

В.Н. СТРЕЛЬНИКОВ, канд.техн.наук;
Г.С. СУКОВ; ЗАО «НКМЗ»

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЕРЕДАЧ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ

Особливостю розв'язуваної контактної задачі є близькість радіусів кривизни нормальних перетинів ролика й увігнутої циліндричної поверхні зуба. Причому одне з тіл представляє порожній тонкостінний циліндр, що забезпечує йому значно більш високу радіальну піддатливість. У цьому випадку довжина дуги контакту може бути порівнянна з розмірами контактуючих тіл, що накладає особливі умови на постановку даної контактної задачі, відмінні від відомих класичних рішень.

Feature of a decided contact problem is the affinity of radiuses of curvature of normal sections of a roller and a concave cylindrical surface of a tooth. And one of bodies represents thin-walled the thin-walled cylinder that provides to it considerably higher radial pliability. In this case extent of an arch of contact can be commensurable with the sizes of contacting bodies that imposes special conditions on statement of the given contact problem, distinct from known classical decisions.

Постановка проблемы. Стремление к достижению совершенства геометрических форм и параметров, снижению контактных нагрузок, стимулирует разработку новых разновидностей передач с другими кинематическими и нагрузочными характеристиками. Так в передаче Новикова реализуется выпукло – вогнутый контакт и приведенная кривизна поверхностей существенно снижает герцевские напряжения. Для передач зацеплением задача о контактных напряжениях имеет особую практическую значимость. При проектировании, рассмотрении вопросов назначения термической обработки, возможным значениям местных контакта. В основе методик и стандартов прочности и контактную выносливость К.И. Заблонский считает, что следует формированию расчётных методик [3, сформулировал эту проблему как детального рассмотрения и корректного влияющих на прочность зубчатых контактным нагрузкам [5]. Актуальность взаимодействия в

зацеплении высших кинематических практической потребностью достаточно точных решений, форме для практического применения.

Из условия максимальной контактным напряжениям радиус возможно ближе к радиусу зубьев. Это напряжения, величина которых определяет прочность и долговечность зацепления. Теоретические исследования контактных напряжений при небольшом различии радиусов цилиндрического стержня и кругового пространства для сплошного ролика проводились Э. Л. Айрапетовым [6, 7]. Обобщив классические результаты Герца на указанный случай, он нашел соответственные точки тел, контактирующих при деформации, что позволило связать их с деформациями и нагрузкой. Задача приведена И. Я. Штаерманом к интегральному уравнению, которое решается приближенными методами. Результаты показали, что принятый подход приводит к существенным отличиям от результатов, полученных при расчете напряженного состояния по Герцу - контактные напряжения значительно меньше. В настоящей работе результаты И. Я. Штаермана неприменимы, поскольку ролик не сплошной и зубья не сплошные цилиндры неограниченной толщины, а полуцилиндры.

Цель работы. Постановка контактной задачи об упругом взаимодействии полых цилиндрических роликов с вогнутыми сплошными полуцилиндрами, требующая специального математического анализа граничных условий их взаимодействия; получения системы интегральных уравнений радиальных перемещений деформируемых роликов и зубьев; разработки методики решения системы интегральных уравнений с учетом сформулированных граничных условий; разработки алгоритма анализа решения с точки зрения выполнения расчетов с необходимой степенью точности.

Условия контакта поверхностей:

$$r_1^{-1} + \chi_2 = R_2^{-1} + \chi_1, \quad (1)$$

где r_1 , R_2 – радиусы поверхности зуба и ролика, χ_1 и χ_2 – изменения кривизны вызванные деформацией поверхностей ролика и зуба. Решение находим через функцию напряжений Φ , удовлетворяющую

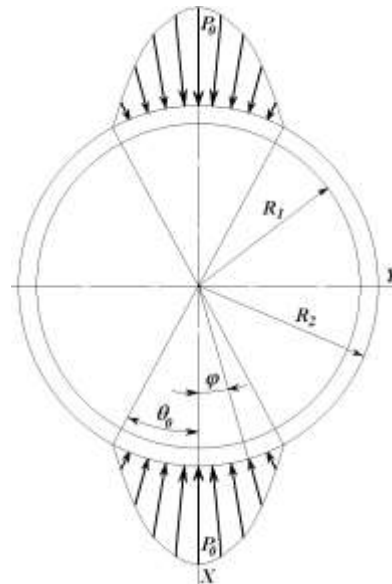


Рис. 1 Эпюры давлений

износа и долговечности зубьев, прежде всего обращаются к напряжений на поверхности расчёта зубьев на контактную лежит задача Г. Герца [1, 2]. изменить подход к [4]. Э.Л. Айрапетов комплексную, требующую учёта всех факторов, передач, и в первую очередь по вопроса о контактом

пар определяется не только результатов, но и отсутствием представленных в удобной

нагрузочной способности по ролика следует выбирать позволяет снизить контактные

бигармоническому уравнению, решение которого представим в форме Мичелла [8]. К поверхности цилиндра приложим контактную нагрузку в виде параболической зависимости [9] (рис. 1):

$$P(\varphi) = \begin{cases} P_0 \left(1 - \frac{\varphi^2}{\Theta_0^2}\right), & 0 \leq \varphi \leq \Theta_0, \\ P_0 \left[1 - \frac{(\pi - \varphi)^2}{\Theta_0^2}\right], & \pi - \Theta_0 \leq \varphi \leq \pi, \\ 0, & \Theta_0 \leq \varphi \leq \pi - \Theta_0. \end{cases}$$

где φ – полярный угол; P_0 – максимальное давление. Разлагаем нагрузку в ряд Фурье в промежутке $(0; \pi)$:

$$P(\varphi) = \frac{4}{3\pi} P_0 \Theta_0 + \frac{8P_0}{\pi - \Theta_0} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\sin n\Theta_0}{n^3 \Theta_0} - \frac{\cos n\Theta_0}{n^2} \right) \cos n\varphi \right\}. \quad (2)$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}$ определяются с помощью функции Эри:

$$\sigma_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right), \quad (3)$$

где φ, r – полярные координаты. Бигармоническое уравнение упругости в полярных координатах:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (4)$$

Выражение функции Эри удовлетворяющее уравнению (4) имеет вид:

$$\Phi = B_0 r^2 + C_0 \ln r + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left[A_{1n} r^n + C_{2n} r^{n+2} + C_{3n} r^{-n} + C_{4n} r^{-n+2} \right] \cos n\varphi. \quad (5)$$

Коэффициенты функции Эри определим из граничных условий:

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=R_2} = -P, \quad \sigma_\varphi|_{r=R_2} = 0, \quad \tau_{r\varphi}|_{r=R_2} = 0: \quad B_0 = -\frac{2P_0 \Theta_0}{3\pi q^2}, \quad C_0 = \frac{4P_0 \Theta_0 R_1^2}{3\pi q^2}, \\ C_{1n} = \frac{P_0}{(n-1)n^2 R_2^{n-2}} A_{1n}, \quad C_{2n} = \frac{P_0}{(n+1)n^2 R_2^2} A_{2n}, \quad C_{3n} = \frac{P_0 R_1^{n+2}}{(n+1)n^2} A_{3n}, \quad C_{4n} = -\frac{P_0 R_1^n}{(n-1)n^2} A_{4n}, \\ A_{2n} = \Gamma \left[1 - q^{2n} + n q^{2n-2} \right], \quad A_{3n} = \Gamma \left[q^{n-2} \left[1 - q^{2n} + n \right] \right], \end{aligned}$$

где $q = \frac{R_1}{R_2}$;

$$A_{4n} = \Gamma \left[q^{n-2} \left[q^2 + n(1 - q^2) - q^{2n+2} \right] \right], \quad \Gamma = \frac{4 \left[\frac{\sin n\Theta_0}{n^3 \Theta_0} - \frac{\cos n\Theta_0}{n^2} \right]}{\left[1 - q^{2n} - \frac{2}{n^2} \left(\frac{1}{q^2} - q^{2n-2} \right) \right]}$$

Компоненты тензора напряжений получим с помощью формул (3), (5) и коэффициентов

$$\begin{aligned} \sigma_r = -\frac{4P_0 \Theta_0}{3\pi q^2} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right) - P_0 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left[\frac{A_{1n}}{n} \left(\frac{r}{R_2} \right)^{n-2} - A_{2n} \left(\frac{n-2}{n^2} \right) \left(\frac{r}{R_2} \right)^n + \frac{A_{3n}}{n} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{n+2} - \frac{A_{4n}}{n} \left(\frac{n+2}{n^2} \right) \left(\frac{R_1}{r} \right)^n \right] \cos n\varphi, \\ \sigma_\varphi = -\frac{4P_0 \Theta_0}{3\pi q^2} \left(1 + \frac{R_1^2}{r^2} \right) + P_0 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left[\frac{A_{1n}}{n} \left(\frac{r}{R_2} \right)^{n-2} - A_{2n} \left(\frac{n+2}{n^2} \right) \left(\frac{r}{R_2} \right)^n + \frac{A_{3n}}{n} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{n+2} - \frac{A_{4n}}{n} \left(\frac{n-2}{n^2} \right) \left(\frac{R_1}{r} \right)^n \right] \cos n\varphi, \\ \tau_{r\varphi} = P_0 \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left[\frac{A_{1n}}{n} \left(\frac{r}{R_2} \right)^{n-2} - \frac{A_{2n}}{n} \left(\frac{r}{R_2} \right)^n - \frac{A_{3n}}{n} \left(\frac{R_1}{r} \right)^{n+2} + \frac{A_{4n}}{n} \left(\frac{R_1}{r} \right)^n \right] \sin n\varphi \quad (6) \end{aligned}$$

Для внутренних точек сходимость рядов обеспечивается множителями, с ростом n стремящихся к нулю:

$$\left(\frac{R_1}{r} \right)^{n-2}; \left(\frac{R_1}{r} \right)^n; \left(\frac{R_1}{r} \right)^{n+2}; \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{n-2}; \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^n < 1.$$

Быстрота сходимости рядов, как у геометрической прогрессии со знаменателем $\ll 1$. На внутреннем и внешнем контурах одно из отношений

$(R_1/r)^{n-2}$ или $(R_1/R_2)^{n-2}$ обращается в единицу и быстроту сходимости рядов на контурах $r = R_1$ и $r = R_2$ определяют ряды:

$$\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{A_{2n} \cos n\varphi}{n^2}, \quad \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{A_{4n} \cos n\varphi}{n^2}, \quad \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{(A_{3n} - A_{4n}) \cos n\varphi}{n},$$

быстрота сходимости которых такая же, как у абсолютно сходящегося ряда $\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{A}{n^2}$.

Деформации ролика представим через компоненты упругих смещений W и V

$$\varepsilon_r = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{W}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r}. \quad (7)$$

Выразим ε_r и ε_φ в формуле (7) через обобщённый закон Гука с учётом значений (6). Получим выражения для производных смещений W и V , которые интегрируем соответственно по r и φ :

$$\begin{aligned} W(r, \varphi) = & -\frac{4(1+\nu)P_0\Theta_0}{3\pi E(1-q^2)} \left[\frac{1-2\nu}{r} + \frac{R_1^2}{r} \right] - \frac{(1+\nu)P_0}{E} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \left[\frac{A_{1n}}{n(n-1)} \frac{r^{n-1}}{R_2^{n-2}} - \frac{A_{2n}}{(n+1)} \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot \left(\frac{1-2\nu}{n} - \frac{2\nu}{n^2} \right) \frac{r^{n+1}}{R_2^n} - \frac{A_{3n}}{n(n+1)} \frac{R_1^{n+2}}{r^{n+1}} + \frac{A_{4n}}{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{2\nu}{n^2} \right) \frac{R_1^n}{r^{n-1}} \right] \cos n\varphi \right\} + f_1(\varphi), \\ V = & \frac{(1+\nu)P_0}{E} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \left[\frac{A_{1n}}{n(n-1)} \frac{r^{n-1}}{R_2^{n-2}} - A_{2n} \left(\frac{n+2}{n^2(n+1)} + \frac{2(1-2\nu)}{n^2(n+1)} \right) \frac{r^{n+1}}{R_2^n} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{A_{3n}}{n(n+1)} \frac{R_1^{n+2}}{r^{n+1}} - A_{4n} \left(\frac{n-2}{a^2(n-1)} - \frac{2(1-2\nu)}{n^2(n+1)} \right) \frac{R_1^n}{r^{n-1}} \right] \sin n\varphi \right\} - r \int f_1(\varphi) d\varphi + f_2(r). \end{aligned} \quad (55)$$

Функции $f_1(\varphi) \equiv 0$, $f_2(r) \equiv 0$. Ряды, определяющие W и V - абсолютно сходящиеся.

