa [\varphi_u R_u - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta'(z^n \pm (i-1)p_x + q_{21}) + \\
& + x_u - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x + q_{21})(\psi_u - \psi_\kappa)]\}^2 - \\
& - \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{E}^n \pm (i-1)p_x \overline{R}_\kappa [\varphi_u R_u - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta^n(z^n \pm (i-1)p_x) + \\
& + x_u - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x)(\psi_u - \psi_\kappa)]\}^2 - \\
& - \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{E}^n \pm (i-1)p_x + q_{21} \overline{R}_\kappa [\varphi_u R_u - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta^n(z^n \pm (i-1)p_x + q_{21}) + \\
& + x_u - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x + q_{21})(\psi_u - \psi_\kappa)]\}^2 + h'_\kappa \dot{\varphi}_\kappa - M_4 = 0; \\
& I'_u \ddot{\psi}_u - C'_u \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \left( x_u - \psi_u \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \right) + \\
& + C'_u \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \left( x_u + \psi_u \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \right) + \\
& + \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 (z^n \pm (i-1)p_x) [\varphi_u R_u - \varphi_\kappa R_\kappa + \\
& + \Delta\beta'(z^n \pm (i-1)p_x) + x_u - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x)(\psi_u - \psi_\kappa)]\} + \\
& + \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{E}^n \pm (i-1)p_x + q_{21} [\varphi_u R_u - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta'(z^n \pm (i-1)p_x + q_{21}) + \\
& + x_u - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x + q_{21})(\psi_u - \psi_\kappa)]\} + \\
& + \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{E}^n \pm (i-1)p_x [\varphi_u R_u - \varphi_\kappa R_\kappa - \Delta\beta^n(z^n \pm (i-1)p_x) + \\
& + x_u - x_\kappa - (z^n \pm (i-1)p_x)(\psi_u - \psi_\kappa)]\} + \\
& + \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{E}^n \pm (i-1)p_x + q_{21} [\varphi_u R_u - \varphi_\kappa R_\kappa - \Delta\beta^n(z^n \pm (i-1)p_x + q_{21}) + \\
& + x_u - x_\kappa - (z^n \pm (i-1)p_x + q_{21})(\psi_u - \psi_\kappa)]\} + P'_u \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) - \\
& - P'_u \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) - h'_u \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \left( \dot{x}_u - \dot{\psi}_u \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \right) + \\
& + h'_u \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \left( \dot{x}_u + \dot{\psi}_u \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \right) = 0; \\
& I'_\kappa \ddot{\psi}_\kappa - C'_\kappa \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \left( x_\kappa - \psi_\kappa \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \right) + \\
& + C'_\kappa \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \left( x_\kappa + \psi_\kappa \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \right) - \\
& - \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 (z^n \pm (i-1)p_x) [\varphi_u R_u - \varphi_\kappa R_\kappa + \\
& - \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{E}^n \pm (i-1)p_x + q_{21} [\varphi_u R_u - \varphi_\kappa R_\kappa + \Delta\beta'(z^n \pm (i-1)p_x + q_{21}) + \\
& + x_u - x_\kappa + (z^n \pm (i-1)p_x + q_{21})(\psi_u - \psi_\kappa)]\} - \\
& - \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{E}^n \pm (i-1)p_x [\varphi_u R_u - \varphi_\kappa R_\kappa - \Delta\beta^n(z^n \pm (i-1)p_x) + \\
& + x_u - x_\kappa - (z^n \pm (i-1)p_x)(\psi_u - \psi_\kappa)]\} - \\
& - \sum_i \sum_j \{A_{ij} C_3 \mathfrak{E}^n \pm (i-1)p_x + q_{21} [\varphi_u R_u - \varphi_\kappa R_\kappa - \Delta\beta^n(z^n \pm (i-1)p_x + q_{21}) + \\
& + x_u - x_\kappa - (z^n \pm (i-1)p_x + q_{21})(\psi_u - \psi_\kappa)]\} - P'_\kappa \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) - \\
& - P'_\kappa \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) + h'_\kappa \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \left( \dot{x}_\kappa + \dot{\psi}_\kappa \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \right) - \\
& - h'_\kappa \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \left( \dot{x}_\kappa - \dot{\psi}_\kappa \left( a^n + b'_W + \frac{\delta}{2} \right) \right) = 0;
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
& m_u \ddot{x}_u + C_u^n \left( x_u - \psi_u \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right) \right) + C_u^n \left( x_u + \psi_u \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right) \right) + \\
& \quad + \sum_i \sum_j \{ A_{ij} C_3 (z^n \pm (i-1) p_x) [\varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \\
& \quad + \Delta \beta' (z^n \pm (i-1) p_x) + x_u - x_k + (z^n \pm (i-1) p_x) (\psi_u - \psi_k)] \} + \\
& \quad + \sum_i \sum_j \{ A_{ij} C_3 \mathfrak{K}^n \pm (i-1) p_x + q_{21} [\varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \Delta \beta' (z^n \pm (i-1) p_x + q_{21}) + \\
