УДК 621.833+ 515.2

А.И. ДЫГАЛО, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ» (г. Харьков),
И.П. ДЕМКОВСКИЙ, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ» (г. Харьков),
Н.В. МАТЮШЕНКО, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ» (г. Харьков)

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТОЧЕК КОНТАКТА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧАХ НОВИКОВА ДЛЗ С АРОЧНОЙ ФОРМОЙ ЗУБЬЕВ

У статті на основі лінійних дериваційних формул Вейнгардена та класичної теорії зубчастих передач з зачепленням Новікова знайдено ГМТ точок контакту як функції радіус-векторів спряжених поверхонь. Для циліндричних арочних передач Новікова ДЛЗ цей результат дає можливість за рахунок варіації подовжньої кривої та параметрів вихідного контуру ріжучого інструменту регулювати осьове зміщення точок контакту, що належать одному зубу, тобто на стадії проектування регулювати коефіцієнт перекриття.

Постановка проблемы в общем виде и связь ее с научным заданием. Конфигурация арочного зуба по высоте формируется исходным контуром инструментальной рейки в обкаточном движении, а по длине – как кинематической наладкой зуборезного станка, так и расположением резцов на резцовой головке. Форма зуба по длине изменяется и образует кривой зуб типа арки, что позволяет более эффективно использовать зацепление Новикова, особенно с двумя линиями зацепления (ДЛЗ). Нарезание зубьев арочной формы производится [1, 2] с помощью резцовых головок, и поэтому шаг зацепления в осевом направлении носит переменный характер. Появляется возможность за счет вариации продольной кривой зуба улучшать работоспособность и долговечность передачи.

Анализ последних достижений и публикаций, в которых намечены пути решения поставленной проблемы. В [3] показано, что если продольная кривая –круг, то достигается простота изготовления. В [2] исследуется вопрос выбора кривой арки в виде эллипса, при этом индикатрисы Дюпена в номинальной точке контакта не пересекаются, практически всегда осуществим контакт зубьев. Кроме этого, в [6] показано, что выбор продольной кривой в виде спирали Архимеда дает возможность производить меньшую величину проточки в средней части шеврона, а если эта кривая – циклоида, то осуществима возможность общей линии в контакте, возникает квазилинейный контакт сопряженных поверхностей с продольной приведенной кривизной равной нулю. В этом случае размеры мгновенных площадок контакта по длине являются максимально возможными, однако, как показано в [4], в подобных случаях зацепление имеет наибольшую чувствительность к погрешностям относительного положения колес и требуется введение продольной модификации зубьев.

Выделение нерешенных ранее частей проблемы. Для арочных цилиндрических передач Новикова с двумя линиями зацепления при всем разнообразии выбора продольной кривой не разработана методика, которая гарантирует, еще на стадии проектирования, наличие двухточечного контакта в любой фазе зацепления.

Цель статьи. Разработать критерий нахождения номинальной точки контакта при произвольном выборе продольной кривой арки.

Решение. Пусть имеется цилиндрическая зубчатая передача, для которой справедливо соотношение

$$\vec{V}_p = 0,$$

и, стало быть,

$$\vec{V}_{ba} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_p. \tag{1}$$

Здесь мы пользуемся терминологией статьи [7]. Проведем через некоторую точку M контакта зубчатых поверхностей Π_a и Π_b секущую плоскость перпендикулярно вектору Ω. Сечение поверхности зуба Π_a этой плоскостью дает некоторую кривую линию Γ_1, сечение поверхности Π_b – линию Γ_2. Эта же плоскость пересекает ось $O_v z_p$ в некоторой точке P', которую будем называть полюсной, на расстоянии $z_p = const$. Пусть S_1 – длина дуги линии Γ_1, S_2 – линии Γ_2. Тогда уравнения этих линий Γ_1 и Γ_2 при данном положении зубчатых колес соответственно будут

$$\vec{r}_{p1} = \vec{r}_{p1}(S_1);$$
$$\vec{r}_{p2} = \vec{r}_{p2}(S_2). \tag{2}$$

Если теперь для того же положения зубчатой передачи взять другое сечение плоскостью $z_p = const$, то линии Γ_1 и Γ_2 как-то изменятся, сообразно чему изменятся и уравнения (2). Иначе говоря, поверхности зубьев Π_a и Π_b мы соответственно представим в виде $\vec{r}_{p1} = \vec{r}_{p1}(S_1, z_p)$; $\vec{r}_{p2} = \vec{r}_{p2}(S_2, z_p)$.

Единичный вектор нормали на этих поверхностях соответственно будет

$$\vec{N}_a = \lambda_a \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_1} \times \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial z_p};$$
$$\vec{N}_b = \lambda_b \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_2} \times \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial z_p}, \tag{3}$$

где λ_a и λ_b – нормирующие до единичной длины множители. В точке касания M поверхностей Π_a и Π_b векторы $\vec{N}_a$ и $\vec{N}_b$ должны совпадать, т.е.

$$\lambda_a \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_1} \times \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial z_p} = \lambda_b \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_2} \times \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial z_p}.$$

