2. *Павлов А.И.* Современная теория зубчатых зацеплений. – Харьков: ХНАДУ, 2005. – 100с. **3.** *Андриенко С.В., Вальнюк Т.Н., Павлов А.И.* Сравнение характеристик зубчатых передач с выпукло-вогнутым контактом // Труды международной конференции "Micro-CAD-98" – Харьков, 1998. – С.17-19. **4.** *Кириченко А.Ф., Андриенко С.В., Медведев Д.В., Павлов А.И.* Контроль точности изготовления зубчатых передач ВВК // Вестник ХГПУ. – Вып.100. – Харьков. – 2000. – С.108-110. **5.** *Павлов А.И., Андриенко С.В.* Построение рабочей поверхности зубьев звездочки цепной передачи // Вестник Харьковского национального университета "ХПИ". – Вып.8, т. 3. – Харьков. – 2003. – С. 43.

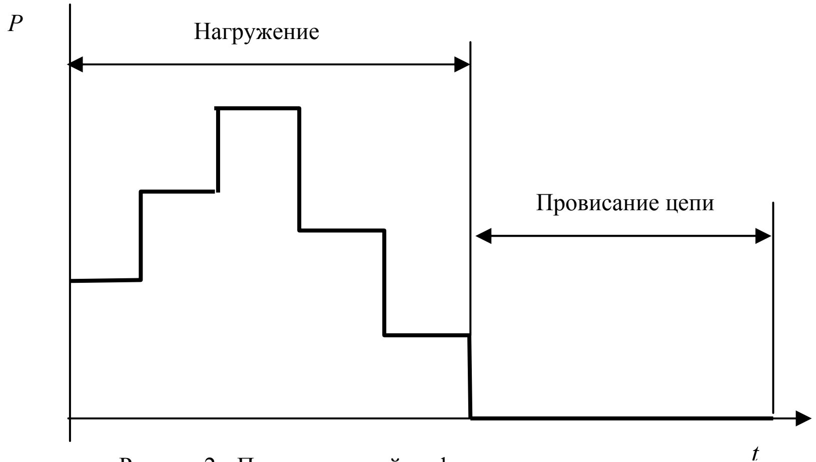


Рисунок 2 – Предполагаемый график нагрузки на звенья цепи

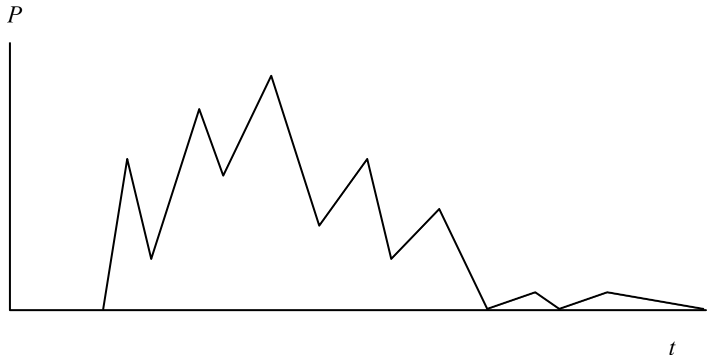


Рисунок 3 – Предполагаемый график измерений нагрузки на звенья цепи

Поступила в редколлегию 22.05.09

УДК 621.01; 621.833; 621.852

Д.Т. БАБИЧЕВ, д.т.н., профессор каф. "Детали машин" ТюмГНГУ
Д.А. БАБИЧЕВ, аспирант каф. МСП ТюмГНГУ (Нефтегазовый университет)
Д.Н. ПАНКОВ, ассистент каф. "Детали машин" ТюмГНГУ

АНАЛИЗ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ЗУБЬЕВ МЕТОДАМИ ОГИБАНИЯ ИЗЛОМАМИ НА ПРОИЗВОДЯЩИХ ПОВЕРХНОСТЯХ И ЛИНИЯХ

Відзначається, що на профілях і на поверхнях тел зустрічається три види зламі. Їм відповідає три геометричних образа: клин, віяло і пучок нормалей, які в геометрії та у класичній теорії зачеплення до авторів не використовувалися. Показана корисність цих образів при аналізі процесів формоутворення. Для всіх видів зламі наведені алгоритми для знаходження формообразующіх точок і контактних нормалей в них.

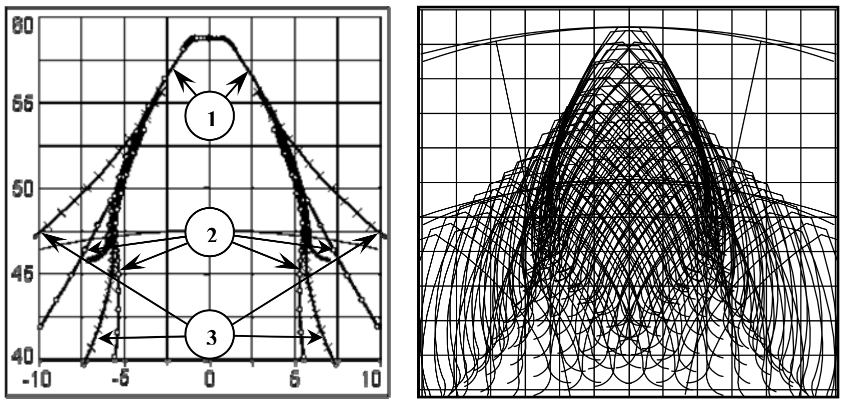
Noticed, that there are three kinds of fractures on cogs profiles and surfaces. And there are three geometrical forms equal with it: wadge, fan and normal bunch, which were not been used in geometry and classical gearing theory by other authors. The useness of that profiles for form-creation processes analyzing is established. Algorithms for form-creating points and normal contacts definition are described.