& \quad + x_u - x_k + (z^n \pm (i-1) p_x + q_{21}) (\psi_u - \psi_k)] \} + \\
& \quad + \sum_i \sum_j \{ A_{ij} C_3 \mathfrak{K}^n \pm (i-1) p_x [\varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \Delta \beta'' (z^n \pm (i-1) p_x) + \\
& \quad + x_u - x_k + (z^n \pm (i-1) p_x) (\psi_u - \psi_k)] \} + \\
& \quad + \sum_i \sum_j \{ A_{ij} C_3 \mathfrak{K}^n \pm (i-1) p_x + q_{21} [\varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \Delta \beta'' (z^n \pm (i-1) p_x + q_{21}) + \\
& \quad + x_u - x_k + (z^n \pm (i-1) p_x + q_{21}) (\psi_u - \psi_k)] \} - P_u^n - \\
& \quad - P_u^n + h_u^n \left( \dot{x}_u - \dot{\psi}_u \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right) \right) + h_u^n \left( \dot{x}_u - \dot{\psi}_u \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right) \right) = 0; \\
& m_k \ddot{x}_k + C_k^n \left( x_k - \psi_k \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right) \right) + C_k^n \left( x_k + \psi_k \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right) \right) - \\
& \quad - \sum_i \sum_j \{ A_{ij} C_3 (z^n \pm (i-1) p_x) [\varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \\
& \quad + \Delta \beta' (z^n \pm (i-1) p_x) + x_u - x_k + (z^n \pm (i-1) p_x) (\psi_u - \psi_k)] \} - \\
& \quad - \sum_i \sum_j \{ A_{ij} C_3 \mathfrak{K}^n \pm (i-1) p_x + q_{21} [\varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \Delta \beta' (z^n \pm (i-1) p_x + q_{21}) + \\
& \quad + x_u - x_k + (z^n \pm (i-1) p_x + q_{21}) (\psi_u - \psi_k)] \} - \\
& \quad - \sum_i \sum_j \{ A_{ij} C_3 \mathfrak{K}^n \pm (i-1) p_x [\varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \Delta \beta'' (z^n \pm (i-1) p_x) + \\
& \quad + x_u - x_k + (z^n \pm (i-1) p_x) (\psi_u - \psi_k)] \} - \\
& \quad - \sum_i \sum_j \{ A_{ij} C_3 \mathfrak{K}^n \pm (i-1) p_x + q_{21} [\varphi_u R_u - \varphi_k R_k + \Delta \beta'' (z^n \pm (i-1) p_x + q_{21}) + \\
& \quad + x_u - x_k + (z^n \pm (i-1) p_x + q_{21}) (\psi_u - \psi_k)] \} - P_k^n + \\
& \quad + P_k^n + h_k^n \left( \dot{x}_k - \dot{\psi}_k \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right) \right) + h_k^n \left( \dot{x}_k - \dot{\psi}_k \left( a^n + b_w^n + \frac{\delta}{2} \right) \right) = 0; \\
& I_4 \ddot{\varphi}_4 - C_1 (\varphi_1 - \varphi_4) - C_4 (\varphi_k - \varphi_4) + M_4 = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, полученная система (18) по своей структуре и по адекватности действительности соответствует модели в математическом виде для дозаполненной передачи Новикова с двумя линиями зацепления в шевронном варианте.

**Список литературы:** 1. Новиков М.Л. Зубчатые передачи с новым зацеплением. – М.: ВВИА им. М.Е. Жуковского 1958. – 186с. 2. Абрамов Б.М. Колебания прямозубых зубчатых колес. – Харьков: изд-во ХГУ, 1968. – 176с. 3. Айронетов Э.Л., Апархов В.И., Генкин М.Д. и др. Геометрическая интерпретация колебаний колес зубчатой пары // Статика и динамика механизмов с зубчатыми передачами. Сб. стат. – М.: Наука, 1974. – С. 166 – 171. 4. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560с. 5. Генкин М.Д., Жиглов А.А., Павлов Б.И. и др. Качественное исследование и определение параметров динамических моделей по экспериментальным амплитудно-частотным характеристикам зубчатых передач // Статика и динамика механизмов с зубчатыми передачами. Сб. стат. – М.: Наука, 1974. – С. 126 – 138. 6. Генкин М.Д., Краснощечков Н.Н. Некоторые особенности работы быстроходных шевронных и косозубых зубчатых передач. 18 – 67 – 92. Сб. докл. – М.: Информтяжмаш, 1967. – 18с. 7. Заблонский К.И., Филиппович С.И. Учет внешней динамики при оценке погрешности передач Новикова. // Тезисы республиканской научно-технической конференции. – Рига, 1989. – С. 5 – 6. 8. Давыдов И.Ш. Колебания одноступенчатой прямозубой передачи с упругими опорами // Известия ВУЗов. Машиностроение. Сб. стат. – М.: издание МВТУ им. Баумана, вып. 12, 1967. – С. 17 – 22. 9. Долгачев В.С., Кабачный Е.С. Экспериментальное определение динамических нагрузок в эвольвентных зубчатых (шлицевых) соединениях передач с зубчатыми колесами. // Опыт исследования объемного напряженного состояния зубьев пространственных зубчатых зацеплений // Тезисы докладов республиканской научно-технической конференции. – Харьков, 1969. – С. 151 – 153. 10. Кириченко А.Ф. К вопросу о динамических нагрузках в зацеплении М.Л. Новикова с параллельными осями. // Зубчатые передачи с зацеплением Новикова. Сб. стат. – Харьков: Прапор, 1966. – С. 26 – 32. 11. Кириченко А.Ф., Кондратенко А.В. К вопросу о математическом моделировании динамики цилиндрической передачи Новикова ДЛЗ // Тезисы докладов международной научно-технической конференции. – Харьков, 1995. – С. 89 – 96. 12. Кириченко А.Ф., Федченко А.В. Математическая модель внутренней динамики цилиндрических передач Новикова ДЛЗ. // Проблемы качества и долговечности зубчатых передач и редукторов // Труды международной научно-технической конференции. – Харьков, 1997. – С. 102 – 108.

Поступила в редакцию 29.05.07