

**В.П. ШИШОВ**, д-р техн. наук, ВНУ им. В. Даля  
**О.А. РЕВЯКИНА**, канд. техн. наук, ВНУ им. В. Даля  
**П.Н. ТКАЧ**, канд. техн. наук, ВНУ им. В. Даля

### О ХАРАКТЕРЕ КОНТАКТА ЗУБЬЕВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ

Отримана умова, яка забезпечує контакт випуклих поверхонь зубів, нарізаних рісечним інструментом та, яка має більш високі критерії працездатності в порівнянні з евольвентними зубчатими передачами.

Получено условие, обеспечивающее контакт выпуклых поверхностей зубьев, нарезаемых реечным инструментом и имеющих более высокие критерии работоспособности в сравнении с эвольвентными зубчатыми передачами.

The condition providing contact of convex surfaces of teeth, cut by the rack instrument and having higher criteria of serviceability in comparison with involute gears is obtained.

**Постановка проблеми.** Известные зубчатые передачи имеют контакт или выпуклых поверхностей зубьев, (например, эвольвентные передачи внешнего зацепления) [1], или контакт выпуклых и вогнутых поверхностей зубьев (например, передачи с зацеплением Новикова) [2]. Передачи с выпукло-вогнутым контактом рабочих поверхностей имеют более высокую нагрузочную способность в сравнении с эвольвентными передачами, однако они более чувствительны к погрешностям изготовления и монтажа, что часто является причиной снижения допускаемых на них нагрузок из условия прочности зубьев [2].

**Анализ литературы.** Исследования показывают [3, 4], что выбором параметров исходного контура режущего инструмента можно в зацеплении цилиндрических зубчатых колес обеспечить контакт выпуклых поверхностей зубьев с существенным повышением критериев работоспособности. При этом контакт выпуклых поверхностей зубьев снижает чувствительность передач к погрешностям изготовления и монтажа передач.

Отсутствие рекомендаций по определению параметров исходного контура, обеспечивающего профилирование зубьев в зависимости от характера контакта их поверхностей (контакт выпуклых или выпукло-вогнутых поверхностей), сдерживает разработку прогрессивных цилиндрических передач зацеплением.

**Цель статьи.** Данная статья посвящена исследованию влияния параметров исходного контура на характер контакта рабочих поверхностей зубьев цилиндрических передач.

Зададим профиль исходного контура режущего инструмента в виде кривой с уравнением (рис. 1) относительно системы координат  $X_p Y_p Z_p$  (н.п. – начальная прямая исходного контура)

$$\begin{aligned} X_p &= f_1(\lambda) \\ Y_p &= f_2(\lambda) \end{aligned} \quad (1)$$

где  $f_1(\lambda)$  и  $f_2(\lambda)$  – произвольные функции;  $\lambda$  – переменная величина (параметр) (В дальнейшем  $\lambda$  в обозначениях функций и их производных будем опускать).

Профиль "ab" исходного контура может быть выпуклым или вогнутым. Будем предполагать, что участок  $aO_p$  исходного контура профилирует ножку зуба колеса, а участок  $O_p b$  – профилирует головку зуба колеса. Если исходный контур имеет вогнутый профиль, то профиль зуба колеса, спрофилированного этим исходным контуром, будет иметь выпуклую форму. Если же исходный контур имеет выпуклую форму, то профиль головки зуба колеса, спрофилированного этим исходным контуром, будет иметь выпуклую форму, а профиль ножки зуба колеса в зависимости от параметров исходного контура будет или выпуклым, или вогнутым. Если этим исходным контуром спрофилировать зубья сопряженного первому второму колеса, то на ножке зубьев первого колеса будет обеспечен или контакт выпуклых поверхностей, или выпуклых и вогнутых поверхностей.

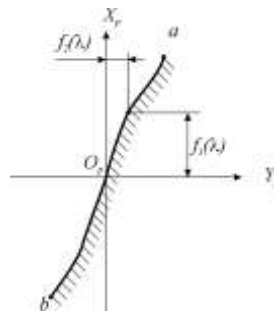


Рис. 1 Профиль исходного контура

Рассмотрим прямозубые цилиндрические передачи и получим условие, характеризующее характер контакта поверхностей зубьев зацепляющихся колес. Для этого исследуем кривизну профилей зубьев передач, спрофилированных исходным контуром, очерченным кривой с уравнением (1). Согласно [3] кривизны профилей зубьев зацепляющихся колес равны

$$\chi_i^* = \chi_1 \pm \frac{f_2'(\Omega_2')^2}{\tau_i n^3}, \quad (2)$$

где  $\tau_i = R_i \pm f_1 \frac{\Omega_2'}{f_2}$ ;

