

**В.Е. СТАРЖИНСКИЙ**, д.т.н., ИММС им. В.А. Белого НАН Беларуси, г. Гомель  
**Н.Н. ИШИН**, к.т.н., ОИМ НАН Беларуси, г. Минск  
**А.М. ГОМАН**, к.т.н., ОИМ НАН Беларуси  
**В.Ф. ХИЖЕНОК**, к.т.н., доцент ГГТУ им. П.О. Сухого, г. Гомель

### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ ПЛАСТМАССОВЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС С СИММЕТРИЧНЫМ И АСИММЕТРИЧНЫМ ПРОФИЛЕМ ЗУБЬЕВ

На прикладі приводу пристроїв побутової техніки розглядається ефективність вживання пластмасових зубчатих коліс з асиметричним профілем зубців.

As an example of household appliance drive efficiency of using plastic gears with asymmetric teeth is considered.

**Постановка задачи.** Идея использования несимметричных профилей зубьев (далее – установившийся в практике термин "асимметричный профиль"), получила широкое применение в практике проектирования зубчатых передач. На первом этапе, аналогично расчету зубчатых колес с симметричным исходным контуром, рассчитываются параметры зацепления зубцов, на втором – обычно производится расчет параметров унифицированного производящего реечного контура для пары сопряженных колес. В отдельных случаях назначают параметры индивидуальных реечных контуров для каждого из колес передачи. Преимуществом зубчатых передач с асимметричным профилем зубьев является увеличение угла зацепления по рабочим профилям (за счет уменьшения угла зацепления по нерабочим профилям) и возможность существенного увеличения коэффициента перекрытия.

В настоящей работе, на примере трехступенчатого привода электромотора с пластмассовыми зубчатыми колесами, дается сравнительный анализ расчетных напряжений для колес с симметричным и асимметричным профилем зубьев.

**Литературный обзор.** Реализация концепции асимметричных зубьев достигается как применением специальных исходных контуров, так и посредством проектирования зубчатых передач в системе обобщающих параметров. Особенности проектирования и реализации передач с асимметричными зубьями посредством использования специальных исходных контуров рассматривались в работах [1-3]. В работе [1] предлагаются простейшие расчетные формулы для прямозубых колес, аналогичных используемым при расчете передач со стандартным исходным контуром по ГОСТ 16532, в работе [2] – рассматривается более общий случай – косозубые колеса и несимметричный профиль производящей рейки с модификациями головок зубьев прямой ли-

нией и дугой окружности. Приводятся формулы для расчета измерительных размеров – для контроля прямых зубьев кромочным зубомером – номинальных  $S_y$  и  $h_{ay}$  [1] и с учетом допусков [2]; размера по роликам – номинального [1] и с учетом вышеуказанных модификаций и допусков [2, 3].

Для передач с асимметричными зубьями предлагается обобщенный исходный контур (ОИК) [4, 5], причем это понятие в совокупности с тангенциальным смещением путем изменения толщины зубьев за счет ширины впадины и радиального смещения исходного контура, является предпосылкой для создания обобщенной теории (ОТ) геометрического расчета эвольвентных зубчатых передач, в которой совмещаются положения как традиционной теории (ТТ), так и теории обобщающих параметров (ТОП). Подтверждением концепции обобщенности предлагаемой теории является общность расчетных зависимостей, которые можно преобразовать в частном случае для расчета передач с равноделенным исходным контуром и симметричным профилем зуба по ГОСТ 16532.

Универсальность предлагаемого подхода реализуется за счет использования в ТОП неравноделенных исходных контуров с асимметричными профилями, причем геометрия передачи определяется восемью (в отличие от четырех в ТТ) независимыми параметрами, в результате чего появляется возможность формирования семи разновидностей зубчатых колес (двухсторонне смещенных с разным сочетанием радиального  $x$  и тангенциального  $x_t$  смещения, радиально и тангенциально смещенных с разным соотношением  $x$  и  $x_t$ , равными или не равными нулю). Из указанных колес можно синтезировать девять разновидностей передач (для каждого из вариантов  $a_w=a$ ;  $a_w>a$  и  $a_w<a$  по три типа – без-, равно- и равновесно смещенные при  $a_w=a$  и двухсторонне, радиально и тангенциально смещенные при  $a_w<a$ ).

Как и для передач, спроектированных в системе обобщающих параметров, этот подход обеспечивает расширение области существования эвольвентного зацепления с повышением несущей способности передачи за счет реализации высоких показателей угла зацепления и коэффициента перекрытия.

При проектировании передач с асимметричным профилем зубьев в системе обобщающих параметров первоначально использовали способ представления несимметричных зубцов, составленных из двух половин симметричных зубцов, совмещенных по общей оси симметрии, при этом эффект асимметрии зацепления, как отмечается в работах [6-8] использовался не полностью (способ А). В работе [9] рассматривается другой способ формирования площадки на окружности вершин, при котором вводится понятие коэффициента асимметрии  $k = d_b^* / d_b > 1$  ( $d_b^*$  – основной диаметр нерабочего профиля,  $d_b$  – то же рабочего профиля;  $d_b^* > d_b$ ), и коэффициент рабочего участка начального шага  $\kappa = (S_1 + S_2) / p_w$ , показывающего, какая часть профилей контактирующих зубцов используется для передачи вращения. Для способа А  $\kappa=0,5$  (при заостренных зубьях) и необходимая толщина зубьев на окружности вершин формируется полностью за счет нерабочих половин зубцов. В зацеплении,

построенном по способу Б, появляется возможность варьировать величиной коэффициента  $\kappa$ , который может быть больше или меньше 0,5, а в предельном случае, при заострении, можно получить  $\kappa$ , близкий к единице<sup>\*</sup>. Показано [9], что возможны два варианта построения области существования передачи: при  $\kappa, m_{a1,2}=\text{const}$  или при  $\kappa, \kappa^*=\text{const}$  ( $\kappa^*$  – коэффициент нерабочего участка начального шага), причем в первом варианте заданы  $m_{a1}$  и  $m_{a2}$ , во втором – коэффициент суммарного относительного притупления зубцов  $\kappa_a=1-(\kappa+\kappa^*)$ , что позволяет варьировать величинами  $m_{a1}$  и  $m_{a2}$ , с целью, например, достижения равнопрочности на изгиб зубьев шестерни и колеса.