Методы анализа формообразования и изломы поверхностей и линий. Научная основа проектирования передач и зубообрабатывающих инструментов – теория зубчатых зацеплений (ТЗЗ). Ее главный объект исследования – поверхности, формируемые методами огибания, т.е. при сложных относительных движениях звеньев в передачах и в станочных зацеплениях. В ТЗЗ есть две группы методов анализа процессов такого формообразования: дифференциальные и недифференциальные. Основа дифференциальных методов [1-6] – теория огибающих. В кинематической трактовке при этом на производящей поверхности находят точки, в которых вектор относительной скорости $\mathbf{V}_{12}$ перпендикулярен вектору нормали $\mathbf{n}$ к производящей поверхности, т.е. те, где уравнение зацепления $\mathbf{V}_{12} \cdot \mathbf{n} = 0$. Основа недифференциальных методов [6,7] – непосредственное отслеживание во времени положения производящего элемента относительно звена, на котором формируется поверхность. И отбор точек, внедрившихся в тело заготовки глубже ранее сформированной поверхности обрабатываемой детали. Дифференциальные методы требуют меньшего объёма вычислений и позволяют определять кривизну. Но когда на производящем элементе встречаются особые точки (например, угловая точка в месте пересечения боковой и вершинной режущих кромок), то по всем канонам дифференциальной геометрии в такой особой точке нельзя найти касательную и нормаль к линии или к поверхности. Из этого делают вывод (см. например [6, стр. 464 и рис. 14.21]), что для особых точек производящего элемента огибающая вообще не существует, и ту часть реальной поверхности на изделии, которая формируется особыми точками, дифференциальными методами в принципе нельзя найти.

Ещё один недостаток дифференциальных методов в том, что он даёт не реальную поверхность, формируемую на изделии, а некую абстрактную "тонкую плёнку", которая может и самопересекаться, и располагаться внутри тела производящего элемента. Считается также, что дифференциальные методы не позволяют выявить срезы на формируемом зубе, которые могут появляться при подводе-отводе инструмента. Поэтому, дифференциальные методы считают менее надежными и их последнее время вытесняют недифференциальные. Актуальная проблема ТЗЗ – создание методов анализа формообразования с надежностью недифференциальных и достоинствами дифференциальных. Мы полагаем, что кинематический метод исследования формообразования, относящийся к дифференциальным, может достичь надежности недифференциальных методов, если рассматривать формообразование изломами и применять многопараметрические огибания [8-9].

На рисунке 1, взятом из [8], как иллюстрация к сказанному, приведены результаты анализа формообразования эвольвентного зуба двумя методами. "Нарезалось" колесо с внутренними зубьями (z_2=20) долбяком (z_0=15, m=5). При этом главный профиль 1 и линии возможного среза в зоне вторичного резания (линии 2), найденные кинематическим методом с использованием изломов профиля долбяка на вершине его зуба, есть огибающие однопараметрического семейства профилей долбяка. Профили 3 – линии максимального возможного среза при подводе-отводе инструмента, являющиеся огибающими двухпараметрического семейства.

На рисунке 1б – "тёмный лес", в котором практически невозможно разглядеть все линии, изображенные на рисунке 1а. Но зато чётко выделяется

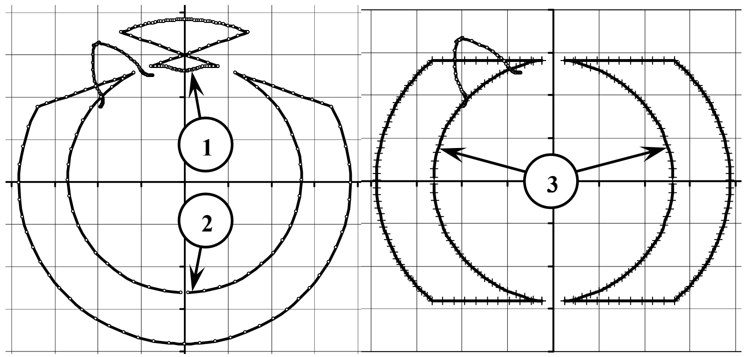


а) б)

Рисунок 1 – Два метода анализа процесса формообразования:
а) дифференциальный (кинематический) метод; б) не дифференциальный метод
1 – главный профиль, 2 – срезы в зоне вторичного резания (формируются изломами),
3 – срезы от подвода-отвода инструмента (огибающая двухпараметрического семейства)

"граница леса" – тот профиль, который будет получен на изделии в конце зубообработки.

На рисунке 2, взятом также из [8], показаны линии зацепления. Их три и все они замкнуты. Линия зацепления 1 порождает замкнутый главный профиль 1 зубчатого венца. (На рисунке 1а показан лишь главный профиль 1 одного зуба, полученный при однократном "пробеге" контактных формообразующих точек по замкнутой линии зацепления 1 на рисунке 2а). Линия зацепления 2 порождает замкнутый профиль 2, состоящий из эвольвентных участков (левого и правого) и отрезков гипоциклоидного вида, связывающих эвольвентные. При этом связываются профили не соседних зубьев. Линии зацепления 3 порождают два замкнутых профиля 3 (левый и правый); на каждом из них по два эвольвентных участка и по два отрезка гипоциклоидного вида, объединяющих эвольвенты на не соседних зубьях.



а) б)

Рисунок 2 – Линии зацепления при обработке эвольвентного колеса:
а) однопараметрическое огибание: обкат долбяка по колесу;
б) двухпараметрическое огибание: обкат и подвод-отвод долбяка

Замкнутость линий зацепления и формируемых профилей, а также возможность их "расщепления" находится в полном соответствии с теоремами и аксиомами формообразования, изложенными в [10, 9].