Изменения кривизны поверхности ролика χ_1 связано со смещениями W и V этой поверхности:

$$\begin{aligned} \chi_1 = & \frac{4(1-2\nu)q^2(1+\nu)P_0\Theta_0}{3\pi E(1-q^2)R_2} - \frac{8(1+\nu)P_0}{\pi\Theta_0ER_2} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{S_n}{n} \left[1 - q^{2n} (1 + (1-2\nu)(1+q^{2n}) - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(1-2\nu)}{n} (1 - q^{2n}) + q^{2n-2} (n(1-q^2)(3-4\nu+q^2) + q^2(1-q^{2n})) \right] \cos n\varphi \right\}, \end{aligned} \quad (56)$$

где $S_n = \frac{\sin n\Theta_0 - \cos n\Theta_0}{n\Theta_0(1-q^{2n})^2 - n^2(1-q^2)^2 q^{2n-2}}$. Среднее изменение кривизны:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_1 = & \frac{1}{\Theta_0} \int_0^{\Theta_0} \chi_1 d\varphi = \frac{4(1+\nu)}{3\pi E(1-q^2)R_2} \frac{(1-2\nu)P_0\Theta_0}{\pi R_2 E \Theta_0^2} - \frac{8(1+\nu)P_0}{\pi R_2 E \Theta_0^2} \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ \frac{S_n}{n^2} \left[1 + (1-2\nu) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (1+q^{2n}) - \frac{(1-2\nu)}{n} (1-q^{2n}) \right] + q^{2n-2} \left[n(1-q^2)(3-4\nu+q^2) + q^2(1-q^{2n}) \right] \right\} \sin n\Theta_0. \end{aligned} \quad (8)$$

По признаку сравнения ряд (8) сходящийся, значение $\bar{\chi}_1$ можно использовать в формуле (1).

Массив зуба представляем как полупространство под образующей его поверхностью. Рассмотрим две модели: полупространство с цилиндрической выточкой, на участке которой приложена контактная нагрузка; плоское деформированное полупространство с эквивалентной контактной нагрузкой на участке свободной поверхности. Определим напряженно - деформированное состояние пространства с отверстием, по его контуру приложена контактная нагрузка, условия и форма области которой аналогичны ролику, и для функции напряжений сохраняются те же слагаемые. Функцию Эри представим в соответствии с принципом Сен-Венана:

$$\Phi(r, \varphi) = Z_0 \ln r + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (D_{3n} r^{-n} + D_{4n} r^{-n+2}) \cos n\varphi.$$

Граничные условия на контуре образующей окружности зуба $r = r_1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{r=r_1} = & \begin{cases} P_0 (1 - \varphi^2) \Theta_0^{-2}, & 0 \leq \varphi \leq \Theta_0 \\ P_0 [1 - (\pi - \varphi)^2] \Theta_0^{-2}, & \pi - \Theta_0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}; \\ \tau_{r\varphi} = & 0, \quad \Theta_0 \leq \varphi \leq \pi - \Theta_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставим выражение (9) в формулы (3) продифференцируем и получим выражения для компонент тензора напряжений. Входящие коэффициенты определим с помощью выражений (9) и (2):

$$\begin{aligned} \sigma_r = & -\frac{4P_0\Theta_0}{3\pi} \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 - \frac{4P_0}{\pi\Theta_0} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\sin n\Theta_0}{n\Theta_0} - \cos n\Theta_0 \right) \times \left[\left(\frac{n+2}{n^2} \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^n - \frac{1}{n} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{n+2} \right] \cos n\varphi \right\}, \\ \sigma_\varphi = & \frac{4P_0\Theta_0}{3\pi} \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 + \frac{4P_0}{\pi\Theta_0} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} \left(\frac{\sin n\Theta_0}{n\Theta_0} - \cos n\Theta_0 \right) \times \left[(n-2) \left(\frac{r_1}{r} \right)^n - n \left(\frac{r_1}{r} \right)^{n+2} \right] \cos n\varphi \right\}, \\ \tau_{r\varphi} = & -\frac{4P_0}{\pi\Theta_0} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{\sin n\Theta_0}{n\Theta_0} - \cos n\Theta_0 \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \sin n\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Значения (10) подставим в выражения обобщённого закона Гука и с учётом (7) получим выражения для частных производных функций W и V , интегрируя которые соответственно по r и φ , получим:

$$W = \frac{4P_0\theta_0}{3\pi E} \left(1 + \nu\right) \frac{r_1}{r} + \frac{4P_0}{\pi\theta_0 E} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\sin n\theta_0}{n\theta_0} - \cos n\theta_0 \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{(n-1)n} \left(1 + \frac{2(1-2\nu)}{n} \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^{n-1} - \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{n+1} \right] \cos n\varphi \right\}. \\ V = \frac{4(1+\nu)P_0 r_1}{\pi\theta_0 E} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\sin n\theta_0}{n\theta_0} - \cos n\theta_0 \right) \left[\frac{1}{(n-1)n} \left(1 - \frac{4(1-\nu)}{n} \right) \left(\frac{r_1}{r} \right)^{n-1} - \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{n+1} \right] \sin n\varphi \right\}.$$

Постоянные интегрирования - функции f_1 и f_2 , как и для ролика $f_1(\varphi)=0$, $f_2(r)=0$.

Напряженно - деформированное состояние полупространства с плоской границей, рассчитывается по формулам решения для пространства с отверстием. Изменение кривизны полупространства χ_2 :

$$\chi_2 = -\frac{4(1+\nu)P_0\theta_0}{3\pi E r_1} + \frac{8(1+\nu)P_0}{\pi\theta_0 E r_1} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\sin n\theta_0}{n\theta_0} - \cos n\theta_0 \right) \left[\frac{(1-2\nu)(n+1)}{n^2} + \frac{1}{n} \right] \cos n\varphi \right\}. \quad \text{Изменение средней} \quad (63)$$

кривизны полупространства $\bar{\chi}_2$:

$$\bar{\chi}_2 = \frac{1}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \chi_2 d\varphi = -\frac{4(1+\nu)P_0\theta_0}{3\pi E r_1} + \frac{8(1+\nu)P_0}{\pi E r_1 \theta_0^2} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\sin n\theta_0}{n\theta_0} - \cos n\theta_0 \right) \left[2(1-\nu) - \frac{(1-2\nu)}{n} \right] \frac{\sin n\theta_0}{n^2} \right\}. \quad \text{Для} \quad \text{второй} \quad (64)$$

модели - упругого полупространства со свободной границей, изменение кривизны:

$$\chi_2^* = -\frac{2(1-\nu^2)P_0}{\pi E b^2} \left[X(1n(b+X) - 1n(b-X)) - 4b \right]$$

Среднее значение изменения кривизны:

$$\bar{\chi}_2^* = \frac{1}{b} \int_0^b \chi_2^* dX = \frac{4(1-\nu^2)P_0}{\pi E b^3} \int_0^b \left[X(1n(b+X) - 1n(b-X)) - 2b \right] dX = \frac{4P_0(1-\nu^2)}{\pi E r_1 \theta_0}. \quad \text{При } r_1 = 0,026 \text{ м, } \theta_0 = (66)$$