$n = \sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2}$  – модуль нормали кривой (1);

$f_1', f_2'$  – первые производные функций (1) по  $\lambda$ ;

$R_i$  – радиусы начальных цилиндров зацепляющихся колес ( $i=1$  и верхний знак – для шестерни,  $i=2$  и нижний знак – для колеса);

$\Omega_2'$  – производная функция  $\Omega_2$ , имеющей вид

$$\Omega_2 = \frac{f_1 f_1'}{f_2} + f_2; \quad (3)$$

$\chi_1$  – кривизна кривой (1).

Кривизна кривой (1) равна

$$\chi_1 = \frac{f_1' f_2'' - f_1'' f_2'}{\left[ (f_1')^2 + (f_2')^2 \right]^{3/2}}. \quad (4)$$

Предположим, что профиль  $aO_p$  (рис. 1) исходного контура выпуклый, а его кривизна  $\chi < 0$ , причем этот участок предназначен для профилирования головки зуба колеса и ножки зуба шестерни.

Головка зуба колеса при этом будет выпуклой с кривизной из (2)

$$\chi_2^* = \chi_1 - \frac{f_2' \Omega_2'}{\tau_2 n^3}. \quad (5)$$

Кривизна профиля ножки зуба шестерни с использованием (2) будет равна

$$\chi_1^* = \chi_1 + \frac{f_2' \Omega_2'}{\tau_1 n^3}. \quad (6)$$

Из соотношения (6) следует, что при

$$|\chi_1| > \frac{f_2' \Omega_2'}{\tau_1 n^3} \quad (7)$$

профиль ножки зуба шестерни будет иметь вогнутую форму, а контакт зубьев шестерни и колеса будет выпукло-вогнутым.

Если же

$$|\chi_1| < \frac{f_2' \Omega_2'}{\tau_1 n^3}, \quad (8)$$

то профиль ножки зуба будет иметь выпуклую форму и при зацеплении шестерни и колеса будут контактировать выпуклые поверхности зубьев.

При выполнении равенства

$$|\chi_1| = \frac{f_2' \Omega_2'}{\tau_1 n^3} \quad (9)$$

имеем контакт прямолинейного профиля ножки зуба шестерни с выпуклым профилем головки зуба колеса.

Из изложенного следует, что выбором геометрических параметров исходного контура режущего инструмента можно обеспечить различный характер касания зубьев зацепляющихся колес. При определении параметров исходного контура в зависимости от характера контакта рабочих поверхностей следует использовать условия (5)...(9).

В качестве примера рассмотрим цилиндрические зубчатые передачи, зубья колес которых спрофилированы исходным контуром, очерченным дугами окружностей (рис. 2).

Рабочие участки профиля исходного контура очерчены дугами окружностей  $AO_p$  и  $O_pB$  с радиусами  $\rho$ . При этом участок  $AO_p$  предназначен для профилирования головок зубьев шестерни и ножек зубьев колеса, участок  $O_pB$  – для профилирования ножек зубьев шестерни и головок зубьев колеса.

В системе координат  $X_pO_pY_p$  (рис. 2) уравнения профилей исходного контура запишем в виде:

– участок  $AO_p$

$$\begin{aligned} X_p &= f_1 = \rho \sin \alpha - a, \\ Y_p &= f_2 = \varphi - \rho \cos \alpha; \end{aligned} \quad (10)$$

– участок  $O_pB$

$$\begin{aligned} X_p &= f_1 = -\rho \sin \alpha + a, \\ Y_p &= f_2 = -\varphi + \rho \cos \alpha, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\rho$  – радиус профилирующей окружности;

$\alpha$  – текущий угол профиля исходного контура;

$a$  и  $\varphi$  – расстояние центров окружностей до осей координат  $X_pO_pY_p$ .