Заметим, что понятие об изломах, как специфических особенностях производящих поверхностей, идет, по всей видимости, от П.Р.Родина. В 1977 году [11, стр.52] он писал: "…поверхность детали, состоящую из ряда смежных участков, можно рассматривать как единую поверхность. Причем, точку излома профиля поверхности, расположенную на границе смежных участков, можно считать участком дуги окружности, радиус которой стремится к нулю". Но, насколько нам известно, дальнейшего развития эта идея не получила и серьезных математических моделей на ее основе не создавалось.

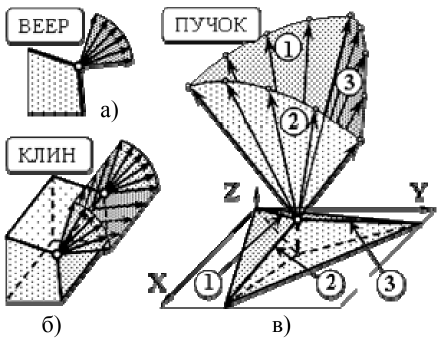


Рисунок 3 – Виды изломов и геометрические образы, порождаемые ими:
а) плоский излом и веер нормалей
б) кромочный излом и клин нормалей
в) вершинный излом и пучок нормалей

1. Об изломах поверхностей тел. На рисунке 3 показаны все возможные виды изломов и геометрические образы, порождаемые ими. Имеется три вида изломов:
1 – *Плоский излом* (излом плоского профиля). В нём – плоский веер нормалей.
2 – *Кромочный излом* (излом поверхности тела по линии). В нём – пространственный клин нормалей. При неплоских пересекающихся поверхностях клин может быть достаточно сложным. Торцовые поверхности клина – всегда плоскости (не всегда параллельные); а боковые – линейчатые поверхности общего вида. Ребро же, порождающее клин, в общем случае, есть пространственная линия.
3. *Вершинный излом* (излом поверхности тела в вершине). В изломе – пространственный пучок нормалей. Отметим два важных свойства такого излома: **а**) Вершина – всегда точка пересечения *трех* поверхностей. Четырехгранная вершина – это две совпавшие вершины двух трехгранных пирамид. А пятигранная – три совпавшие вершины также трехгранных пирамид. И так далее. **б**) Пучок нормалей всегда ограничен плоскими гранями. Для трехгранной вершины – это сектор, вырезанный из шара тремя плоскостями 1, 2, 3, проходящими через вершину и перпендикулярными "своим" трем ребрам.

Во всех пространственных зацеплениях изломы поверхностей тел – двумерные объекты, имеющие две криволинейные координаты: например, v вдоль и u поперек линии излома. Во всех плоских зацеплениях изломы профилей – одномерные объекты, имеющие одну криволинейную координату u, идущую вдоль профиля. При изменении криволинейной координаты u, декартовы координаты x, y, z точки в изломе не меняются, но становятся иными проекции n_X, n_Y, n_Z вектора нормали к поверхности в этой точке.

Полезность предлагаемых множеств нормалей (веер, клин и пучок) при анализе формообразования иллюстрирует рисунок 4, на котором в данном положении точка В является контактной, а точка С.– нет. Классическая ТЗЗ объяснить математически причину этого не

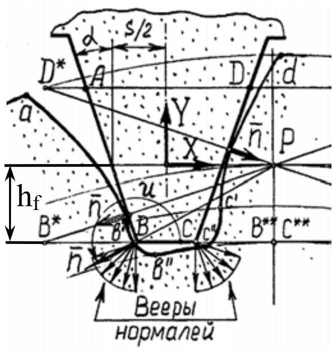


Рисунок 4 – Почему точка В контактная, а точка С – нет

может. Хотя она проста: одна из нормалей веера В проходит через полюс зацепления и здесь есть точка, в которой $\mathbf{V}_{12}\cdot\mathbf{n}=0$, а веер в точке С такой нормали не содержит.

2. Уравнения формообразования классической ТЗЗ. При использовании кинематического метода классическое уравнение поверхности P_2, формируемой методом однопараметрического огибания, имеет вид:

уравнение производящей поверхности P_1: $\quad \mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1(u,v)$ (1а)

уравнение зацепления (скорость внедрения [2]): $V_B=F(u,v,\varphi)=\mathbf{V}_{12}\cdot\mathbf{n}=0$ (1б)

уравнение преобразования координат: $\quad \mathbf{r}_2=\mathbf{r}_2(u,v,\varphi)=\mathbf{M}_{21}(\varphi)\cdot\mathbf{r}_1(u,v)$ (1в)

нормаль к поверхности P_2: $\quad \mathbf{n}_2=\mathbf{n}_2(u,v,\varphi)=-\mathbf{M}_{21}(\varphi)\cdot\mathbf{n}_1(u,v)$ (1г)

нормаль к поверхности P_1: $\quad \mathbf{n}_1=\mathbf{n}_1(u,v)=W_{НОРМ}(\mathbf{r}_1(u,v))$ (2а)

относительная скорость: $\mathbf{V}_{12}=\mathbf{V}_{12}(u,v,\varphi)=\mathbf{V}_{12}(\mathbf{r}_1,\varphi)=W_{СКОР}(\mathbf{M}_{21}(\varphi),\mathbf{r}_1(u,v))$ (2б)

Здесь: u, v – две криволинейные координаты на поверхности P_1; φ – параметр огибания; $\mathbf{M}_{21}$ – матрица преобразования координат точек и проекций векторов из системы координат $X_1Y_1Z_1$ в систему $X_2Y_2Z_2$; $W_{НОРМ}$ – некоторый оператор, основанный на методах дифференциальной геометрии, воздействие которого на уравнение (1а) поверхности P_1 даёт уравнения для вычисления проекций вектора нормали $\mathbf{n_1}$ к этой поверхности P_1; $W_{СКОР}$ – оператор, основанный на векторных или матричных операциях, включающих, в том числе, и дифференцирование [4], который при воздействии на матрицу $\mathbf{M}_{21}$ и на уравнение (1а) поверхности P_1 даёт уравнения для вычисления проекций вектора относительной скорости $\mathbf{V}_{12}$.