$0,0698813 \text{ рад.}$, вычислены значения $\bar{\chi}_2$, $\bar{\chi}_2^*$: $\bar{\chi}_2 = 3,060 \cdot 10^{-4} P_0 \cdot \text{м}^{-1}$; $\bar{\chi}_2^* = 3,040 \cdot 10^{-4} P_0 \cdot \text{м}^{-1}$. Результаты достаточно близкие. При $|x| > b$:

$$\chi_2^* = -\frac{8(1-\nu^2)P_0}{3\pi b E} \left(\frac{b}{X} \right)^2 \left[1 + \frac{3}{5} \frac{b^2}{X^2} + \frac{3}{7} \frac{b^4}{X^4} + \dots \right].$$

Оценим отношение кривизны χ_2^* на расстоянии $|x| > b$ к средней кривизне:

$$\frac{\chi_2^*}{\bar{\chi}_2^*} < \frac{2}{3} \left(\frac{b}{X} \right)^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{b}{X} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (11)$$

Из условия (11) следует, что на удалении $|x| > 5b$ кривизна составит около 3% средней кривизны для участка контакта. Из сопоставления кривизны для двух моделей полупространства и оценки быстроты убывания кривизны вытекает, что существенным для изменения кривизны на участке контакта является закон контактного давления. Действие контактной нагрузки носит локальный характер. Рассчитывается погонная нагрузка N на метр длины зуба:

$$N = \frac{4P_0 r_1}{\theta_0} \left(\frac{\sin \theta_0}{\theta_0} - \cos \theta_0 \right).$$

Расчеты выполнены для редуктора шагающего экскаватора ЭШ 6,5×45: радиусы $r_1 = 26$ мм и $R_2 = 25$ мм. Варьировались: радиус R_1 и угол θ_0 . Результаты расчета представлены в виде эпюр (рис. 2 - 25). Для вариантов q_0 , θ_0 вычислены компоненты контактных напряжений в сечении зуба, при $(r-r_1)/r = 0; 0,1; 0,3$ и построены эпюры напряжений, а также компоненты напряжений в сечении ролика. Для $\varphi = 0; 45^\circ; 90^\circ$ построены эпюры напряжений в зависимости от $(r-R_1)/(R_2-R_1)$. Как показали расчёты, напряжения ролика значительно превышают напряжения зуба.

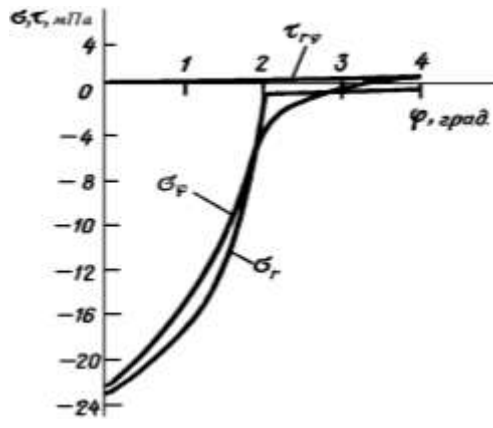


Рис. 2 Эпюры контактных напряжений в сечении зуба: $q = 0,92$; $\Theta_0 = 2^\circ$; $(r - r_1)/r_1 = 0$

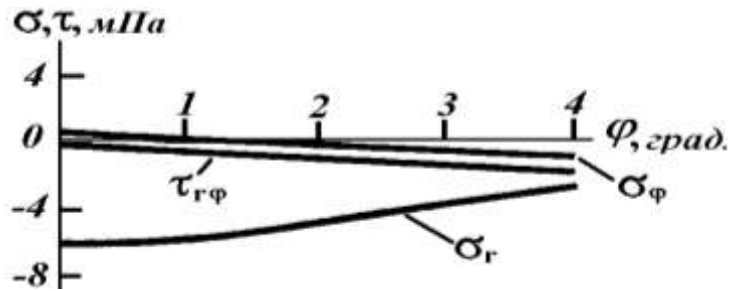


Рис. 3 Эпюры контактных напряжений в сечении зуба: $q = 0,92$; $\Theta_0 = 2^\circ$; $(r - r_1)/r_1 = 0,1$

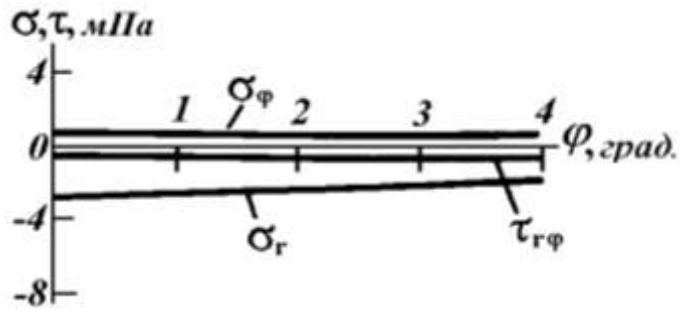


Рис. 4 Эпюры контактных напряжений в сечении зуба: $q = 0,92$; $\Theta_0 = 2^\circ$; $(r - r_1)/r_1 = 0,3$

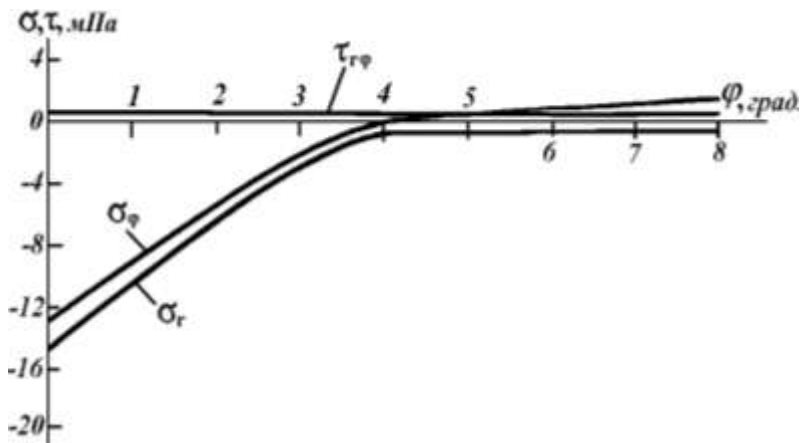


Рис. 5 Эпюры контактных напряжений в сечении зуба: $q = 0,92$; $\Theta_0 = 4^\circ$; $(r - r_1)/r_1 = 0$

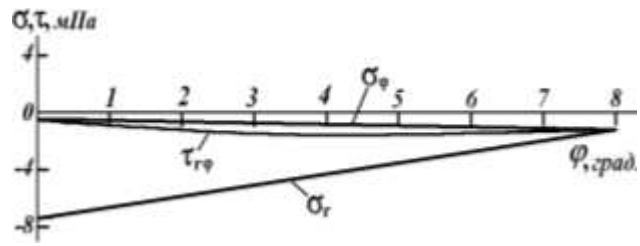


Рис. 6 Эпюры контактных напряжений в сечении зуба: $q = 0,92$; $\Theta_0 = 4^\circ$;
 $(r - r_1)/r_1 = 0,1$