Развитие и обобщение разработанной Э.Б. Вулгаковым системы обобщающих параметров с выходом на современный уровень ее представления в виде компьютерных программ и организации процесса автоматизированного проектирования связано с именем его ученика и последователя А.Л. Капелевича, развивающего это направление под общим брендом "Direct Gear Design" [8].

В системе "Direct Gear Design" используется метод автоматизированного проектирования эвольвентной зубчатой передачи с оптимальными параметрами, отвечающим требованиям технического задания на проектирование, посредством представления области существования (зоны возможных конструкторских решений) передачи с асимметричным профилем зубьев в виде блокирующего контура в системе координат  $v_1$  и  $v_2$ . Зона существования строится для пары зубчатых колес с числами зубьев  $z_1$  и  $z_2$ , с заданными коэффициентом асимметрии  $k$  и коэффициентами толщины зуба на вершине  $m_{a1} = m_w/d_{b1}$  и  $m_{a2} = m_w/d_{b2}$ .

После того как в системе "Direct Gear Design" полностью определены параметры профилей эвольвентных зубцов, производится оптимизация параметров переходной кривой (галтели), с использованием [10, 11]:

- стохастического (вероятностного) метода расположения точек галтели, обеспечивающего минимизацию изгибных напряжений;
- тригонометрических функций для аппроксимации галтели;
- метода конечных элементов для расчета напряжений.

Оптимизированная переходная кривая обеспечивает минимизацию радиального зазора, исключает интерференцию профилей, благодаря образованию максимальных радиусов кривизны на всей переходной кривой происходит распределение изгибных напряжений на большом участке переходной кривой, достигается существенное снижение концентрации напряжений.

В одной из последних версий "Direct Gear Design" [12] рассматривается вариант автоматизированного проектирования, в соответствии с которым, наряду с традиционным этапом – созданием области существования эвольвентного зацепления пары колес с числами зубьев  $z_1$  и  $z_2$ , относительной толщиной на вершине зубьев  $m_{a1,2} = m/d_{b1,2}$  и коэффициентом асимметрии  $k$ , предусмотренный процесс предварительной оптимизации переходной галтели по эллипсу, в результате чего обеспечивается оперативный поиск приемлемого ва-

рианта передачи, для которой затем, по вышеописанной процедуре, производится окончательная оптимизация галтели.

Таким образом, оператор имеет возможность выбрать в пределах области существования передачи с заданными  $z_1$  и  $z_2$ , пару сопряженных зубчатых колес, с зубцами определенной геометрии, определить параметры зацепления, умножая единичные параметры из области существования на масштабный коэффициент (модуль или диаметральный питч), оценить соответствие качественных показателей и служебных свойств заданным параметрам проектирования, а затем рассчитать оптимальные параметры переходной кривой.

В результате реализации оптимального варианта передачи по системе "Direct Gear Design" (с асимметричными зубьями, коэффициентом перекрытия больше двух и оптимизированной по вышеуказанной схеме переходной кривой) существенно снижаются изгибные и контактные напряжения (таблица 1) [11].

Таблица 1 – Сравнение параметров передач, спроектированных по традиционной схеме и по системе "Direct Gear Design" ( $m=3\text{мм}$ ;  $z_1=27, z_2=49, \alpha_0=25^\circ; b_w=30\text{мм}; T_1=300\text{ Н}\cdot\text{м}$  [11])

| Параметр                                    | Исходный реечный контур с профильным углом $\alpha=25^\circ$ и полностью скругленной впадиной | Метод "Direct Gear Design", асимметричные зубья, коэффициент перекрытия больше двух |
|---|---|---|
| Рабочий угол зацепления $\alpha_w$          | 25  | 24  |
| Нерабочий угол зацепления $\alpha_w^*$      | 25  | 16  |
| Коэффициент перекрытия $\varepsilon_\alpha$ | 1,5   | 2,05  |
| Контактные напряжения $\sigma_H$ , МПа      | 976   | 777   |
| Разница %                                   | -   | -21   |
| Изгибные напряжения $\sigma_F$ , МПа        | 196*/198  | 130/128*  |
| Разница %                                   | -   | -35   |

Примечание: \* – над чертой – для шестерни, под чертой – для колеса

#### Алгоритм расчета передачи с асимметричными профилями зубьев.

Ниже дается краткое изложение алгоритма расчета зубчатой передачи с асимметричными зубьями по источнику [13].

Для рабочего профиля принимается больший угол давления, для нерабочего – меньший. Принимаются индексы: для рабочего профиля –  $d$  (по принятому индексу в англоязычной литературе – drive flank), для нерабочего –  $c$  (course flank).

Асимметричный эвольвентный зуб образуется двумя эвольвентами от различных основных окружностей  $d_{bc}$  и  $d_{bd}$  и ограничивается диаметром вершин  $d_a$  и переходной кривой, формируемой исходя из условия минимизации изгибных напряжений и приемлемого радиального зазора, рисунок 1:

<sup>\*</sup> Способ построения профилей защищен а.с. 1060839, Б.И. №46. 1983.

$$v_d = \arccos(d_{bd}/d_\Delta), \quad v_c = \arccos(d_{bd}/d_\Delta). \quad (1)$$

Коэффициент асимметрии  $k$  (для симметричных зубьев  $k=1$ )

$$k = d_{bc}/d_{bd} = \cos v_c / \cos v_d = \cos d_{bc} / \cos d_{bd}. \quad (2)$$

Профильные углы на диаметре  $d_a$

$$d_{ad} = \arccos(d_{bd}/d_a), \quad d_{ac} = \arccos(d_{bc}/d_a). \quad (3)$$

Коэффициент толщины зубьев на вершине

$$m_a = S_a/d_{bd} = [\text{inv } v_d + \text{inv } v_c - \text{inv } d_{ad} - \text{inv } d_{ac}] / 2 \cos m_a. \quad (4)$$

Коэффициент  $m_a$  выбирают в пределах  $(0,25 \dots 0,4)/z$ . Увеличение  $m_a$  ведет к уменьшению коэффициента перекрытия. На рисунке 2 – схема зацепления зубчатых колес с асимметричными зубьями.