Заметим, что в теории зацеплений [4, 6] принято сопряженную поверхность P_2 описывать лишь уравнениями (1а)–(1в). Нам представляется запись уравнения P_2 в полной и операторной форме (1)–(2), хотя и громоздкой, но более корректной. Ведь такая запись содержит *все операции* (включая процессы $W_{НОРМ}$ и $W_{СКОР}$ – хотя бы по названию, а не по содержанию), которые нужно выполнить *над всеми данными и уравнениями* – производящей поверхностью $\{\mathbf{r_1}(u,v)\}$ и движениями звеньев $\{\mathbf{M_{21}}(\varphi)\}$, чтобы получить сопряженную поверхность $\{\mathbf{r_2}\}$. Т.е. эта форма записи позволяет *отразить в уравнениях все процессы и алгоритмы*, сопутствующие формообразованию поверхностей и контакту тел.

Классическое уравнение поверхности P_2, формируемой методом двухпараметрического огибания, похоже на уравнения (1)–(2) для однопараметрического:

уравнение производящей поверхности: $\quad \mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1(u,v)$ (3а)

ур-ния зацепления (скорости внедрения [2]): $\left.\begin{aligned} V_B^{\varphi}&=F_1(u,v,\varphi,S)=\mathbf{V}_{12}^{\varphi}\cdot\mathbf{n}=0\\ V_B^{S}&=F_2(u,v,\varphi,S)=\mathbf{V}_{12}^{S}\cdot\mathbf{n}=0\end{aligned}\right\}$ (3б) уравнение преобразования координат: $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(u, v, \varphi, S) = \mathbf{M}_{21}(\varphi, S) \cdot \mathbf{r}_1(u, v)$ (3в)

нормаль к поверхности P_2: $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2(u, v, \varphi, S) = -\mathbf{M}_{21}(\varphi, S) \cdot \mathbf{n}_1(u, v)$ (3г)

нормаль к поверхности P_1: $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1(u, v) = W_{НОРМ}(\mathbf{r}_1(u, v))$ (4а)

относительные скорости:
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_{12}^{\varphi} &= \mathbf{V}_{12}^{\varphi}(\mathbf{r}_1, \varphi, S) = W_{СКОР}(\mathbf{M}_{21}(\varphi, S), \mathbf{r}_1(u, v)) \\ \mathbf{V}_{12}^{S} &= \mathbf{V}_{12}^{S}(\mathbf{r}_1, \varphi, S) = W_{СКОР}(\mathbf{M}_{21}(\varphi, S), \mathbf{r}_1(u, v)) \end{aligned}\right\} \quad (4б)$$

В уравнениях (3)–(4) два параметра огибания (φ и S) и поэтому: две относительные скорости и два уравнения зацепления – сравните (4б) с (2б) и (3б) с (1б).

3. Особенности анализа формообразования изломами. Из (1)–(4) видно, что при анализе процессов формообразования нужно вычислять координаты точек на производящей поверхности ($\mathbf{r}_1$) и нормали ($\mathbf{n}_1$) к этой поверхности. В классической ТЗЗ уравнения (1а) для вычисления ($\mathbf{r}_1$) получают так: а) вводят декартовы системы координат и делают эскиз производящей поверхности или линии; б) записывают уравнение производящей линии в виде $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u)$ или производящей поверхности в виде $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u, v)$. А формулы в виде $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1(u)$ или $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1(u, v)$ для вычисления нормали находят методами дифференциальной геометрии, что показано в уравнениях (2а) и (4а), как воздействие оператора $W_{НОРМ}$ на уравнение $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u, v)$ производящей поверхности.

Для излома поверхности уравнения (2а) и (4а) из формул (2а) и (4а) методами дифференциальной геометрии не получить, т.к. в изломе $\dfrac{d\mathbf{r}_1}{du} = 0$. Но это можно делать, используя геометрические образы: веер, клин и пучок нормалей. Так для плоского излома в точке В, показанного на рисунке 4, уравнения для радиус-вектора $\mathbf{r}_1$ и для орта нормали $\mathbf{n}$ можно записать, опираясь лишь на рисунок 4:

$$x = -\frac{S}{2} + h_f \cdot \operatorname{tg}\alpha;\ y = -h_f;\ n_x = \cos u;\ n_y = \sin u;\ \text{где}\ (180° + \alpha) \le u \le 270° \quad (5)$$

где u – криволинейная координата.

Необычность уравнений (5) в их двойственности: **а**) т.к. в формулы для вычисления координат не входит криволинейная координата, то *это точка*; но **б**) т.к. в формулы для вычисления проекций орта нормали криволинейная координата входит, то *это линия*. Хотя из первых двух уравнений (координаты), две последние формулы (орт нормали) методами дифференциальной геометрии не получить, т.к. $\dfrac{dx}{du} = \dfrac{dy}{du} = 0$. В целом, формулы (5) – это уравнение плоского излома: в точке расположен веер нормалей, который, являясь одномерным множеством (функцией от одной переменной – криволинейной координаты u), ведет себя в вопросах формообразования, как линия. Подставив уравнения (5) плоского излома в (1б), можно в задачах профилирования решать полученное уравнение зацепления хоть относительно параметра огибания, хоть относительно криволинейной координаты u.

Аналогично можно записывать уравнения двумерных изломов: **а**) кромочного излома – в нём будет линия излома $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u)$ и поверхность клина нормалей $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1(u, v)$; **б**) вершинного излома – с вершиной $\mathbf{r}_1 = const$ и с поверхностью пучка нормалей $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1(u, v)$. А затем получать и решать уравнения зацепления (1б) и (3б) и относительно параметров огибания φ, S и относительно криволинейных координат u, v. При этом возможно два принципиально различных варианта решения задачи нахождения поверхности, формируемой методами огибания:

Вариант 1 – практически чистая классика ТЗЗ: задать два параметра из трёх или четырёх, определяющих положение точки производящего элемента в пространстве (из u, v, φ, S); решив уравнения зацепления (1б) или (3б), найти недостающие один или два параметра; вычислить $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{n}_2$, по формулам (1а, 2а, 1в, 1г) или по (3а, 3а, 3в, 3г). Если при этом точка попадает на излом, то нормаль к производящему элементу не исчезает. В этом отличие от классики.