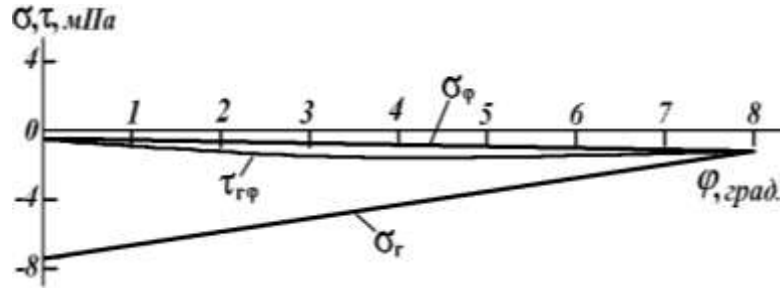


Рис. 7 Эпюры контактных напряжений в сечении зуба: $q = 0,92$; $\Theta_0 = 4^\circ$;
 $(r - r_1)/r_1 = 0,3$

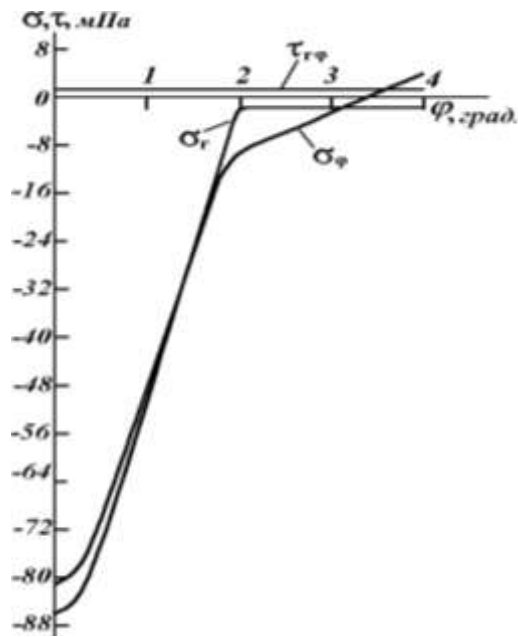


Рис. 8 Эпюры контактных напряжений в сечении зуба: $q = 0,84$; $\Theta_0 = 2^\circ$;
 $(r - r_1)/r_1 = 0$

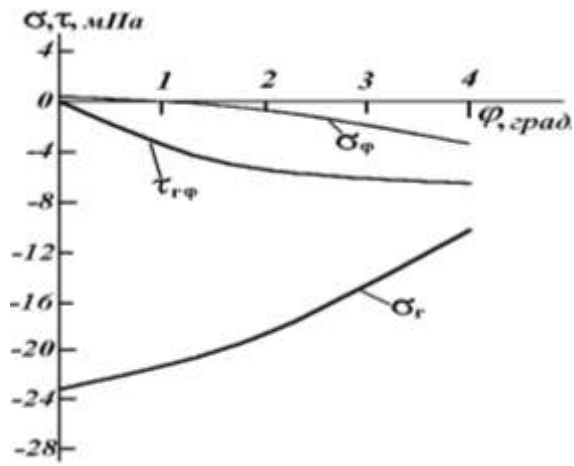


Рис. 9 Эпюры контактных напряжений в сечении зуба: $q = 0,84$; $\Theta_0 = 2^\circ$;
 $(r - r_1)/r_1 = 0,1$

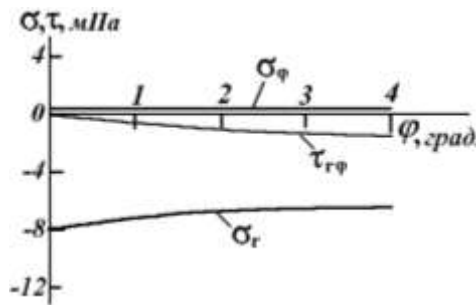


Рис. 10 Эпюры контактных напряжений в сечении зуба: $q = 0,84$; $\Theta_0 = 2^\circ$;
 $(r - r_1)/r_1 = 0,3$

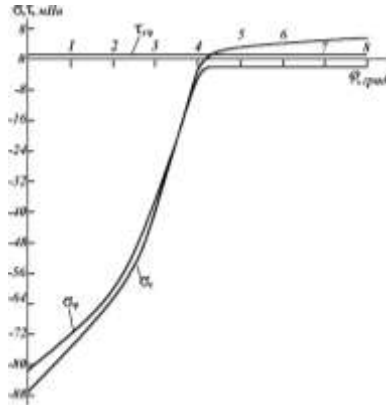


Рис. 11 Эпюры контактных напряжений в сечении зуба: $q = 0,84$; $\Theta_0 = 4^\circ$;
 $(r - r_1)/r_1 = 0$

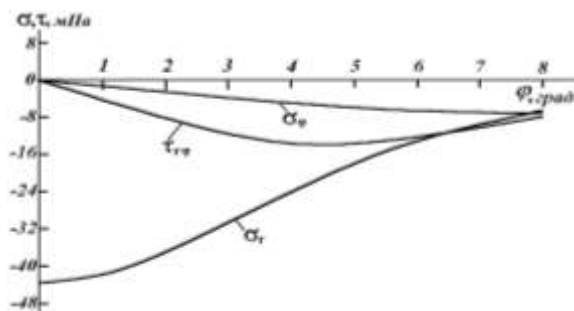


Рис. 12 Эпюры контактных напряжений в сечении зуба: $q = 0,84$; $\Theta_0 = 4^\circ$;
 $(r - r_1)/r_1 = 0,1$

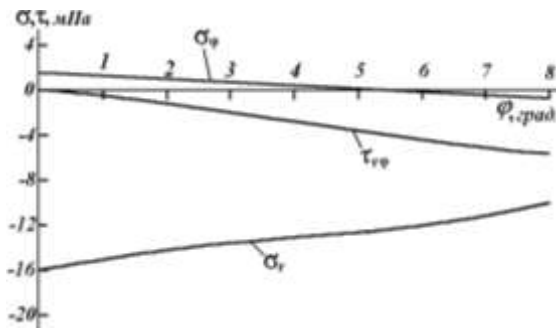


Рис. 13 Эпюры контактных напряжений в сечении зуба: $q = 0,84$; $\Theta_0 = 4^\circ$;
 $(r - r_1)/r_1 = 0,3$