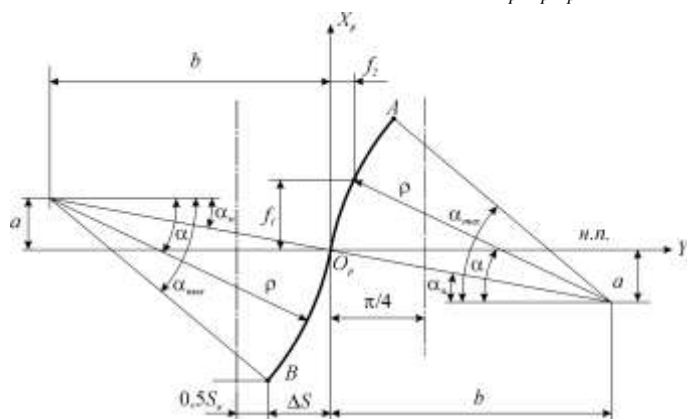


Рис. 2 Исходный контур, очерченный дугами окружности (н.п. – начальная прямая)

Из (10) и (11) с учетом (3) имеем

$$\begin{aligned} f_1' &= \pm \rho \cos \alpha, \\ f_2' &= \pm \rho \sin \alpha, \\ f_1'' &= \mp \rho \sin \alpha, \\ f_2'' &= \pm \rho \cos \alpha, \\ \Omega_2' &= \pm \frac{a}{\sin^2 \alpha} \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь верхний знак для участка  $AO_p$ , нижний – для  $O_pB$ . В дальнейшем будем рассматривать только участок  $AO_p$  исходного контура.

Используя рис. 2, получаем

$$\begin{aligned} a &= \rho \sin \alpha_n, \\ \varphi &= \rho \cos \alpha_n, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\alpha_n$  – угол профиля исходного контура на начальной прямой.

Кривизна участка  $AO_p$  профиля исходного контура с использованием (4) и (13) равна

$$\chi_1 = + \frac{1}{\rho}. \quad (14)$$

Кривизны профилей головок зубьев шестерни и ножек зубьев колеса из соотношения (2) равны

$$\chi_i^* = + \frac{1}{\rho} \pm \frac{\left(\frac{a}{\sin^2 \alpha}\right)^2 \sin \alpha}{\left(R_i \pm \frac{a}{\sin^2 \alpha} \mp \frac{a^2}{\rho \sin^3 \alpha}\right) \rho^2}. \quad (15)$$

Здесь верхний знак для головок зубьев шестерни, нижний – для ножек зубьев колеса.

Из равенства (15) с учетом (13) имеем:

– для головок зубьев шестерни

$$\chi_1^* = \frac{R_1 + \frac{a}{\sin^2 \alpha}}{\frac{a}{\sin \alpha_n} \left(R_1 + \frac{a}{\sin^2 \alpha}\right) - \frac{a^2}{\sin^3 \alpha}} \quad (16)$$

– для ножек зубьев колеса

$$\chi_2^* = \frac{R_2 - \frac{a}{\sin^2 \alpha}}{\frac{a}{\sin \alpha_n} \left(R_2 - \frac{a}{\sin^2 \alpha}\right) + \frac{a}{\sin^3 \alpha}}. \quad (17)$$

Для головок зубьев шестерни, как следует из (16) при  $\alpha \geq \alpha_n$  и любых значениях "a"  $\chi_1^* > 0$ , т.е. головки зубьев имеют выпуклый профиль.

Для ножек зубьев колеса из соотношения (16) будем иметь при  $\alpha > \alpha_n$ :

– при  $a < R_2 \sin^2 \alpha$  кривизна  $\chi_2^* > 0$ , а профили ножек зубьев будут вогнутыми;

– при  $a = R_2 \sin^2 \alpha$  кривизна  $\chi_2^* = 0$ , а профили ножек зубьев будут очерчены в данной точке прямой линией;

– при  $a > R_2 \sin^2 \alpha$  кривизна  $\chi_2^* < 0$ , а профили ножек зубьев будут выпуклыми.

В первом случае в заданной точке будет контакт выпуклых головок зубьев шестерни и вогнутых ножек зубьев колеса. Во втором случае будут контактировать выпуклые профили головок зубьев шестерни с плоскими профилями ножек зубьев колеса. В третьем случае будут контактировать выпуклые профили головок зубьев шестерни и выпуклые профили зубьев колеса.

При  $a < R_1 \sin^2 \alpha_n$  ( $R_1 \leq R_2$ ) исходный контур рис. 2 обеспечивает контакт выпуклых и вогнутых поверхностей зубьев по всему их рабочему профилю. Если же  $a \geq R_2 \sin^2 \alpha_{\max}$  ( $\alpha_{\max}$  – максимальный угол профиля исходного контура (см. рис. 2), то будет обеспечен контакт выпуклых профилей зубьев шестерни и колеса.