Вариант 2 – новый и сильно отличающийся от классики: **а**) задать перемещения звеньев и "гладкую" криволинейную координату v вдоль излома **б**) проверить, есть ли в этой точке излома хотя бы одна контактная точка; если "нет" – перейти к следующему участнику; если "да" – найти контактную нормаль или контактный веер нормалей в этой точке и вычислить $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$. Отличительные особенности этого варианта: **а**) нужны уравнения для проверки: есть ли контактная точка на фрагменте производящего элемента (такого нет в классике); **б**) нахождение контактной точки в изломах специфично: вначале находят контактную нормаль, а уже потом криволинейную координату, ей соответствующую; (в классике порядок вычислений противоположный). Ниже рассмотрим подробнее этот вариант 2.

4. Формообразование линий изломами профилей в плоских зацеплениях. На рисунке 5 показан плоский излом. На изломе три точки: А, В – начало и конец излома, С – расчетная точка. Различаем две вида параметров: единые и базовые.

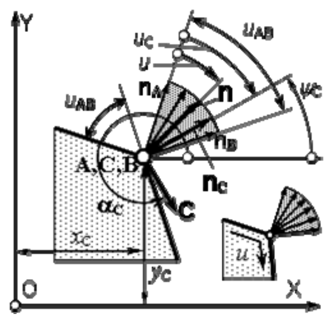


Рисунок 5 – Параметры плоского излома

Единые параметры одни для всех типовых отрезков различных линий, включая и плоский излом. Это: **1**) Параметры положения: координаты излома x_C, y_C; направление нормали в расчетной точке Ψ_C; признак p_T, показывающий с какой стороны расположено тело детали при движении от начала к концу излома (p_T=+1 – справа; p_T=–1 – слева). **2**) Размерный параметр u_{AB} – угол излома (т.к. при $u_{AB} > 0$ – излом выпуклый, при $u_{AB} < 0$ – вогнутый, то знак u_{AB} еще и параметр формы). **3**) Параметр формы: радиус кривизны R=0. **4**) параметр границы u_C – "расстояние расчетной точки С" от точки А начала излома.

Базовые параметры удобнее для вычисления: координат точек, касательных и нормалей при задании точки в изломе криволинейной координатой *u*. Это: **а**) x_C, y_C, n_{AX}, n_{AY}, n_{BX}, n_{BY} – координаты точки излома и проекции орта нормали в точках А и В; **б**) u_{AB} – угол излома (со знаком).

На рисунке 6 показаны четыре возможных вида плоских изломов и соответствующие этим видам сочетания признака p_T положения тела детали и знака угла излома u_{AB}. Формулы, приводимые ниже, пригодны для всех этих видов изломов.

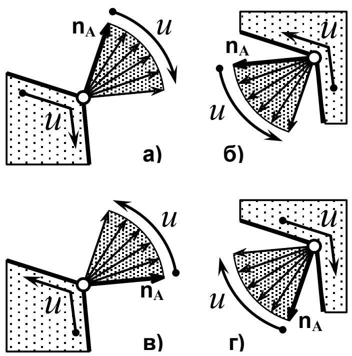


Рисунок 6 – Виды плоских изломов:
а – $p_T = 1$, $u_{BA}>0$; **б** – $p_T=1$, $u_{BA}<0$;
в – $p_T=-1$, $u_{BA}>0$; **г** – $p_T=-1$, $u_{BA}<0$.
$\mathbf{n}_A$ – орт нормали в начале веера;
u – направление роста криволинейной координаты

<ins>Перерасчет единых параметров в базовые:</ins>

$$\left.\begin{aligned}
&p_R = if\ \ u_{AB} < 0\ then\ -1\ else\ 1; \qquad p_B = -p_T \cdot p_R; \qquad u_{\max} = abs(u_{AB});\\
&\Psi_A = \Psi_C - p_B \cdot u_C; \qquad \Psi_B = \Psi_A + p_B \cdot u_{\max}; \qquad k = p_R \cdot \left(10^{10} ... 10^{12}\right);\\
&n_{AX} = \cos\Psi_A, \qquad n_{AY} = \sin\Psi_A, \qquad n_{BX} = \cos\Psi_B, \qquad n_{BY} = \sin\Psi_B.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

где p_B – вспомогательный признак направления поворота нормали в веере (p_B = +1 – против часовой стрелки, p_B = –1 – по часовой стрелке); *k* – кривизна в изломе.

<ins>Вычисление параметров текущей точки</ins>, заданной криволинейной координатой *u*:

$$\left.\begin{aligned}
&u = if \quad u < 0 \quad then \quad 0 \quad else \quad if \quad u > u_{\max} \quad then \quad u_{\max} \quad else \quad u;\\
&\Psi = \Psi_A + p_B \cdot u; \quad n_X = \cos\Psi, \quad n_y = \sin\Psi; \quad c_X = -p_T \cdot n_Y; \quad c_Y = p_T \cdot n_X.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

<ins>Нахождение контактной (формообразующей) точки</ins>. Это возможно, если в дополнение к базовым параметрам, найден вектор $\mathbf{V_{12}}$ относительной скорости в изломе:

1. Находим нормаль **N** в середине излома: $N_X = n_{AX} + n_{BX}$; $N_Y = n_{AY} + n_{BY}$ (8)
2. Вычисляем скорости внедрения в начале и в конце излома:

$$\left.\begin{aligned}
V_B^{begin} &= V_{12X} \cdot n_{AX} + V_{12Y} \cdot n_{AY};\\
V_B^{end} &= V_{12X} \cdot n_{BX} + V_{12Y} \cdot n_{BY}.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

3. Выясняем, является ли излом формообразующим – находим признак p_F наличия в изломе формообразующей точки:

$$p_F = if\ \ V_B^{begin} \cdot V_B^{end} > 0\ then\ 0\ else\ 1. \quad (10)$$

4. Если p_F=1, то излом формообразующий и находим орт контактной нормали:
Если V_{12}=0 то

формируется слепок производящего излома, т.е. обратный веер нормалей
иначе

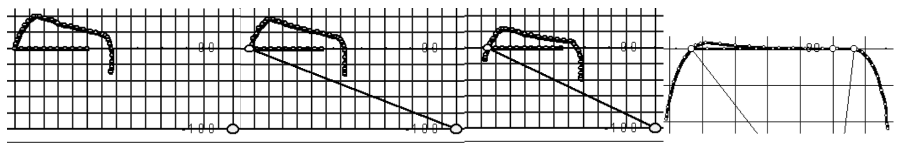
находим орт контактной нормали:

$$\left.\begin{aligned}
&k = Sign(N_X \cdot V_{12Y} - N_Y \cdot V_{12X});\\
&n_X = \frac{k \cdot V_{12Y}}{V_{12}}, \qquad n_Y = -\frac{k \cdot V_{12X}}{V_{12}}.
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

а затем вычисляем и криволинейную координату *u* контактной точки:

$$u = \Psi - arctg\frac{n_Y}{n_X}; \quad u = u + if\ \ u < 0\ then\ 2\pi\ else\ if\ \ u > \pi\ \ then\ -2\pi\ else\ 0. \quad (12)$$

Поясним на примере, представленном на рисунке 7, что дает применение изломов. На этом рисунке для плоского зацепления показано четыре фазы взаимодействия производящего отрезка L_1 (прямой с изломами по 70^0 на её концах) и сопряженного ему профиля L_2. Движения звеньев – слева направо. В фазе 1 – сопряженные профили не касаются: нет контактной нормали, поэтому отрезок L_1 ещё не формообразующий. Фаза 2 – начало контакта L_1 и L_2: появилась на L_1 контактная нормаль, проходящая через полюс зацепления; отрезок L_1 стал формообразующим. Фаза 3– продолжается формообразование переходной кривой на L_2 левым изломом. В фазе 4 – на отрезке L_1 имеется сразу три формообразующих точки: каждая из них формирует свой участок на L_2; видны три контактные нормали.



а) б) в) г)

Рисунок 7 – Профилирует отрезок с изломами на концах

Удивительно, но, задав всего 6 чисел о производящем отрезке (координаты двух концов и два угла излома), получаем по основной программе состыкованными все три кривые, сопряженные с отрезком. И это, не решая каких-либо дополнительных уравнений для нахождения точки сопряжения переходной кривой с основным профилем (что приходится делать при классическом подходе).

5. Формообразование поверхностей кромочными изломами тел. На рисунке 8 изображен кромочный излом поверхности тела. На смежные поверхности и излом нанесена кривая (можно принять, что это координатная *u*-линия). Вдоль этой линии показаны орты нормалей к поверхности. Обратим внимание на ряд обстоятельств: **а**) кривая, описывающая концом орта нормали, есть непрерывная линия, дающая щетки нормалей на поверхностях и веер нормалей в изломе; **б**) эта пространственная линия имеет изломы в местах "стыковки" веера и щеток нормалей; **в**) веер нормалей к ребру объект плоский и эта плоскость перпендикулярна к ребру. Базовые параметры ребра такие же, как у плоского излома, но с учетом трехмерности пространства. Это: **а**) векторы: точки на ребре (**r**), орты нормалей в начале ($\mathbf{n}_A$) и в конце ($\mathbf{n}_B$) излома, орт касательной ($\boldsymbol{\tau}$) к ребру; **б**) максимальная криволинейная координата (u_{max}), кривизна (k) в изломе; **в**) признак p_R выпуклости излома.

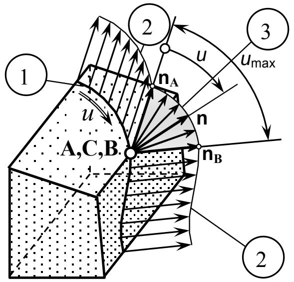


Рисунок 8 – Параметры кромочного излома: **1** – *u*-линия; **2** – щетки нормалей; **3** – веер нормалей; $\mathbf{n_A}$, $\mathbf{n_B}$ – главные орты веера нормалей

Заметим, что между u_{max}, а также ортами $\mathbf{n}_A$, $\mathbf{n}_B$ и $\boldsymbol{\tau}$ существует очевидная связь: $k\cdot\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{n}_A \times \mathbf{n}_B)$, где $k=\pm\sin(u_{max})$. Т.е. набор базовых параметров избыточен. И его можно поделить на две части:
а) основные базовые параметры – минимальный набор, однозначно определяющий геометрию описываемого объекта; б) дополнительные параметры, сокращающие вычисления – их целесообразно найти один раз в начале, чтобы многократно не вычислять через основные параметры. В данном случае, для кромочного излома основные параметры: **r**, $\mathbf{n}_A$, $\mathbf{n}_B$ и p_R; дополнительные: $\boldsymbol{\tau}$, u_{max} и k.