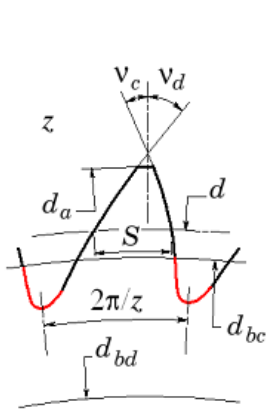


Рисунок 1 – Профиль асимметричного зуба в обобщающих параметрах [13]

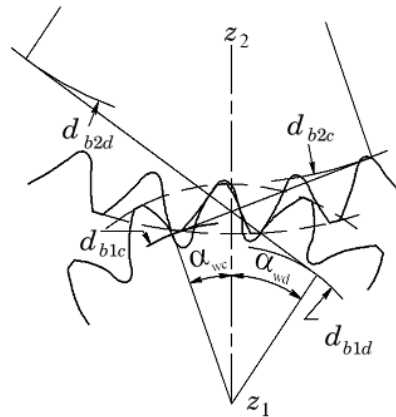


Рисунок 2 – Схема зацепления зубьев шестерни и колеса с асимметричными зубьями [13]

Углы зацепления  $\alpha_{wd}$  и  $\alpha_{wc}$  находят из (5) с учетом (2):

$$\text{inv } \alpha_{wd} + \text{inv } \alpha_{wc} = [\text{inv } v_{1d} + \text{inv } v_{1c} + u(\text{inv } v_{2d} + \text{inv } v_{2c}) - 2\pi/z_1](1+u). \quad (5)$$

Коэффициент перекрытия

– для рабочей стороны зуба

$$\varepsilon_{ad} = z_1 [\text{tg } \alpha_{a1d} + u \text{tg } \alpha_{a2d} - (1+u) \text{tg } \alpha_{wd}] / 2\pi; \quad (6)$$

– для нерабочей стороны зуба

$$\varepsilon_{ac} = z_1 [\text{tg } \alpha_{a1c} + u \text{tg } \alpha_{a2c} - (1+u) \text{tg } \alpha_d] / 2\pi. \quad (7)$$

Во избежание интерференции углы давления в нижних точках нерабочей стороны зуба (как наиболее чувствительные) должны быть больше или равны 0:

– для шестерни

$$\text{tg } \alpha_{p1c} = (1+u) \text{tg } \alpha_c - u \text{tg } \alpha_{p2c} > 0; \quad (8)$$

– для колеса

$$\text{tg } \alpha_{p2c} = (1+u) \text{tg } \alpha_c / u - \text{tg } \alpha_{a2c} / u > 0. \quad (9)$$

Углы давления в нижних точках контакта для рабочей стороны равны

$$\text{tg } \alpha_{p1d} = (1+u) \text{tg } \alpha_d - u \text{tg } \alpha_{p2d}; \quad \text{tg } \alpha_{p2d} = (1+u) \text{tg } \alpha_d / u - \text{tg } \alpha_{a2d} / u. \quad (10)$$

При синтезе передачи из колес с асимметричными зубьями и параметров производящей рейки исходными данными являются: числа зубьев пары колес  $z_1$  и  $z_2$  при наличии блокирующего контура и коэффициенты толщины зубьев на вершине  $S_{a1}^*$  и  $S_{a2}^*$ , которые можно взять как точку на блокирующем контуре. Координаты точки соответствующие передаче с углами рабочего профиля на диаметре вершин  $\alpha_{a1d}$  и  $\alpha_{a2d}$  и масштабный коэффициент, такой как модуль  $m_w$  или межосевое расстояние  $a_w$ , полностью описывают геометрию передачи.

При известных  $\alpha_{a1d}$  и  $\alpha_{a2d}$  остальные параметры рассчитывают:  $\alpha_{a1c}$ ,  $\alpha_{a2c}$ ,  $v_{1d}$ ,  $v_{2d}$ ,  $v_{1c}$ ,  $v_{2c}$  по формулам (2) и (4),  $\alpha_d$  и  $\alpha_c$  – по (5),  $\alpha_{p1c}$ ,  $\alpha_{p2c}$ ,  $\alpha_{p1d}$ ,  $\alpha_{p2d}$  – по формулам (2), (8) и (10).

При заданном модуле на начальной окружности  $m_w$  межосевое расстояние:

$$a_w = (z_1 + z_2) m_w / 2. \quad (11)$$

При заданном  $a_w$  рассчитывают модуль на начальной окружности  $m_w$ :

$$m_w = 2a_w / (z_1 + z_2). \quad (12)$$

Начальные диаметры

$$d_{w1} = m_w z_1; \quad d_{w2} = m_w z_2. \quad (13)$$

Основные диаметры

$$\begin{aligned} d_{b1d} &= d_{w1} \cos \alpha_{wd}; & d_{b2d} &= d_{w2} \cos \alpha_{wd}; \\ d_{b1c} &= d_{w1} \cos \alpha_c; & d_{b2c} &= d_{w2} \cos \alpha_c. \end{aligned} \quad (14)$$

Толщина зуба на начальном диаметре

$$\begin{aligned} S_{w1} &= d_{w1} (\text{inv } v_{1d} + \text{inv } v_{1c} - \text{inv } \alpha_{dw} - \text{inv } \alpha_{wc}) / 2; \\ S_{w2} &= d_{w2} (\text{inv } v_{2d} + \text{inv } v_{2c} - \text{inv } \alpha_{dw} - \text{inv } \alpha_{wc}) / 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Если для данной пары колес нет блокирующего контура, необходимо принять в качестве исходных данных угол давления  $\alpha_{wd}$  или коэффициент перекрытия  $\varepsilon_{ad}$  для рабочей стороны, а также назначить коэффициент  $C_S = S_{w1}/S_{w2}$ . Для предварительного расчета можно принять  $C_S = u^{0,5}$  и уточнить  $S_{w1}$  и  $S_{w2}$  при оптимизации параметров производящей рейки (или реек). Тогда толщина зуба на начальном диаметре будет равна

$$S_{w1}=\pi m_w G_s/(C_S+1); S_{w2}=\pi m_w/(C_S+1). \quad (16)$$

Если в качестве исходных данных выбран угол давления  $\alpha_d$ , тогда углы  $\nu_{1d}, \nu_{2d}, \nu_{1c}, \nu_{2c}$  можно рассчитать по (2) и (15) углы  $\alpha_{a1d}$  и  $\alpha_{a2d}$  – по (4). Если выбрано  $\varepsilon_{ad}$ , углы  $\alpha_d, \alpha_c, \nu_{1d}, \nu_{2d}, \nu_{1c}, \nu_{2c}, \alpha_{a1d}, \alpha_{a2d}, \alpha_{a1c}, \alpha_{a2c}$  рассчитывают, решая совместно (2), (4), (6) и (15).