В таблице приведены параметры исходных контуров (рис. 2), обеспечивающих контакт выпуклых зубьев шестерни и колеса, а так же значения относительных приведенных кривизн на ножках зубьев шестерни  $\chi_{01}$  и колеса  $\chi_{02}$  при  $R_1 = 10$ ,  $R_2 = 36,5$ . Кроме того, даны значения относительных приведенных кривизн  $\chi_{1\varnothing}$ ,  $\chi_{2\varnothing}$  эвольвентной передачи с профильным углом инструмента  $\alpha_n$ .

Таблица 1

$\alpha$	$\Delta\alpha$	$a$	$\rho$	$\alpha_n$	$\epsilon$	$\Delta S$	$0,5S_a$	$\epsilon_\infty$	$\chi_{01}$	$\chi_{02}$	$\chi_{1\varnothing}$	$\chi_{2\varnothing}$
20	0	4,27	15,408	16,088	14,804	0,3258	0,4596	1,956	5,254	1,3997	-8,79	2,437
20	0,5	4,77	16,869	16,424	16,181	0,329	0,4564	1,959	5,713	1,452	-10,5	2,391
20	1	5,27	18,331	16,707	17,558	0,3317	0,4537	1,96	6,137	1,4967	-12,4	2,355
21	0	4,688	15,871	17,179	15,163	0,3461	0,4393	1,879	4,503	1,401	-17,6	2,3
21	0,5	5,188	17,266	17,485	16,468	0,3491	0,4363	1,881	4,796	1,4453	-23,6	2,267
21	1	5,688	18,661	17,745	17,773	0,3516	0,4338	1,882	5,062	1,4835	-32,9	2,241
22	0	5,122	16,343	18,265	15,519	0,3666	0,4188	1,809	3,98	1,3994	-136	2,193
22	0,5	5,622	17,677	18,544	16,759	0,3694	0,416	1,811	4,181	1,4372	225,1	2,169
22	1	6,122	19,012	18,784	17,999	0,3717	0,4137	1,812	4,362	1,47	69,72	2,149
23	0	5,572	16,821	19,347	15,871	0,3873	0,3981	1,746	3,593	1,3953	27,3	2,105
23	0,5	6,072	18,101	19,602	17,052	0,3899	0,3955	1,748	3,738	1,4277	21,56	2,086
23	1	6,572	19,38	19,824	18,232	0,3921	0,3933	1,749	3,868	1,4561	18,29	2,071
24	0	6,038	17,304	20,423	16,217	0,4083	0,3771	1,69	3,293	1,3891	13,11	2,031
24	0,5	6,538	18,534	20,658	17,342	0,4107	0,3747	1,691	3,401	1,4171	11,84	2,016
24	1	7,038	19,763	20,863	18,467	0,4128	0,3726	1,693	3,499	1,4418	10,93	2,003
25	0	6,519	17,792	21,495	16,554	0,4296	0,3558	1,639	3,052	1,3812	8,893	1,965
25	0,5	7,019	18,975	21,711	17,629	0,4318	0,3536	1,64	3,136	1,4055	8,375	1,953
25	1	7,519	20,158	21,901	18,703	0,4338	0,3516	1,641	3,211	1,427	7,971	1,942

