инструмента // Станки и инструменты. – №1. – 1986. – С.18–19. **14.** *Бабичев Д.Т.* Ускорение внедрения и кривизны в зацеплениях // Теория и практика зубчатых передач и редекторостроения: Сб. докл. научно-технической конференции с международным участием. – Ижевск, 2008. – С.157–161. **15.** *Дусев И.И.* Связь между кривизнами взаимоогибаемых поверхностей зубьев пространственных зацеплений // Изв. вузов. Машиностроение. – 1969. – №3. **16.** *Бабичев Д.Т.* О применении многопараметрических огибаний при компьютерном моделировании процессов формообразования в рабочих и технологических зацеплениях // Теория и практика зубчатых передач: Сб. докл. научно-технической конференции с международным участием. – Ижевск, 2004. – С.302–315.

Поступила в редколлегию 14.04.10

УДК 621. 833

В.А. БЕРЕЖНОЙ, ст.преп. каф. НГГ НТУ "ХПИ", г. Харьков

О ВЫБОРЕ РАСЧЁТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРЯМОЗУБЫХ ПЕРЕДАЧ

Відбувається вибір розрахункової динамічної моделі для евольвентної циліндричної прямозубої передачі. На основі рівняння Лагранжа складається система дифференціальних рівнянь динамічної системи зубчастих передач.

Occurs a choice accounting dynamic models for cylindrical spur gears. On the base of equation Lagrang forms a system of differential equations of dynamic toothed issue system.

Введение. Точность динамического расчёта зубчатых передач определяется принятой моделью динамической системы и её параметрами. Сама процедура динамического расчёта зубчатых передач после получения системы дифференциальных уравнений, описывающих их динамическое состояние, не отличается от разработанных в теории колебаний аналитических и численных методов расчёта упругих систем. Поэтому основное внимание при динамических расчётах зубчатых передач следует уделять обоснованному выбору расчётных моделей и определению параметров зубчатых передач.

Выбор расчётной динамической модели для эвольвентной цилиндрической прямозубой передачи не может быть сделан однозначно, он в значительной мере зависит от целей выполняемого динамического расчёта. Поэтому следует стремиться к получению такой динамической модели, с помощью которой можно получить ответ на поставленный вопрос с необходимой точностью [1, 2].

Постановка задачи. Цель работы – обосновать простейшую эквивалентную схему и получить математическую модель динамики одноступенчатой цилиндрической эвольвентной прямозубой передачи на основе уравнений Лагранжа с учетом жесткости зубьев и валов, которая в дальнейшем будет

использована для исследования изменения собственных частот системы при воздействии на жесткость зубьев [3, 4].

Разработка расчётной динамической модели для эвольвентных цилиндрических прямозубых передач. Механическую систему "двигатель – передача – исполнительный механизм" можно упрощенно представить в виде эквивалентной четырехмассовой динамической модели (рисунок 1). Где: I_1 – момент инерции *двигателя*; I_4 – момент инерции *исполнительного механизма*; $I_ш$ и $I_к$ – моменты инерции *шестерни* и *колеса*; C_1 и C_4 – крутильные жесткости соединительных *валов*; $c^з_ш$ и $c^з_к$ – жесткости зубьев шестерни и колеса передачи; $C_з$ – жесткость зацепления передачи, где $C_з=c^з_ш+c^з_к$.

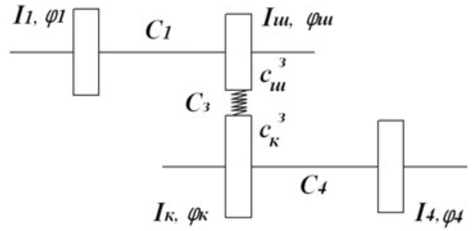

Рисунок 1 – Динамическая модель цилиндрического эвольвентного прямозубого зацепления в плоском виде

Зубчатые колёса представляются в виде твёрдых тел, посаженных на несущие валы, зубья же колёс представляются в виде консольных балок, жёстко соединённые с ободом зубчатого колеса (рисунок 2). Моделирование упругой связи непосредственно в зацеплении зубчатых колес осуществлено с помощью пружинки (рисунки 1-2).

При сделанных допущениях из анализа движения системы вытекает, что данная динамическая модель определяется четырьмя обобщенными координатами:

φ_1, φ_4 – углы поворота *ведущей* и *ведомой* присоединенных масс;

$\varphi_ш$, $\varphi_к$ – углы поворота *шестерни* и *колеса* соответственно.

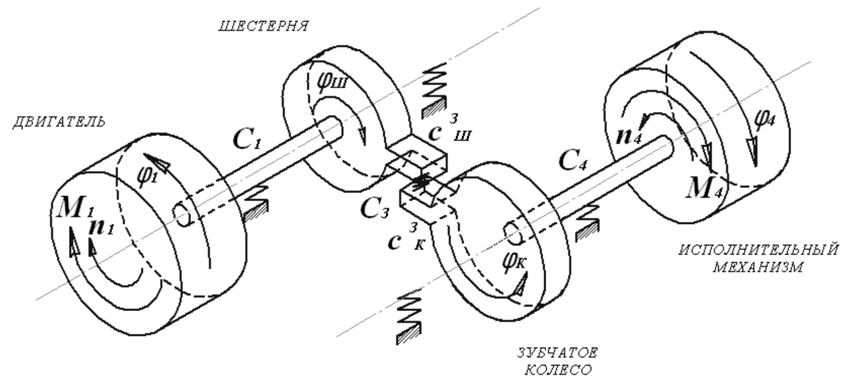

Рисунок 2 – Динамическая модель цилиндрического эвольвентного прямозубого зацепления в пространственном виде

Для принятой динамической модели, определенной четырьмя обобщенными координатами запишем дифференциальные уравнения движения. Для этого воспользуемся уравнением Лагранжа II рода [5]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}=Q_i\,, \qquad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы; Π – потенциальная энергия системы; Q_i – обобщенная сила, соответствующая i-й обобщенной координате; q_i – i-я обобщенная координата; $\dot{q}_i$ – скорость i-й обобщенной координаты.