Производящая рейка формирует активную часть профиля зуба без подреза и с приемлемым радиальным зазором между окружностью впадин и окружностью вершин сопряженного колеса. Кроме того, форма переходной кривой должна обеспечивать необходимую изломную прочность и жесткость зубьев.

Величина углов профиля рейки  $\alpha_{od}$  и  $\alpha_{oc}$  и форма скругления вершины зуба являются предметами оптимизации. Цель оптимизации – обеспечить минимизацию изгибных напряжений и необходимую жесткость зубьев под нагрузкой.

Параметры производящей рейки для шестерни и колеса оптимизируются независимо и, как правило, они различны. В отдельных случаях возможно применение унифицированной производящей рейки, хотя это может привести к увеличению изгибных напряжений для одного из сопряженных колес. Чтобы оценить возможность применения унифицированной производящей рейки, рекомендуется сравнить изгибные напряжения, полученные при использовании унифицированной и индивидуальных для шестерни и колеса реек. Оптимизация производится с помощью процедуры, описанной ранее.

**Методика сравнительного анализа.** Расчеты на прочность передач с симметричными зубьями проводились по программе *GearPair* [14]. Определение расчетных напряжений по программе производится в соответствии с основными положениями стандарта ГОСТ 21354 расчета на прочность цилиндрических зубчатых передач. Допускаемые напряжения рассчитываются по пределам контактной выносливости  $\sigma_{Hlim}$  и выносливости при изгибе  $\sigma_{Flim}$ , данные о которых для основных полимерных материалов в зависимости от числа циклов перемены напряжений  $N_H$  и температуры боковой поверхности зуба  $t_H$  и ножки зуба  $t_F$  приведены в нормативном материале VDI 2545 [15].

Для оценки достоверности расчетов по программе *GearPair* параллельно проводились сравнительные расчеты на прочность по программе *KISSoft\**.

Кроме того, по программе *GearPair* были проведены предварительные расчеты реальных передач с пластмассовыми зубчатыми колесами, данные о которых имеются в технической литературе [16-18].

Расчет прочности колес с асимметричными зубьями произведен А.Л. Капелевичем по программе *Direct Gear Design*. При этом, для получения максимально возможного выигрыша от использования асимметричных профилей зубьев были реализованы условия получения максимально возможного коэффициента перекрытия за счет допущения подреза нерабочей части профиля зуба при условии примерно равной прочности при изгибе зубьев шестерни и колеса.

\* Расчеты проведены В.В. Супиным.

**Результаты расчета и их анализ.** Первоначально были проведены расчеты реальных приводов по исходным данным из различных источников [15-18]. Результаты расчета по программе *GearPair* представлены в таблицах 2-4.

Таблица 2 – Примеры расчета на прочность зубчатых передач с пластмассовыми колесами по программе *GearPair* (исходные данные – из источника [15])

| Параметры   | Значение параметра для примера |             |                          |             |                      |             |                                |             |  |
|---|--------------------------------|-------------|--------------------------|-------------|----------------------|-------------|--------------------------------|-------------|--|
|   | Пример 1                       |             | Пример 2                 |             | Пример 3             |             | Пример 4                       |             |  |
|   | шестерня                       | колесо      | шестерня                 | колесо      | шестерня             | колесо      | шестерня                       | колесо      |  |
| 1   | 2                              | 3           | 4                        | 5           | 6                    | 7           | 8                              | 9           |  |
| Модуль нормальный, $m_n$ , мм                       | 2                              |             | 6                        |             | 1                    |             | 1                              |             |  |
| Число зубьев, $z$                                   | 57                             | 66          | 22                       | 73          | 16                   | 44          | 28                             | 105         |  |
| Коэффициент смещения, $x$                           | 0                              | 0           | 0,195                    | 0,280       | 0                    | 0           | 0                              | 0           |  |
| Рабочая ширина венца, $b_{w1}$ , мм                 | 13                             |             | 73,4                     |             | 7                    |             | 5,5                            |             |  |
| Межосевое расстояние, $a_{w1}$ , мм                 | 123,0                          |             | 287,459                  |             | 30                   |             | 66,5                           |             |  |
| Характеристика передачи                             | Частично открытая              |             | Закрывающаяся            |             | Частично открытая    |             | Частично открытая              |             |  |
| Характер смазывания (смазочный материал)            | Консистентная смазка           |             | Окунамием, жидкая смазка |             | Консистентная смазка |             | Консистентная смазка           |             |  |
| Материал зубчатых колес                             | Полиамид ПА6 с/н               |             | Полиамид ПА6 с/н         |             | Полиацеталь          |             | Полиацеталь                    |             |  |
| 1   | 2                              | 3           | 4                        | 5           | 6                    | 7           | 8                              | 9           |  |
| Передаваемая мощность, $P_{dвс}$ , кВт              | 0,74                           |             | 6,78                     |             | 0,007                |             | 0,008                          |             |  |
| Крутящий момент $T$ , Нм                            | 10,1                           | 11,7        | 195                      | 647,4       | 0,35                 | 0,96        | 0,4                            | 1,5         |  |
| Частота вращения, $n$ , мин <sup>-1</sup>           | 700                            | 605         | 332                      | 100         | 190                  | 70          | 190                            | 50          |  |
| Окружная сила, $F_t$ , Н                            | 177,1                          |             | 2954,5                   |             | 44,0                 |             | 28,7                           |             |  |
| Окружная скорость, $V_t$ , м/с                      | 4,178                          |             | 2,295                    |             | 0,159                |             | 0,279                          |             |  |
| Температура ножки зуба, $T_F$ , °С                  | 28                             | 28          | 36                       | 27          | 42                   | 45          | 44                             | 41          |  |
| Температура боковой поверхности зуба, $T_{fb}$ , °С | 45                             | 42          | 108                      | 47          | 76                   | 53          | 53                             | 44          |  |
| Расчетный модуль упругости, $E$ , МПа               | 2970                           | 3108        | 842                      | 2878        | 1938                 | 2555        | 2555                           | 2794        |  |
| Требуемый ресурс, $L_H$ , ч                         | 2380                           |             | 1000                     |             | 1000                 |             | 8770 (~10 <sup>8</sup> циклов) |             |  |
| Выполнение условий $\sigma_H < \sigma_{HP}$         | шестерня                       | 14,4 < 29,4 |                          | 13,5 < 37,7 |                      | 21,9 < 39,4 |                                | 13,8 < 28,9 |  |
|   | колесо                         | 14,4 < 30,3 |                          | 13,5 < 51,6 |                      | 21,9 < 48,7 |                                | 13,8 < 36,7 |  |
| Выполнение условий $\sigma_F < \sigma_{FP}$         | шестерня                       | 18,2 < 24,4 |                          | 20,9 < 33,8 |                      | 21,4 < 32,5 |                                | 12,9 < 28,7 |  |
|   | колесо                         | 18,1 < 24,5 |                          | 19,4 < 38,4 |                      | 18,8 < 35,9 |                                | 11,8 < 30,7 |  |