$\alpha$	$\Delta\alpha$	$a$	$\rho$	$\alpha_n$	$\epsilon$	$\Delta S$	$0,5S_a$	$\epsilon_\infty$	$\chi_{01}$	$\chi_{02}$	$\chi_{19}$	$\chi_{29}$
26	0	7,014	18,282	22,561	16,883	0,4511	0,3343	1,592	2,854	1,3719	6,859	1,907
26	0,5	7,514	19,422	22,761	17,91	0,4532	0,3322	1,594	2,92	1,393	6,588	1,897
26	1	8,014	20,563	22,938	18,937	0,4551	0,3303	1,595	2,979	1,4119	6,367	1,888
27	0	7,523	18,773	23,623	17,2	0,4729	0,3125	1,551	2,687	1,3614	5,655	1,854
27	0,5	8,023	19,875	23,808	18,183	0,4749	0,3105	1,552	2,74	1,3799	5,493	1,846
27	1	8,523	20,976	23,974	19,166	0,4767	0,3087	1,553	2,788	1,3965	5,357	1,838
28	0	8,045	19,266	24,681	17,506	0,4951	0,2903	1,513	2,545	1,35	4,856	1,806
28	0,5	8,545	20,331	24,853	18,448	0,497	0,2884	1,514	2,588	1,3662	4,75	1,798
28	1	9,045	21,396	25,007	19,39	0,4986	0,2867	1,515	2,627	1,3808	4,66	1,792
29	0	8,579	19,758	25,734	17,799	0,5176	0,2678	1,478	2,421	1,3378	4,285	1,761
29	0,5	9,079	20,79	25,894	18,702	0,5194	0,266	1,479	2,457	1,3521	4,212	1,754
29	1	9,579	21,821	26,039	19,606	0,521	0,2644	1,48	2,489	1,365	4,148	1,748
30	0	9,125	20,25	26,783	18,078	0,5405	0,2449	1,447	2,313	1,325	3,855	1,719
30	0,5	9,625	21,25	26,933	18,945	0,5422	0,2432	1,448	2,342	1,3376	3,802	1,713
30	1	10,12	22,25	27,069	19,813	0,5437	0,2417	1,449	2,369	1,3492	3,755	1,708
31	0	9,682	20,74	27,828	18,342	0,5638	0,2216	1,418	2,216	1,3118	3,518	1,68
31	0,5	10,18	21,711	27,968	19,176	0,5654	0,22	1,419	2,241	1,323	3,478	1,675
31	1	10,68	22,682	28,096	20,009	0,5669	0,2185	1,42	2,264	1,3333	3,443	1,67
32	0	10,25	21,229	28,869	18,591	0,5875	0,1979	1,393	2,13	1,2983	3,247	1,643
32	0,5	10,75	22,173	29,001	19,393	0,589	0,1964	1,394	2,151	1,3083	3,216	1,638
32	1	11,25	23,116	29,121	20,194	0,5905	0,1949	1,395	2,171	1,3175	3,189	1,634
33	0	10,83	21,715	29,907	18,824	0,6117	0,1737	1,37	2,053	1,2846	3,023	1,608
33	0,5	11,33	22,633	30,03	19,595	0,6131	0,1723	1,371	2,071	1,2935	2,999	1,604
33	1	11,83	23,551	30,144	20,366	0,6145	0,1709	1,372	2,088	1,3018	2,978	1,6
34	0	11,41	22,199	30,94	19,04	0,6363	0,1491	1,349	1,982	1,2708	2,836	1,574
34	0,5	11,91	23,093	31,057	19,783	0,6377	0,1476	1,35	1,998	1,2788	2,816	1,571
34	1	12,41	23,987	31,165	20,525	0,6391	0,1463	1,351	2,013	1,2863	2,799	1,568
35	0	12,01	22,679	31,971	19,239	0,6615	0,1239	1,33	1,918	1,2569	2,675	1,543
35	0,5	12,51	23,551	32,081	19,954	0,6629	0,1225	1,331	1,932	1,2642	2,66	1,54
35	1	13,01	24,422	32,183	20,67	0,6642	0,1212	1,332	1,945	1,2709	2,645	1,537
36	0	12,61	23,155	32,997	19,42	0,6872	0,0982	1,314	1,86	1,2431	2,537	1,513
36	0,5	13,11	24,006	33,102	20,11	0,6886	0,0968	1,315	1,872	1,2496	2,524	1,51
36	1	13,61	24,857	33,2	20,799	0,6898	0,0956	1,315	1,883	1,2557	2,512	1,507
37	0	13,22	23,628	34,021	19,584	0,7135	0,0719	1,299	1,806	1,2294	2,416	1,485
37	0,5	13,72	24,459	34,12	20,248	0,7149	0,0705	1,3	1,816	1,2353	2,405	1,482
37	1	14,22	25,29	34,213	20,913	0,7161	0,0693	1,301	1,826	1,2409	2,395	1,479
38	0	13,83	24,096	35,041	19,728	0,7405	0,0449	1,286	1,756	1,2158	2,309	1,458
38	0,5	14,33	24,908	35,136	20,37	0,7418	0,0436	1,287	1,765	1,2212	2,3	1,455
38	1	14,83	25,72	35,225	21,011	0,743	0,0424	1,288	1,774	1,2262	2,291	1,453
39	0	14,46	24,559	36,058	19,854	0,7681	0,0173	1,275	1,71	1,2024	2,214	1,432
39	0,5	14,96	25,354	36,148	20,473	0,7694	0,016	1,276	1,718	1,2073	2,206	1,43
39	1	15,46	26,148	36,234	21,092	0,7705	0,0149	1,277	1,726	1,2119	2,198	1,427
40	0	15,08	25,017	37,072	19,961	0,7964	-0,011	1,266	1,667	1,1892	2,129	1,407
40	0,5	15,58	25,795	37,159	20,558	0,7977	-0,012	1,267	1,674	1,1937	2,122	1,405
40	1	16,08	26,573	37,24	21,155	0,7988	-0,013	1,267	1,681	1,1979	2,116	1,403
41	0	15,71	25,47	38,083	20,048	0,8255	-0,04	1,258	1,627	1,1763	2,052	1,384
41	0,5	16,21	26,233	38,166	20,625	0,8267	-0,041	1,259	1,634	1,1804	2,046	1,382
41	1	16,71	26,995	38,244	21,201	0,8279	-0,042	1,259	1,64	1,1842	2,041	1,38
42	0	16,34	25,918	39,091	20,116	0,8554	-0,07	1,252	1,59	1,1636	1,983	1,361
42	0,5	16,84	26,665	39,17	20,673	0,8566	-0,071	1,252	1,596	1,1673	1,977	1,359
42	1	17,34	27,412	39,246	21,229	0,8578	-0,072	1,253	1,601	1,1709	1,973	1,358