Вычисление параметров текущей точки, заданной криволинейной координатой *u*:
1. Проверяем, является ли тройка векторов $\mathbf{n}_A$, $\mathbf{n}_B$ и $\boldsymbol{\tau}$ правой (если $\boldsymbol{\tau}$ найдено не через $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{n}_A\times\mathbf{n}_B$)): $\quad p_P=\textit{знак}((\mathbf{n}_A\times\mathbf{n}_B)\cdot\boldsymbol{\tau})$ (13)
2. Находим вспомогательный вектор **C**, перпендикулярный к $\mathbf{n}_A$ и лежащий в плоскости веера нормалей (нужен, чтобы искомый вектор **n** орта нормали, спроецировать на два ортогональных базиса: $\mathbf{n}_A$ и **C**): $\mathbf{C}=p_P(\boldsymbol{\tau}\times\cdot\mathbf{n}_A)$ (14)
3. Вычисляем орт вектора нормали: $\quad \mathbf{n}=\mathbf{n}_A\cos u+\mathbf{C}\sin u$ (15)

Нахождение контактной (формообразующей) точки в изломе:
1. Находим признак p_F – есть ли в этом месте на ребре формообразующая точка:

$$p_F=\textit{если}\ (\mathbf{V}_{12}\cdot\mathbf{n}_A)(\mathbf{V}_{12}\cdot\mathbf{n}_B)>0\ \textit{то}\ 0\ \ \textit{иначе}\ 1 \qquad (16)$$

2. При p_F=1, формообразующая точка есть, и вычисляем орт нормали в ней:

$$\mathbf{n}=\frac{\boldsymbol{\phi}\times\mathbf{V}_{12}}{V_{12}}; \qquad \mathbf{n}=sign\left(\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{n}_A+\mathbf{n}_B\right)\right)\cdot\mathbf{n} \qquad (17)$$

Замечание. Если $\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{V}_{12}$=0 (вектор относительной скорости направлен вдоль ребра), то все точки излома (веера нормалей) являются формообразующими.

Покажем, как найти перечисленные выше основные базовые параметры (**r**, $\mathbf{n}_A$, $\mathbf{n}_B$ и p_R) для кромочного излома на винтовой поверхности постоянного шага (косозубом колесе, червяке и т.п.). На рисунке 9 приведены параметры винтового кромочного излома: R – расстояние излома от оси; a_z – смещение начальной точки; β – угол наклона зуба на ребре излома (β>0 – правый заход); λ – угол наклона "передней грани"; ν_0 – начальный угол веера нормалей; ν_K – конечный угол веера нормалей.

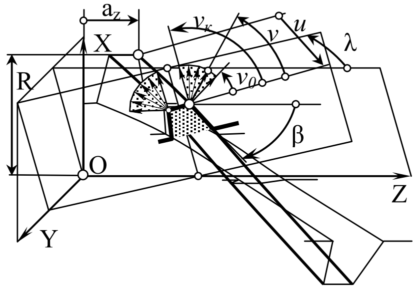


Рисунок 9 – Параметры кромочного излома на винте

Система параметров выбрана так, что:
- задав β=0 и λ=90^O, получим ребро на прямозубом колесе;
- задав β=90^O и λ=0, получим ребро на теле вращения (шлифовальном круге, дисковой или пальцевой фрезе и т.п.);
- задав $\nu_0 \neq 90^O$ и $\nu_K \neq 90^O$, получим ребро не на поверхности вершин.

Криволинейные координаты на ребре излома: ν – угол лежащий в плоскости, перпендикулярный ребру изломов ($\nu_0 \le \nu \le \nu_к$), и u – линейное расстояние вдоль ребра излома до текущей точки. Уравнение ребра излома и ортов нормалей к нему:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cdot\cos(k\cdot u), & n_x &= \sin\nu\cdot\cos(k\cdot u)+\cos\nu\cdot\cos\beta\cdot\sin(k\cdot u);\\ y &= R\cdot\sin(k\cdot u), & n_y &= \sin\nu\cdot\sin(k\cdot u)-\cos\nu\cdot\cos\beta\cdot\cos(k\cdot u);\\ z &= a_z+u\cdot\cos\beta, & n_z &= \cos\nu\cdot\sin\beta. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Орт $\mathbf{c}_u$ касательной к ребру излома, т.е. к *u*-линии:

$$c_{ux}=-\sin(k\cdot u)\cdot\sin\beta,\quad c_{uy}=\cos(k\cdot u)\cdot\sin\beta,;\quad c_{uz}=\cos\beta \qquad (19)$$

В уравнениях (18 – 19) коэффициент k равен: $\quad k=\dfrac{\sin\beta}{R}$ (20)

6. Формообразование вершинными изломами тел. На рисунке 10 показан излом поверхности тела в виде трехгранной вершины. В таком изломе имеем: **а**) три пересекающихся ребра (1,2,3); **б**) три секущих плоскости, каждая из которых, являясь одной из трех граней пучка нормалей, перпендикулярна одному из ребер (обозначения их, соответственно:1,2,3); **в**) трех ортов нормалей ($\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$) к каждой из граней поверхности излома. Эти три орта нормалей являются одновременно ребрами трехгранного пучка нормалей. Отметим, что направление обхода троек всех элементов рассматриваемого излома (граней, ребер, секущихся плоскостей и ортов нормалей) всегда одинаковое: на рисунке 10 – против часовой стрелки. Из рисунка 10 видно, что вершинный излом поверхности тела, порождая при движении веер нормалей, перпендикулярный вектору относительной скорости, формирует, как правило, кромочный излом.