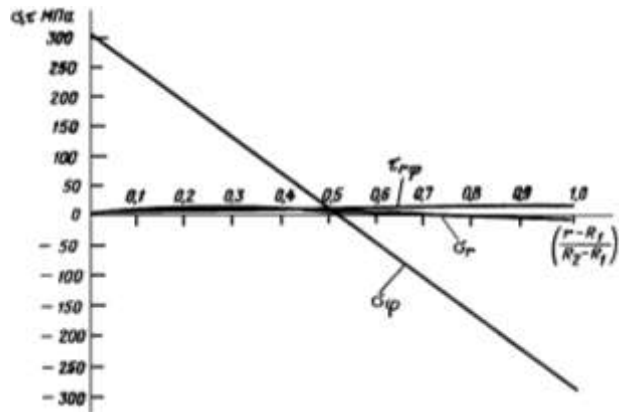


Рис. 14 Эпюры напряжений в сечении ролика: $q = 0,92$; $\Theta_0 = 2^\circ$; $\varphi = 0^\circ$

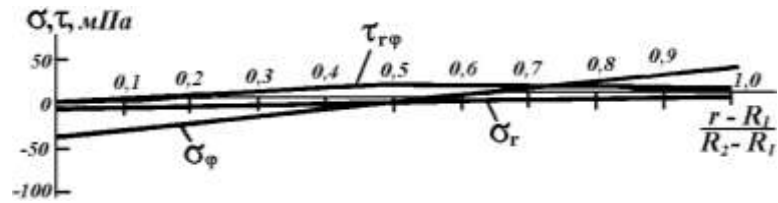


Рис. 15 Эпюры напряжений в сечении ролика: $q = 0,92$; $\Theta_0 = 2^\circ$; $\varphi = 45^\circ$

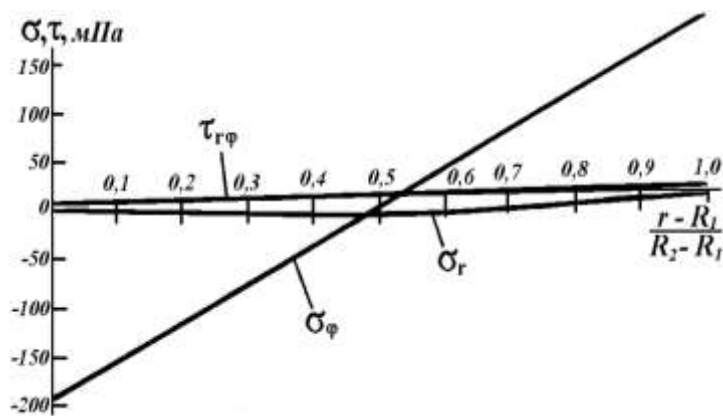


Рис. 16 Эпюры напряжений в сечении ролика: $q = 0,92$; $\Theta_0 = 2^\circ$; $\varphi = 90^\circ$

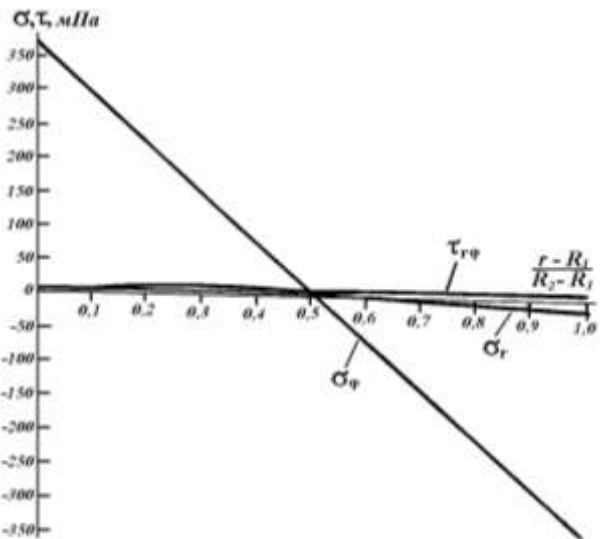


Рис. 17 Эпюры напряжений в сечении ролика: $q = 0,92$; $\Theta_0 = 4^\circ$; $\varphi = 0^\circ$

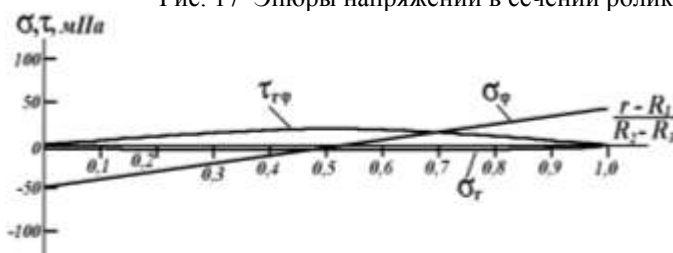


Рис. 18 Эпюры

напряжений в сечении ролика: $q = 0,92$; $\Theta_0 = 4^\circ$; $\varphi = 45^\circ$

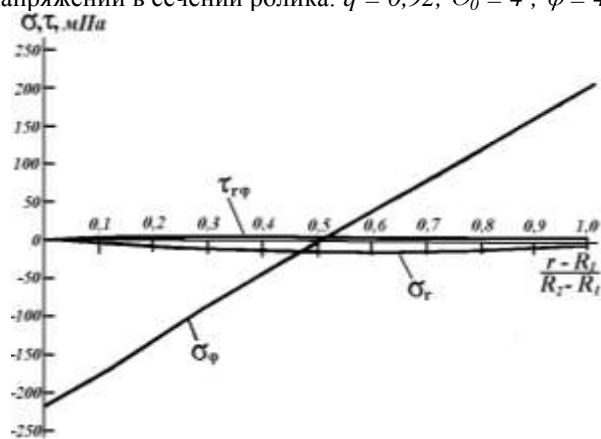


Рис. 19 Эпюры напряжений в сечении ролика: $q = 0,92$; $\Theta_0 = 4^\circ$; $\varphi = 90^\circ$

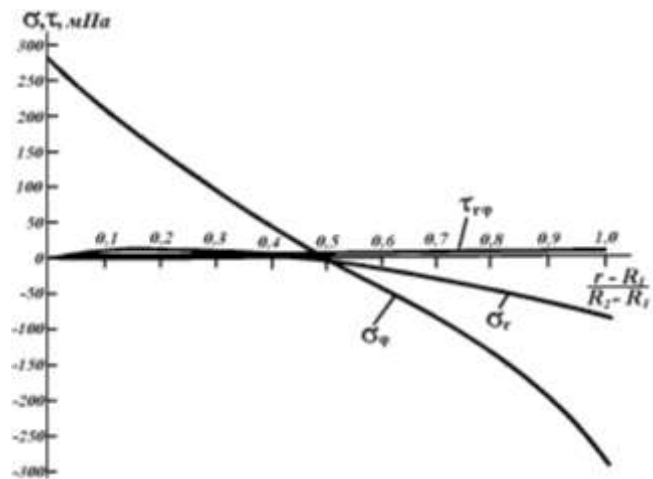


Рис. 20 Эпюры напряжений в сечении ролика: $q = 0,84$; $\Theta_0 = 2^\circ$; $\varphi = 0^\circ$