Примечание: Температура ножки зуба  $t_F$  и температура боковой поверхности зуба  $t_H$  рассчитана по формулам работы [15].

Таблица 3 – Примеры расчета на прочность зубчатых передач с пластмассовыми колесами по программе *GearPair* (исходные данные – из источника [16]:  $m=2,5$ мм;  $a_n=75$ мм;  $b_n=12$ мм; материал – полиацеталь,  $E=2900$ МПа;  $P=1,0$ кВт;  $T_1=6,4$ Н·м;  $n=1500$ ;  $L_k=1104$ ;  $t_H=t_F=40$ °С, тип смазывания – окуномием, смазочный материал – масло "индустриальное")

| Параметры                                    | Значение параметра для примера |             |             |        |             |        |
|--|--------------------------------|-------------|-------------|--------|-------------|--------|
|  | Пример 1                       |             | Пример 2    |        | Пример 3    |        |
|  | шестерня                       | колесо      | шестерня    | колесо | шестерня    | колесо |
| Число зубьев, $z$                            | 24                             | 36          | 22          | 34     | 23          | 34     |
| Коэффициент смещения, $x$                    | 0                              | 0           | 1,07        | 1,085  | -0,2        | 1,461  |
| Коэффициент перекрытия, $\varepsilon_\alpha$ | 1,647                          |             | 1,078       |        | 1,349       |        |
| Окружная сила, $F_t$ , Н                     | 216,5                          |             | 236,4       |        | 226,1       |        |
| Окружная скорость, $V_b$ , м/с               | 4,7                            |             | 4,3         |        | 4,5         |        |
| Выполнение условий $\sigma_H < \sigma_{HP}$  | шестерня                       | 22,7 < 41,1 | 28,1 < 41,1 |        | 24,7 < 41,1 |        |
|  | колесо                         | 22,7 < 43,7 | 28,1 < 43,7 |        | 24,7 < 43,7 |        |
| Выполнение условий $\sigma_F < \sigma_{FP}$  | шестерня                       | 22,9 < 30,5 | 25,9 < 30,5 |        | 29,4 < 30,5 |        |
|  | колесо                         | 21,8 < 31,3 | 29,2 < 31,3 |        | 22,2 < 31,3 |        |

Примечание: Коэффициент безопасности  $S_{H1}=1,5$ ;  $S_F=1,8$ .

Таблица 4 – Примеры расчета на прочность зубчатых передач с пластмассовыми колесами по программе *GearPair* (исходные данные – из источников [17, 18])

| Параметры  | Значение параметра для примера |              |               |              |               |             |
|--|--------------------------------|--------------|---------------|--------------|---------------|-------------|
|  | Пример 1                       |              | Пример 2      |              | Пример 3      |             |
|  | шестерня                       | колесо       | шестерня      | колесо       | шестерня      | колесо      |
| Модуль нормальный, $m_n$ , мм                    | 0,8                            |              | 1,0           |              | 1,5           |             |
| Число зубьев, $z$                                | 17                             | 68           | 22            | 43           | 43            | 61          |
| Коэффициент смещения, $x$                        | 0                              | -0,224       | 0             | 0            | 0             | 0           |
| Рабочая ширина венца, $b_w$ , мм                 | 6,0                            |              | 7,5           |              | 7,5           |             |
| Межосевое расстояние, $a_w$ , мм                 | 36,0                           |              | 32,5          |              | 78,0          |             |
| Характеристика передачи                          | Частично открытая              |              | Открытая      |              | Открытая      |             |
| Характер смазывания (смазочный материал)         | Консистентная смазка           |              | Несмазываемая |              | Несмазываемая |             |
| Материал зубчатых колес                          | Полиамид ПА6                   | Полиамид ПА6 | Полиацеталь   | Полиамид ПА6 | Полиацеталь   | Полиацеталь |
| Передаваемая мощность, $P_{ов}$ , Вт             | 47                             |              | 60            |              | 66            |             |
| Крутящий момент $T$ , Нмм                        | 150                            | 600          | 528           | 1032         | 1290          | 1830        |
| Частота вращения, $n$ , мин <sup>-1</sup>        | 3000                           | 750          | 2120          | 1085         | 490           | 345         |
| Окружная сила, $F_t$ , Н                         | 20,7                           |              | 48            |              | 40            |             |
| Окружная скорость, $V_b$ , м/с                   | 2,27                           |              | 1,25          |              | 1,16          |             |
| Температура ножки зуба, $t_F$ , °С               | 28,6                           |              | 30,3          |              | 31,5          |             |
| Температура боковой поверхности зуба, $t_H$ , °С | 73,5                           |              | 62,9          |              | 42,0          |             |
| Расчетный модуль упругости, $E$ , МПа            | 2030                           |              | 2070          | 3150         | 2250          |             |
| Требуемый ресурс, $L_h$                          | 55                             |              | 80            |              | 350           |             |
| Выполнение условий $\sigma_H < \sigma_{HP}$      | шестерня                       | 11,7 < 40,3  | 18,4 < 31,2   |              | 12,4 < 24,5   |             |
|  | колесо                         | 11,7 < 49,9  | 18,4 < 35,9   |              | 12,4 < 25,9   |             |
| Выполнение условий $\sigma_F < \sigma_{FP}$      | шестерня                       | 9,4 < 30,3   | 20,7 < 20,6   |              | 9,9 < 21,9    |             |
|  | колесо                         | 10,1 < 35,7  | 12,2 < 21,8   |              | 9,7 < 22,5    |             |

Примечание: Температура ножки зуба  $t_H$  и температура боковой поверхности зуба  $t_F$  приняты по данным первоисточника.