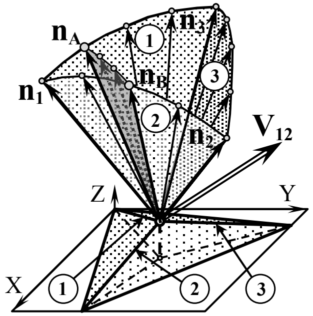


Рисунок 10 – Формирование ребра вершинным изломом: $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$ – нормали к граням вершины (пучок нормалей); $\mathbf{n_A}$, $\mathbf{n_B}$ – граничные нормали ребра (веер нормалей); $\mathbf{V_{12}}$ – относительная скорость

Основные базовые параметры вершины: радиус-вектор вершины (**r**), орты нормалей ($\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$) и признаки выпуклости трех ребер (p_{R1}, p_{R2}, p_{R3}). В зависимости от сочетания признаков выпуклости, существует четыре вида изломов в виде трехгранных углов, рождающих пучки нормалей: вершина, порог, изгиб, яма – см. рисунок 11. В задачах формообразования основной вид изломов – вершина (все p_R=+1), реже встречается излом, названный порогом (в нем у одного из ребер p_R=–1).

Нахождение контактных (формообразующих) точек в угловом изломе. Как и для кромочного излома были получены расчетные уравнения для нахождения контактных нормалей (их здесь не приводим). При выводе уравнений: а) введены нормированные криволинейные координаты для задания нормалей в пучке; б) применены дополнительные базовые параметры; в) проверялись все три граничных веера пучка нормалей на наличие в этих веерах контактных нормалей; г) рассмотрены все частные случаи.

Алгоритм нахождения контактного веера нормалей таков:

1. Проверить три веера, ограничивающих пучок нормалей, на наличие в них формообразующих точек – найти признаки формообразования ребер: p_{F1}, p_{F2}, p_{F3}.
2. Если Σp_F=0, то вершина не является формообразующей.
3. Если Σp_F=3, то найти формообразующий веер из условия $\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{V}_{12} = \mathbf{0}$.
4. Если Σp_F=2, то найти два орта $\mathbf{n}_A$ и $\mathbf{n}_B$ для тех двух вееров, у которых p_F=1.
5. Если Σp_F=1, то это свидетельствует об ошибке округления (или в программе). Хотя в этом случае можно найти и одну контактную нормаль (она должна быть очень близкой к одному из угловых ортов нормалей {$\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$}).

Правило выявления признака p_R выпуклости ребра, формируемого вершиной: он противоположен признаку p_R того ребра, на веере нормалей которого нет контактной точки. Например, на рисунке 10 $\mathbf{n}_A$ и $\mathbf{n}_B$ лежат на веерах ребер №1 и №2, следовательно, для формируемого ребра p_R=–p_{R3}=–1.

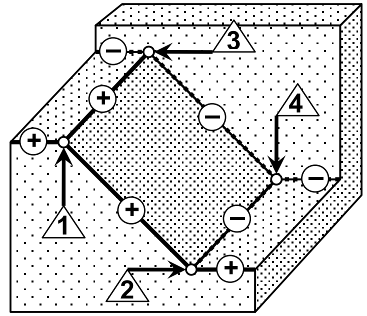


Рисунок 11 – Четыре вида угловых изломов тел:
1 – вершина (+++); 2 – порог (++–); 3 – изгиб (+– –); 4 – яма (– – –).
В скобках – выпуклость трех ребер: выпуклое ребро (+); вогнутое (–)

И еще одно весьма важное правило: рёбра, как огибающие семейства вершин, формируются снаружи тела производящей элемента лишь в том случае, когда обе контактные нормали находятся на веерах выпуклых ребер. Т.е., из четырех видов угловых изломов, представленных на рисунке 11:

а) вершина 1 всегда формирует вогнутые ребра снаружи своего тела;
б) порог 2 формирует выпуклое ребро снаружи тела, но только если контактные нормали $\mathbf{n}_A$ и $\mathbf{n}_B$ находятся на веерах двух ребер с положительной кривизной;
в) изгиб 3 и яма 4 всегда формируют ребра внутри своего тела.

Находить ребра и другие элементы, формируемые внутри тела производящего элемента, имеет смысл, чтобы получить одну непрерывную огибающую поверхность, из которой проще, чем из отдельных "обрывков" сформировать реальную поверхность: с изломами, срезами и т.д. Это относится к поверхностям, формируемым всеми видами изломов, а также другими производящими элементами.

Список литературы: 1. *Гохман Х.И.* Теория зацеплений, обобщенная и развитая путем анализа, Дисс... магистра механики. – Одесса, 1886. – 232с. **2**. *Шишков В.А.* Образование поверхностей резанием по методу обкатки. – М.: Машгиз, 1951. – 150с. **3**. *Колчин Н.И.* Аналитические основы дифференциального метода исследования зубчатых зацеплений // Труды семинара по теории машин и механизмов АН СССР. – Вып.64, 1957. **4**. *Литвин Ф.Л.* Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584с. **5**. *Залгаллер В.А.* Теория огибающих. М.: Наука, 1975. – 104с. **6**. *Шевелева Г.И.* Теория формообразования и контакта движущихся тел. – М.: Мосстанкин, 1999. –494с. **7**. *Несмелов И.П., Гольдфарб В.И.* Недифференциальный подход к решению задачи огибания // Механика машин. – Вып.61. – М.: Наука, 1983. – С.3–10. **8**. *Бабичев Д.Т.* О применении многопараметрических огибаний при компьютерном моделировании процессов формообразования в рабочих и технологических зацеплениях // Теория и практика зубчатых передач: Сб. докл. научно-технической конференции с международным участием. – Ижевск, 2004. – С.302–315. **9**. *Бабичев Д.Т.* Развитие теории зацеплений и формообразования поверхностей на основе новых геометро-кинематических представлений. Дисс… д-ра технич. наук. – Тюмень, 2005. – 421с. **10**. *Бабичев Д.Т.* Основы альтернативной теории формообразования, базирующейся на новых геометрических понятиях // Международная конференция "Техника проводов 03": Секция 1. Теория, расчет и конструирование трансмиссионных элементов. – Болгария, София, 2003. – С.270–275. **11**. *Родин П.Р.* Основы формообразования поверхностей резанием. – Киев: Вища школа, 1977. – 192с.

Поступила в редколлегию 20.05.09