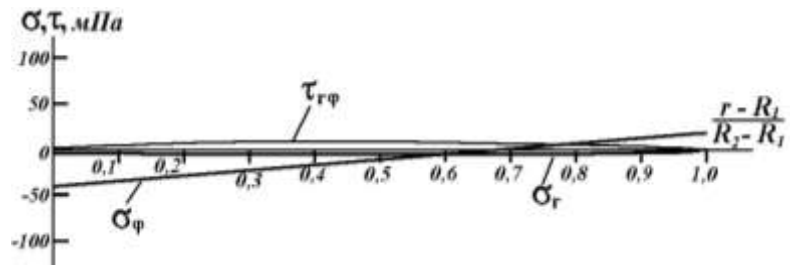


Рис. 21 Эпюры напряжений в сечении ролика: $q = 0,84$; $\Theta_0 = 2^\circ$; $\varphi = 45^\circ$

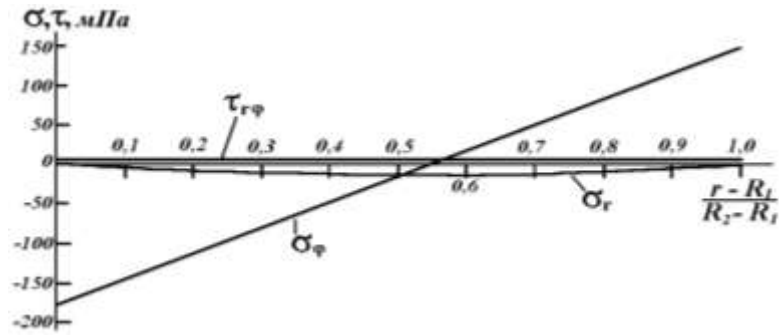


Рис. 22 Эпюры напряжений в сечении ролика: $q = 0,84$; $\Theta_0 = 2^\circ$; $\varphi = 90^\circ$

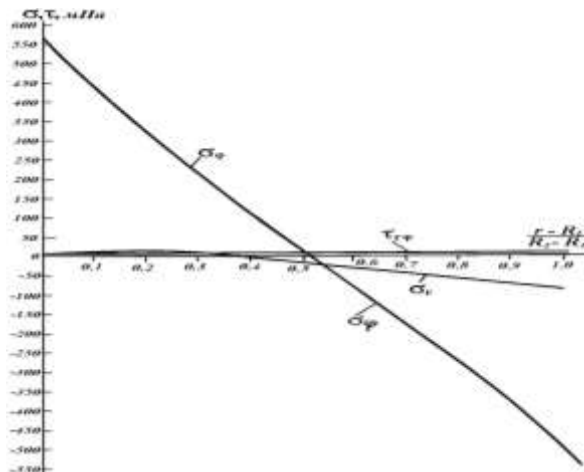


Рис. 23 Эпюры напряжений в сечении ролика: $q = 0,84$; $\Theta_0 = 4^\circ$; $\varphi = 0^\circ$

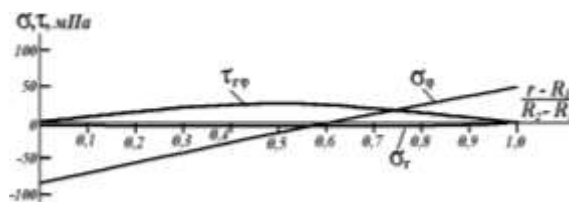


Рис. 24 Эпюры напряжений в сечении ролика: $q = 0,84$; $\Theta_0 = 4^\circ$; $\varphi = 45^\circ$

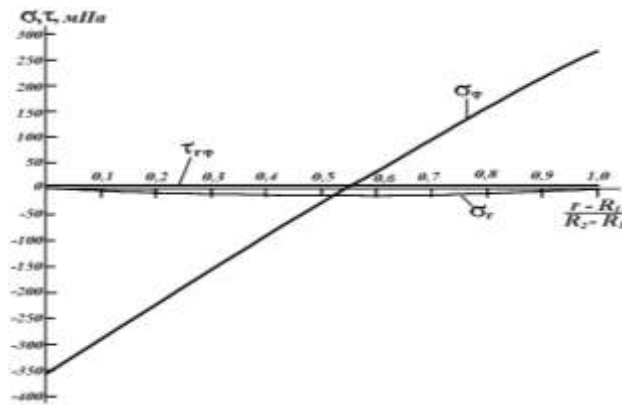


Рис. 25 Эпюры напряжений в сечении ролика: $q = 0,84$; $\Theta_0 = 4^\circ$; $\varphi = 90^\circ$

Контактные задачи выпукло-вогнутых цилиндрических поверхностей близкой кривизны впервые рассмотрены Штаерманом для случая взаимодействия цилиндра с отверстием в пространстве. Им было получено условие контакта поверхностей

$$W_2 - W_1 = \delta \cos \varphi - \Delta R (1 - \cos \varphi),$$

где W_2 и W_1 – упругие радиальные смещения, δ – смещение центра вала, ΔR – разность радиусов цилиндрических поверхностей, φ – полярный угол относительно центра отверстия. Герц при составлении условий контакта предполагал, что соответственные точки контактирующих тел испытывают перемещения параллельные направлению приложенных сил, а первоначальный зазор аппроксимировал параболической зависимостью:

$$W_{z_1} + W_{z_2} = \delta - \frac{X^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где W_{z_1} , W_{z_2} – упругие смещения точек поверхности тел, δ – смещение удаленных точек тел, R_1 , R_2 – радиусы кривизны контактирующих тел, X – линейная координата в плоскости перпендикулярной направлению нагрузки. Для малых протяженностей поверхностей контакта при малых значениях φ оба условия контакта эвольвентны.

В условие контакта входят упругие перемещения, вызванные контактной нагрузкой. Штаерман, как и Герц, использовал при их представлении формулы для перемещений точек поверхности упругого плоского полупространства. Дальнейшее улучшение постановки задачи было сделано Перссоном [10]. В решении контактной задачи им использованы функции напряжений для кругового диска и кругового отверстия в неограниченной плоскости, то есть в результате перемещения найдены с учетом первоначальной формы контактирующих тел.

Для площадок контакта малой ширины все три метода дают близкие результаты.