Из приведенных результатов сравнения действующих и допускаемых напряжений видно, что выполняются оба условия прочности  $\sigma_H < \sigma_{HP}$  и  $\sigma_F < \sigma_{FP}$ . Таким образом, можно утверждать, что концентрация, принятая при формировании автоматизированной программы *GearPair* проектирования передач с пластмассовыми зубчатыми колесами, апробированная на расчетах реальных приводов, достаточно адекватно отражает соотношение между действующими (расчетными) и допускаемыми напряжениями.

Затем были проведены сравнительные расчеты передач с симметричными (по программе *GearPair*) и асимметричными (по программе *Direct Gear Design*) зубьями (таблицы 5 и 6).

Таблица 5 – Геометрические параметры передач с симметричным профилем зуба ( $P_{ов}=180$ Вт;  $n_{ов}=12000$ мин<sup>-1</sup>)

| Параметры                                     | Значение параметра для передачи |         |          |         |          |         |
|---|---------------------------------|---------|----------|---------|----------|---------|
|   | 1                               |         | 2        |         | 3        |         |
|   | Шестерня                        | Колесо  | Шестерня | Колесо  | Шестерня | Колесо  |
| Модуль $m$ , мм                               | 0,8                             |         | 1,0      |         | 1,5      |         |
| Число зубьев $z$                              | 13                              | 50      | 13       | 65      | 11       | 57      |
| Коэффициент смещения $x$                      | 0,4                             | 0       | 0,7      | -0,15   | 0,45     | -0,45   |
| Межосевое расстояние $a_w$ , мм               | 25,50649                        |         | 39,52454 |         | 51,0     |         |
| Ширина венца $b_w$ , мм                       | 15                              |         | 14       |         | 21       |         |
| Передаточное отношение $i$                    | 3,846154                        |         | 5,0      |         | 5,181818 |         |
| Начальный диаметр $d_w$ , мм                  | 10,5265                         | 40,4865 | 13,1748  | 65,8742 | 16,50    | 85,50   |
| Угол зацепления $\alpha_w$ , °                | 21,813                          |         | 21,9942  |         | 20       |         |
| Коэффициент перекрытия, $\varepsilon_\alpha$  | 1,435                           |         | 1,343    |         | 1,447    |         |
| Диаметр окружности вершин $d_a$ , мм          | 12,613                          | 41,573  | 16,349   | 66,649  | 20,85    | 87,15   |
| Диаметр окружности впадин $d_f$ , мм          | 9,040                           | 38,0    | 11,9     | 62,2    | 14,1     | 80,4    |
| Высота зуба $h$ , мм                          | 1,7865                          | 1,7865  | 2,2245   | 2,2245  | 3,375    | 3,375   |
| Коэффициент высоты зуба $h^*$ , мм            | 2,233                           | 2,233   | 2,2245   | 2,2245  | 2,25     | 2,25    |
| Основной диаметр $d_b$ , мм                   | 9,7728                          | 37,5877 | 12,2160  | 61,080  | 15,5049  | 80,3437 |
| Толщина зуба на окружности вершин $S_a$ , мм  | 0,335                           | 0,633   | 0,203    | 0,829   | 0,432    | 1,247   |
| Толщина зуба на начальном диаметре $S_w$ , мм | 1,459                           | 1,084   | 2,041    | 1,143   | 2,848    | 1,865   |
| Коэффициент $C_S=S_{w1}/S_{w2}$               | 1,35                            |         | 1,79     |         | 1,53     |         |
| Размер по роликам $M$ , мм                    | 12,836                          | 42,156  | 17,786   | 69,233  | 22,368   | 90,029  |
| Диаметр измерительного ролика $D$ , мм        | 1,441                           |         | 2,311    |         | 3,177    |         |

Таблица 6 – Геометрические параметры передач с асимметричным профилем зуба ( $P_{об}=180\text{Вт}$ ;  $n_{об}=12000\text{мин}^{-1}$ )

| Параметры   | Значение параметра для передачи |        |                             |          |          |        |
|---|---------------------------------|--------|-----------------------------|----------|----------|--------|
|   | 1                               |        | 2                           |          | 3        |        |
|   | Шестерня                        | Колесо | Шестерня                    | Колесо   | Шестерня | Колесо |
| Число зубьев $z$                                    | 13                              | 50     | 13                          | 65       | 11       | 57     |
| Межосевое расстояние $a_{w2}$ , мм                  | 25,50649                        |        | 39,52454                    |          | 51,0     |        |
| Ширина венца $b_{w2}$ , мм                          | 15                              |        | 14                          |          | 21       |        |
| Передаточное отношение $i$                          | 3,846154                        |        | 5,0                         |          | 5,181818 |        |
| Модуль на окружности обката $m_w$ , мм              | 0,80973                         |        | 1,01345                     |          | 1,500    |        |
| Диаметр окружности обката $d_{w2}$ , мм             | 10,526                          | 40,485 | 13,176                      | 65,878   | 16,500   | 85,500 |
| Рабочий угол зацепления $\alpha_{wd}$ , °           | 23                              |        | 23                          |          | 25       |        |
| Нерабочий угол зацепления $\alpha_{wc2}$ , °        | 15                              |        | 15                          |          | 16       |        |
| Рабочий коэффициент перекрытия $\epsilon_{ад}$      | 1,695                           |        | 1,791                       |          | 1,723    |        |
| Нерабочий коэффициент перекрытия $\epsilon_{ас}$    | 1,387<br>(с учетом подреза)     |        | 1,474<br>(с учетом подреза) |          | 1,342    |        |
| Диаметр окружности вершин зубьев $d_a$ , мм         | 12,885                          | 42,194 | 16,440                      | 67,972   | 21,257   | 88,658 |
| Диаметр окружности впадин $d_f$ , мм                | 8,718                           | 38,003 | 10,984                      | 62,488   | 13,229   | 80,603 |
| Высота зуба $h$ , мм                                | 2,084                           | 2,073  | 2,728                       | 2,742    | 4,014    | 4,028  |
| Коэффициент высоты зуба $h^*$ , мм                  | 2,6044                          | 2,5913 | 2,728                       | 2,742    | 2,676    | 2,685  |
| Рабочий основной диаметр $d_{hd}$ , мм              | 9,689                           | 37,267 | 12,128                      | 60,641   | 14,954   | 77,489 |
| Нерабочий основной диаметр $d_{hc2}$ , мм           | 10,167                          | 39,106 | 12,7266                     | 63,6328  | 15,861   | 82,188 |
| Рабочий диаметр граничных точек, мм                 | 9,690                           | 39,021 | 12,1376                     | 63,8253  | 14,957   | 82,427 |
| Нерабочий диаметр граничных точек, мм               | 10,210                          | 39,483 | 12,7827                     | 64,4448  | 15,970   | 83,386 |
| Толщина зуба на окружности обката $S_w$ , мм        | 1,546                           | 0,998  | 2,0668                      | 1,1172   | 3,087    | 1,625  |
| Коэффициент $C_S = S_w/S_{w2}$                      | 1,55                            |        | 1,85                        |          | 1,90     |        |
| Толщина зуба на окружности вершин зубьев $S_a$ , мм | 0,32                            | 0,32   | 0,30                        | 0,30     | 0,30     | 0,30   |
| Радиус при вершине зуба $R_a$ , мм                  | 0,12                            | 0,12   | 0,12                        | 0,12     | 0,12     | 0,12   |
| Размер по роликам $M_r$ , мм                        | 14,580                          | 45,362 | 19,497                      | 73,68354 | 24,942   | 95,891 |
| Диаметр измерительного ролика $D_p$ , мм            | 1,441                           |        | 2,311                       |          | 3,177    |        |