Используем линейные деривационные соотношения:

$$\overrightarrow{\tau_\nu} \frac{dS_\nu}{dt} = \overrightarrow{\tau_\lambda} \frac{dS_\lambda}{dt} - \overrightarrow{v_a}; \tag{4^1}$$

$$\overrightarrow{\tau_\mu} \frac{dS_\mu}{dt} = \overrightarrow{\tau_\lambda} \frac{dS_\lambda}{dt} - \overrightarrow{v_b}. \tag{4^2}$$

Вычитая равенства (4^1) и (4^2) одно из другого, найдем для общей линии зацепления Γ_λ формулу

$$\vec{\tau}_\nu \dot{S}_\nu - \vec{\tau}_\mu \dot{S}_\mu = \vec{V}_b - \vec{V}_a = \vec{V}_{ba}. \tag{5}$$

Так как векторы $\vec{\tau}_\nu$ и $\vec{\tau}_\mu$ находятся в касательной плоскости к поверхностям зубьев Π_a и Π_b в точке M, то из (5) следует

$$\left(\vec{V}_b - \vec{V}_a\right)\vec{N} = \vec{V}_{ba}\vec{N} = 0. \tag{6}$$

Обратимся теперь к формуле (6), которую с учетом (1) и первой формулы (3) представим в виде $\lambda_a \Omega \left(\vec{k}_p \times \vec{r}_p\right)\left(\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_1} \times \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial z_p}\right) = 0$.

Но так как произведение $\lambda_a \Omega$ отлично от нуля, то необходимо, чтобы

$$\left(\vec{k}_p \times \vec{r}_p\right)\left(\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_1} \times \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial z_p}\right) = 0.$$

Это выражение может быть преобразовано к виду

$$\vec{r}_p \left[\left(\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_1} \times \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial z_p}\right) \times \vec{k}_p\right] = \vec{r}_p \left[\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial z_p}\left(\vec{k}_p \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_1}\right) - \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_1}\left(\vec{k}_p \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial z_p}\right)\right]. \tag{7}$$

Однако вектор $\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_1}$ есть единичный касательный вектор к линии Γ_1 в точке касания M. Следовательно, этот вектор находится в плоскости линии Γ_1, которая перпендикулярна вектору $\vec{k}_p$. Стало быть, и вектор $\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_1}$ также перпендикулярен вектору $\vec{k}_p$. Таким образом, должно быть $\vec{k}_p \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_1} = 0$, и тогда формула (7) принимает вид: $\left(\vec{r}_p \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_1}\right)\left(\vec{k}_p \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial z_p}\right) = 0$. Второй из этих сомножителей для зубчатых передач, передающих движение давлением поверхностей зубьев Π_a и Π_b, отличен от нуля. Стало быть, $\vec{r}_p \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial S_1} = 0$. Или иначе $\frac{\partial}{\partial S_1}\left(\frac{r_p^2}{2}\right) = 0$.

Равенство это может быть сформулировано экстремальной теоремой:

Из всех точек линии, получающихся от пересечения поверхности зуба плоскостью, точкой касания будет та, расстояние до которой от полюсной точки экстремально.

Следствие: *В точке касания контактных линий их общая касательная перпендикулярна вектору, проведенному из полюсной очки в точку касания.*

Выводы из данного исследования и перспективы последующих исследований в данном направлении. При разработке циклограммы зацепления для цилиндрических передач Новикова ДЛЗ с арочной формой зубьев необходима величина осевого смещения точек контакта, принадлежащих одному зубу, лежащих на разных контактных линиях. Экстремальная теорема позволяет обеспечить наличие этих точек контакта, а, следовательно, и плавность перекрытия.

Список литературы: 1. *Догода М.И.* Зубчатые передачи с круговой и циклоидальной линией зуба и технологические особенности их изготовления / М.И. Догода, В.Д. Тереник // Технология механосборочного производства. – Краматорск, 1975. – Вып.19. – С.55–59. **2.** *Догода М.И.* Зубчатые передачи с эллиптической линией зуба и особенности их изготовления / М.И. Догода, В.Д. Тереник, О.П. Гоголев // Технология механосборочного производства. – Краматорск, 1979. – Вып.5. – С.55. **3.** *Айрапетов Э.Л.* О выборе продольной кривизны арочных зубьев / Э.Л. Айрапетов, С.Э. Айрапетов, Т.Н. Мельникова // Цилиндрические передачи с арочными зубьями: Тез. докл. зонального семинара. – Курган, 1983. – С.11. **4.** *Паулиньш К.К.* Квазиэвольвентное зацепление в арочных цилиндрических передачах// Исследование и повышение качества поверхностей и эксплуатационных свойств материалов и изделий. – Рига, 1983. – С.45–56. **5.** *Догода М.И.* Оптимизация геометрических параметров арочных передач с зацеплением Новикова // Перспективные направления создания новых конструкций тяжелонагруженных редукторов и прогрессивная технология их изготовления: Тез. докл. науч. – техн. конф. – Краматорск, 1987. – С.145. **6.** *Wu X., Song X., Liu H.* A New method in curvature calculation of the conjugate gear surfaces in 3-d meshing. Mathematical theory and applications // Vol. 23. №3, 2003. – p.49–52. **7.** *Кириченко А.Ф., Матюшенко Н.В.* К вопросу о преобразовании геометрии зацепления Новикова с арочной формой зубьев к виду, удобному для анализа // Вісник Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2007. – Вип. 21. – С.166–170.

Поступила в редколлегию 15.05.08