Решения Герца, Штаермана, Перссона не охватывают весь спектр практических задач о контактом взаимодействии упругих тел. Для передач с промежуточными телами качения представляет интерес задача о взаимодействии выпукло-вогнутых цилиндрических поверхностей близкой кривизны, где тонкостенный ролик контактирует с цилиндрическими поверхностями в полупространствах. Описанная контактная задача определила особые условия ее постановки и решения, учитывающие основные параметры плоского деформированного состояния тел и изменения их кривизны в зоне контакта при различных уровнях жесткости тонкостенного ролика и зуба. В постановке данной задачи учитывается форма контактирующих тел: используются решения задач о плоском деформированном состоянии полого цилиндра и полукруглой цилиндрической поверхности в упругом полупространстве. Использована также линейная зависимость изменения кривизны от максимального контактного давления P_0 . Поскольку угол Θ_0 , характеризующий протяженность зоны контакта, входит в формулы для упругих смещений и изменения кривизны в качестве нелинейного параметра. В результате получено условие контакта поверхностей (1), являющееся линейным относительно максимального давления. Решена обратная задача о контактом взаимодействии упругих тел, получена зависимости углов Θ_0 определяющих ширину контактной площадки от максимальных давлений P_0 для различных толщин стенки полого цилиндра. Это позволяет выбрать оптимальный конструктивный вариант, исходя из податливости и несущей способности промежуточных тел качения, контактной и изгибной прочности зубьев.

Выводы:

1. При заданных внешних размерах контактирующих цилиндрических поверхностей максимальное давление в зоне контакта зависит от ее ширины и толщины стенок ролика. Из сравнения результатов расчета следует, что в роликах с малой толщиной стенки максимальное контактное давление уменьшается с ростом ширины площадки контакта и по мере нарастания толщины стенок переходит к росту. Для роликов с тонкими стенками можно ожидать наличие критической силы, когда незначительный прирост усилия приводит к значительному увеличению ширины контактной поверхности. Ролики с малой толщиной стенок не обладают высокой несущей способностью, поэтому их выполняют многослойными.

2. Контактные давления рассчитанные для сплошного цилиндра при ширине зон контакта характеризуемых углами $\Theta_0=4^\circ$ и $\Theta_0=9^\circ$ были сопоставлены с контактными давлениями рассчитанными по формулам Герца. Максимальные давления получились на 60% выше давлений найденных по формулам Герца.

3. Распределение местных контактных напряжений в массиве зуба по своему характеру соответствует распределению Герца. Под центром контактной нагрузки напряженное состояние близко к всестороннему объемному сжатию. У поверхности $\sigma_r \approx \sigma_\varphi \approx P_0$. Под поверхностью в радиальных направлениях напряжения убывают и на глубине равной $0,3 r_1$ или $5b$ их величина составляет не более $0,2 P_0$. Напряжения σ_φ убывают значительно быстрее напряжений σ_r . Касательные напряжения равные нулю на вогнутой цилиндрической поверхности и достигают максимальных значений на глубине $0,1 r_1$, не превосходящие $0,1 P_0$. Таким образом, контактное давление на массив зуба создает местную концентрацию напряжений в поверхностном слое материала.

4. Условие контакта (1) поверхностей зуба и ролика содержат изменения их кривизны $\bar{\chi}_1$ и $\bar{\chi}_2$ при действии контактной нагрузки. Изменение кривизны ролика $\bar{\chi}_1$ найдено с учетом функции напряжений кругового кольца. Изменение кривизны вогнутой поверхности зуба определялось двумя способами. В обоих случаях использована модель упругого полупространства. В первом случае это упругая полукруглая цилиндрическая поверхность в упругом полупространстве. На участке цилиндрической поверхности приложена контактная нагрузка. Во втором случае полупространство с плоской границей на участке поверхности, которой приложена такая же контактная нагрузка. Максимальные контактные давления P_0 и P_{01} найденные по разработанным нами первой и второй моделям, получились практически одинаковыми для всех рассмотренных вариантов задач. Существенным для изменения кривизны на участке контакта является закон распределения контактных давлений и наличие свободной поверхности по обе стороны от участка нагруженного контактным давлением. Протяженность свободной поверхности должна быть не менее $5b$, где b – половина ширины площади контакта. Как показали расчеты на этом расстоянии можно пренебречь изменением кривизны вследствие действия контактной нагрузки.

5. Напряжения в полой ролике имеют большее значение, чем напряжения в зубе. При этом напряжения σ_r и $\tau_{r\varphi}$ как и в массиве зуба не превосходят максимального контактного давления P_0 , однако нормальные напряжения σ_φ во много раз превосходят контактное давление. При $q=0,92$ и $\Theta_0=4^\circ$ величина σ_φ превосходит P_0 в 26 раз. Наибольшие напряжения возникают вблизи отверстия под центром контактной нагрузки, приложенной на внешней поверхности. Здесь материал находится в одноосном напряженном состоянии, так как при $r=R_1$ и $\varphi=0$ получаем $\sigma_r=0$ и $\tau_{r\varphi}=0$. С ростом толщины стенок ролика напряжения уменьшаются. Так при $\Theta_0=2^\circ$ и уменьшении q с $0,92$ до $0,84$ максимальные напряжения σ_φ снижаются с 315 до 277 МПа. Однако они остаются высокими.

Из приведенных результатов можно заключить, что применение одного полого ролика нецелесообразно. Рационально применять многослойную конструкцию роликов.

Список литературы: 1. Hertz H. R. Über die Verteilung der Druckkräfte in einem elastischen Kreiszyylinder. Zeitschrift für Math. und Phys., 1883, Bd 28, Hft 2, s. 125-128. 2. Hertz H. R. Gesammelte Werke, Bd 1. Schriften vermischten Inhalts. Leipzig, Barth, 1895, 368 s. 3. Заблонский К.И., Филипович С.И. Совершенствование стандарта на расчёт нагрузочной способности зубчатых передач // Тезисы докл. Междунар. Научно – практ. конф. по проблемам обесп. надёжн. и кач. зубч. пер. "Зубч. п-чи – 99". - С.-Петербург: СПб Изд. Балт. гос. техн. ун-та «Военмех». - 1999. - С.4 - 6. 4. Заблонский К. И., Филипович С. И. Состояние оценки нагруженности зацепления в расчётных методиках // Тезисы докл. Междунар. научно – практ. конф. по проблемам обесп. надёжн. и кач. зубч. пер. «Зубч. передачи – 2000». - С.-Петербург: СПб: Изд-во Балт. гос. техн. ун-та «Военмех». - 2000. - С. 14 - 18. 5. Айрапетов Э. Л. Совершенствование методов расчета нагруженности и прочности передач зацеплением // Междунар. конф. "Качество зубчатых передач. Контактные разрушения" (ПРИБО-2001). - Техн. машиностр. – 2001. - № 2. – С. 8 - 33. 6. Штаерман И. Я. К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел // Докл. АН СССР. - Т. 25, № 5. - 1939. - С. 360-362. 7. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.: Гостехиздат, 1949. - 270 с. 8. Демидов С. П. Теория упругости. М., «Высшая школа», 1979, с. 432. 9. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М., «Мир», 1989г. 509 с. 10. Persson A. On the Stress Distribution of Cylindrical Elastic Bodies in Contact. – Dissertation, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg, 1964.

Поступило в редакцию 03.05.2007