Анализ данных, приведенных в таблицах 5, 6, показывает, что повышенная несущая способность передач с асимметричными зубьями достигается благодаря более высоким значениям угла зацепления ( $\alpha_{wd}=23^\circ$  и  $25^\circ$  по сравнению с  $\alpha_w \approx 21,8^\circ$  и  $22^\circ$  для симметричных зубьев); повышенным коэффициентам перекрытия ( $\epsilon_{ад} \approx 1,34 \dots 1,45$  для симметричных зубьев и  $\epsilon_{ад} \approx 1,7 \dots 1,8$  для асимметричных зубьев); за счет рационального соотношения толщины зубьев шестерни и колеса ( $c_5 \sim 1,55 \dots 1,9$  для асимметричных зубьев против  $c_5 \sim 1,35 \dots 1,79$  для симметричных) выравнивается их несущая способность; гарантированно исключается заострение зубьев, так как коэффициент  $m_{a1,2}$  задается изначально; за счет приемлемой, с точки зрения прочности, величины подреза нерабочего профиля зуба достигается возможность улучшения в целом основных геометрических параметров передачи.

Снижение концентрации напряжений у корня зуба, определяемой переходной кривой, достигается оптимизацией ее формы по процедуре, описанной ранее, причем в целом указанные преимущества асимметричных зубьев в сочетании с оптимизацией формы переходной кривой приводят к существенному снижению действующих напряжений изгиба и возможности спроектировать практически равнопрочную пару зубчатых колес (таблица 7).

Таблица 7 – Сравнительные данные о прочности пластмассовых зубчатых колес с симметричным и асимметричным профилем зубьев (материал зубчатых колес – полиамид стеклонаполненный ПА6+30% СВ, требуемый ресурс –  $L_h=500\text{ч}$ )

| Наименование и обозначение параметра                                      | Численное значение параметра для ступени редуктора |        |          |        |          |        |      |
|---|--|--------|----------|--------|----------|--------|------|
|   | 1  |        | 2        |        | 3        |        |      |
|   | Шестерня   | Колесо | Шестерня | Колесо | Шестерня | Колесо |      |
| Нормальный модуль, $m_n$ , мм   | 0,8  |        | 1,0      |        | 1,5      |        |      |
| Число зубьев $z$  | 13   | 50     | 13       | 65     | 11       | 57     |      |
| Начальный диаметр $d_w$ , мм  | 10,526   | 40,487 | 13,175   | 65,874 | 16,5     | 85,5   |      |
| Рабочая ширина венца $b_{w2}$ , мм  | 15   |        | 14       |        | 21       |        |      |
| Частота вращения, $n$ , $\text{мин}^{-1}$                                 | 12000  | 3112   | 3112     | 624    | 624      | 120    |      |
| Крутящий момент, $T$ , нм   | 0,140  | 0,539  | 0,539    | 2,695  | 2,695    | 13,965 |      |
| Окружная сила, $F_t$ , Н  | 26,9   |        | 82,9     |        | 326,5    |        |      |
| Окружная скорость, $V_t$ , м/с  | 6,535  |        | 2,118    |        | 0,539    |        |      |
| Напряжение изгиба в опасном сечении, $\sigma_F$ , МПа                     | $\sigma_F^{*1}$                                    | 8,8    | 9,2      | 18,8   | 24,05    | 33,0   | 36,8 |
|   | $\sigma_F^{**}$                                    | 5,6    | 5,8      | 13,3   | 16,5     | 25,4   | 28,2 |
| Снижение напряжений изгиба для зубчатых колес с асимметричным профилем, % | 57,1   | 58,6   | 41,4     | 45,8   | 29,9     | 30,5   |      |

Примечание:  $^{*1}$  Расчет по программе GearPair;  $^{**}$  Расчет по программе Direct Gear Design.

**Заключение.** Анализ литературных источников показывает, что эволюционные зубчатые передачи обладают определенным резервом несущей способности, который может быть реализован посредством выбора рациональ-

ных геометрических параметров зацепления, причем этот выбор может быть осуществлен как на этапе проектирования непосредственно передачи в параметрах, не связанных с исходным контуром, так и назначением соответствующих параметров исходного контура. Из результатов расчета прочности зубчатых передач по разным литературным источникам получено подтверждение достоверности расчетов передач с пластмассовыми зубчатыми колесами по программе *GearPair*. На примере трехступенчатого привода электромясорубки, который оснащен пластмассовыми зубчатыми колесами из стеклонаполненного полиамида, показана возможность существенного улучшения служебных свойств привода при использовании асимметричного профиля зуба.