Запишем кинетическую энергию исходной системы

$$2T = I_1\dot{\varphi}_1^2 + I_{ш}\dot{\varphi}_{ш}^2 + I_{к}\dot{\varphi}_{к}^2 + I_4\dot{\varphi}_4^2\,. \qquad (2)$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right)=I_1\ddot{\varphi}_1\,;\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1}=0\,;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4}\right)=I_4\ddot{\varphi}_4\,;\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_4}=0\,;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{ш}}\right)=I_{ш}\ddot{\varphi}_{ш}\,;\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_{ш}}=0\,;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{к}}\right)=I_{к}\ddot{\varphi}_{к}\,;\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_{к}}=0\,. \qquad (3)$$

Потенциальная энергия системы:

$$2\Pi = C_1(\varphi_1-\varphi_{ш})^2 + C_з(\varphi_{ш}R_{ш}-\varphi_{к}R_{к})^2 + C_4(\varphi_{к}-\varphi_4)^2\,. \qquad (4)$$

Тогда

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}=+C_1(\varphi_1-\varphi_{ш});\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{ш}}=-C_1(\varphi_1-\varphi_{ш})+C_зR_{ш}(\varphi_{ш}R_{ш}-\varphi_{к}R_{к});$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_4}=-C_4(\varphi_{к}-\varphi_4);\quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{к}}=-C_3R_{к}(\varphi_{ш}R_{ш}-\varphi_{к}R_{к})+C_4(\varphi_{к}-\varphi_4)\,. \qquad (5)$$

Обобщенные силы найдены как частные производные по обобщенным координатам из выражения для виртуальной работы (рисунок 2)

$$A=-\varphi_1M_1+\varphi_4M_4\,. \qquad (6)$$

Тогда

$$Q_{\varphi 1}=\frac{\partial A_{\varphi 1}}{\partial \varphi_1}=-M_1\,;\quad Q_{\varphi 4}=\frac{\partial A_{\varphi 4}}{\partial \varphi_4}=+M_4\,. \qquad (7)$$

Воспользовавшись уравнением Лагранжа, запишем дифференциальные уравнения движения приведенной системы:

$$\begin{cases} I_1\ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1-\varphi_{ш}) = -M_1; \\ I_{ш}\ddot{\varphi}_{ш} - C_1(\varphi_1-\varphi_{ш}) + C_3R_{ш}(\varphi_{ш}R_{ш}-\varphi_{к}R_{к}) = 0; \\ I_{к}\ddot{\varphi}_{к} - C_3R_{к}(\varphi_{ш}R_{ш}-\varphi_{к}R_{к}) + C_4(\varphi_{к}-\varphi_4) = 0; \\ I_4\ddot{\varphi}_4 - C_4(\varphi_{к}-\varphi_4) = +M_4. \end{cases} \qquad (8)$$

Полученная система дифференциальных уравнений второго порядка (8) описывает вынужденные колебания рассмотренной эквивалентной динамической модели зубчатой передачи и позволяет исследовать влияние на колебательный процесс основных геометрических, кинематических и динамических параметров линейной модели [6]. Решение данной системы (8) осуществляется в математическом пакете VisSim.6 на основе численного метода интегрирования метода Рунге-Кутта IV-го порядка.

Предложенная модель обеспечивает возможность имитационного изучения колебательных процессов в передаче за одно пересопряжение пары зубьев; один полный оборот и за несколько десятков оборотов одного из зубчатых колес при разных частотах вращения и со сменной по фазой зацепления жесткостью.

Список литературы: 1. *Абрамов Б.М.* Колебания прямозубых зубчатых колёс. – Харьков: ХГУ, 1968. – 175с. **2.** *Петрусевич А.И.* Динамические нагрузки в зубчатых передачах с прямозубыми колёсами. – М.: АН СССР, 1956. – 134с. **3.** *Арефьев В.А.* Снижение вибраций быстроходных зубчатых передач // Вестник машиностроения. – 1975. – №4. – С.25–27 **4.** *Берестнев О.В., Жук И.В., Неделькин А.Н.* Зубчатые передачи с повышенной податливостью зубьев. – Минск.: Наука и техника, 1993. – 184с. **5.** *Кириченко А.Ф., Воронцова Д.В., Бережной В.А.* Геометро-кинематическая модель динамики прямозубых эвольвентных передач с учётом модификации зубьев. // Вестник науки и техники // Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", ТОВ "Харьковский дом науки и техники" – Харьков: ТОВ "ХДНТ", 2006. – Вып.1-2(24-25). – С.11–17. **6.** *Бережной В.А., Матюшенко Н.В., ФедченкА.В.* О влиянии на динамику зубьев в эвольвентой прямозубой передаче // Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут". – Харків: НТУ "ХПІ", 2009. – Вип.19. – С.35–38.

Поступила в редколлегию 20.04.2010