Примечания: 1.  $\alpha = \alpha_{\max}$ ; 2.  $\varepsilon_{\infty} = \frac{2ctg\alpha_{\max} + 2\Delta S}{\pi}$  – коэффициент перекрытия при зацеплении реек; 3.  $S_a$  – толщина зубьев рейки на вершине; 4.  $\Delta S = e - \rho \cos \alpha_{\max}$ ; 5.  $S_a = \frac{\pi}{8} - \frac{\Delta S}{2}$ ; 6.  $a = R_2 \sin^2 \alpha_{\max} + \Delta a$ ; 7.  $\rho = \frac{f_1 + a}{\sin \alpha_{\max}}$ , ( $f_1 = 1$ ); 8.  $\sin \alpha_n = \frac{a}{\rho}$ .

Относительные приведенные кривизны определены по формулам:

$$\chi_{oi} = \frac{\left( \frac{\sin \alpha_n}{\sin^2 \alpha_{\max}} \right)^2 \sin \alpha_{\max}}{\left( 1 \mp \frac{f_1 \sin \alpha_n}{R_1 \sin^3 \alpha_{\max}} \right) \left( 1 \pm \frac{f_1 \sin \alpha_n}{R_2 \sin^3 \alpha_{\max}} \right)}, \quad (18)$$

$$\chi_{i\partial} = \frac{1}{\left( 1 \mp \frac{f_1}{R_1 \sin^2 \alpha_n} \right) \left( 1 \pm \frac{f_1}{R_2 \sin^2 \alpha_n} \right) \sin \alpha_n},$$

где  $f_1 = 1$ , верхний знак для шестерни, нижний для колеса.

Из анализа таблицы следует, что параметры исходного контура, очерченного дугами окружности, при контакте выпуклых поверхностей зубьев могут обеспечивать меньшие значения относительных приведенных кривизн в крайних точках поля зацепления в сравнении с эвольвентными передачами.

**Выводы.** 1. Выбором параметров исходного контура можно обеспечить контакт выпуклых, выпуклых и вогнутых поверхностей зубьев зацепляющихся колес, а так же контакт выпуклых и прямолинейных профилей зубьев.

2. Полученные результаты можно использовать при синтезе высоконагруженных цилиндрических зубчатых передач.

**Список литературы.** 1. Гавриленко В.А. Основы теории эвольвентной зубчатой передачи. М.: «Машиностроение», 1969. – 430с. 2. Павленко А.В., Федякин Р.В., Чесноков В.А. Зубчатые передачи с зацеплением Новикова. Киев, «Техніка», 1978. – 144с. 3. Шишов В.П., Носко П.Л., Ревякина О.А. Цилиндрические передачи с арочными зубьями. Монографія. – Луганськ: вид-но СНУ ім. В.Даля, 2004. – 336с. 4. Шишов В.П., Басов Г.Г., Найш Н.М. и др. Вихідний контур зубців циліндричних передач. Декларційний патент України № 6707, опубл. 16.05.05. Бюл. № 5.

Поступила в редакцию 25.04.2007