**Благодарность.** Авторы выражают благодарность А.Л. Капелевичу за проведение прочностных расчетов зубчатых передач с асимметричными зубьями трех ступеней по расчетной программе *Direct Gear Design* и В.В. Супину за оценку прочности зубчатых передач с симметричными зубьями по расчетной программе *KISSoft*.

**Список литературы:** 1. *Болотовский И.А., Васильева О.Ф., Котельников В.П.* Эвольвентные зубчатые колеса с несимметричными зубьями // Вестник машиностроения. – 1984. – № 4. – С.15–17. 2. *Андожский В.Д., Рогачевский Н.И.* Эвольвентные зубчатые колеса с несимметричным профилем зубьев // Вестник машиностроения – 1988. – №10. – С.32–34. 3. *Рогачевский Н.И.* Размер по роликам (шарикам) зубчатых колес с несимметричным профилем зубьев // Машиноведение – 1983. – №5. – С.35–38. 4. *Алишев О., Антонов С.* Обобщен зиходен контур в теорията на еволвентното зацепване // Механика на машините. – Варна, 2005. – №69. 5. *Алишев О.Л.* Геометрический расчет эвольвентных передач обобщенного исходного контура // Теория механизмов и машин – 2008. – Т.6. – №2. – С.60–73. 6. *Вулгаков Э.Б., Ривкин Г.В.* Проектирование зубчатых колес с несимметричным профилем зубьев // Машиноведение. – 1976. – №5. – С.35–39. 7. *Вулгаков Э.Б., Ривкин Г.В.* Обобщенная область существования эвольвентного зубчатого зацепления с несимметричным профилем зубьев // Машиноведение – 1980. – №1. – С.55–59. 8. *Вулгаков Э.Б., Капелевич А.Л.* Возможности несимметричных зубчатых передач // Вестник машиностроения – 1986. – №4. – С.14–16. 9. *Капелевич А.Л.* Синтез несимметричного эвольвентного зацепления // Машиноведение – 1987. – №1. – С.55–59. 10. *Kapelevich A.L., Shekhtman Y.V.* Direct Gear Design: Bending Stress Minimization, Gear Technology – September/October 2003. – P.44–47. 11. *Kapelevich A.* Gear Design: Breaking the status quo. Traditional gear design limits the performance of mechanical drives // Machine Design – 2007, May 10. – Pp.89–93. 12. *Kapelevich A., Shekhtman Yu.* Area of existence of involute gears // Proceedings of the 3rd International Conference "Power Transmissions'09". Editor: Athanassios Mihailidis. – Pallini Beach Hotel, Kallithea, Greece, 1–2 Oktober, 2009. – P.3–8. 13. *Kapelevich A.* Direct Design of Asymmetric Gears: Approach and Application // Proceedings of MPT 2009 – Sendai, May 13–15, 2009, Matsushima Isles Resort, Japan. – 5p. 14. *Старжинский В.Е., Гоман А.М., Хиженок В.Ф., Петроковец Е.М.* Зубчатые передачи с пластмассовыми колесами: программа автоматизированного проектирования // Вестник национального технического университета "ХПИ". Сборник научных трудов. – Харьков, 2009. – Т.20. – С.145–159. 15. VDI 2545. Zahnräder aus thermoplastischen Kunststoffen. 16. *Старжинский В.Е.* Теоретическое и экспериментальное исследование цилиндрической эвольвентной металлополимерной зубчатой передачи с литыми колесами из полиформальдегида: Автореф. дис... канд. техн. наук – Рига, 1967. 17. *Krause W.* Plastzahnäder. – Veb Verlag Technik, Berlin. 1985. – 159s. 18. Пластмассовые зубчатые колеса в механизмах приборов / Под общ. ред. В.Е. Старжинского и Е.В. Шалобаева – Санкт-Петербург-Гомель: ИММС НАН Б, 1998. – 538с.

Поступила в редколлегию 08.04.10

УДК 621.833.7

**Я.А. СТЕЦЕНКО**, асп. каф. ТМ и ТММ НАКУ "ХАИ", г. Харьков  
**А.Г. НАРЫЖНЫЙ**, к.т.н., доц. каф. ТМ и ТММ НАКУ "ХАИ"

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СБОРКИ ВОЛНОВОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Розглянуто моделювання зборки хвильової зубчатої передачі (ХЗП), зокрема деформація гнучкого колеса, генератора хвиль та взаємодія зубців гнучкого та жорсткого коліс. Поставлені задачі та запропонована методика дослідження процесу за допомогою скінчено-елементного аналізу. Приведені результати моделювання та висновки.

Modeling of harmonic drive gear assemble is considered, specifically flexible spline and wave generator deformation and interaction of flexible and circular splines' teeth. Tasks are assigned and a method is proposed to examine the process with the help of finite-element analysis. The results of modeling and conclusions are adduced.

**Введение.** Волновые зубчатые передачи (ВЗП) широко применяют в различных областях аэрокосмической техники. Это связано с преимуществами, которые получают благодаря таким механизмам. Объекты аэрокосмической техники часто работают в критических условиях, что выдвигает высокие требования в отношении их нагрузочной способности, КПД, точности передачи движения и долговечности элементов этих систем. Как известно, при своей компактности и малом весе ВЗП позволяют получить большое передаточное отношение, обеспечить высокую точность позиционирования и увеличить срок службы механизма. ВЗП применяют в приводах управления механизацией крыла, в механизмах движения солнечных батарей ИСЗ, в орбитальных телескопах, системах позиционирования наземных устройств (пусковые ракетные установки, тяжелые антенны, телескопы) и др. ВЗП были применены в ходовой части Лунохода и далее применяются в планетоходах.

В современных условиях актуальной является задача моделирования процессов, происходящих в ВЗП, в частности, моделирование ее сборки, нормального и предельного режимов работы с целью выявления критических напряжений в деталях передачи и анализа процессов их взаимодействия. В дальнейшем это позволит улучшить методики сборки ВЗП, оптимизировать ее параметры, а также уточнить способы расчета передачи.

**Формулирование задачи.** Процесс сборки ВЗП позволяет привести отдельные части передачи в рабочее состояние и получить функционирующий механизм. Отличительной чертой процесса является то, что гибкое колесо подвергается начальной деформации и после сборки приобретает начальные напряжения. То же самое касается генератора волн. Моделирование сборки позволяет выявить наиболее критические и важные явления с точки зрения точности и работоспособности передачи, а также проанализировать их и устранить