

жесткого колеса может привести к значительным деформациям зубьев, что можно предотвратить путем выполнения фаски на зубьях со стороны контакта. Изложенная методика позволяет осуществить механико-математическое моделирование процесса сборки ВЗП.

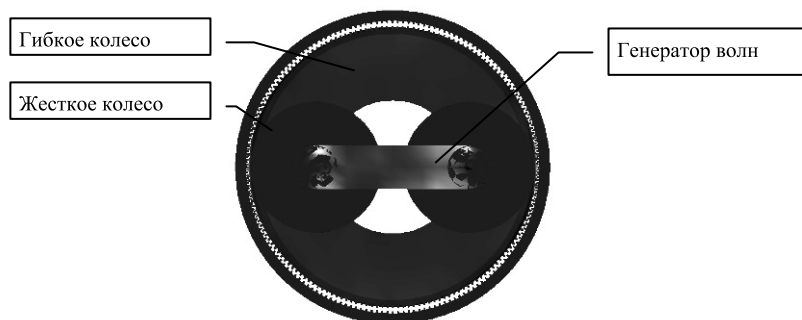


Рисунок 4 – ВЗП в собранном состоянии

Список литературы: 1. *Flavius A. Ardelean*. 3D modeling of the harmonic drive using "CATIA" // Annals of the Oradea University. Fascicle of Management and Technological Engineering. – 2007. – Vol.VI(XVI). – P.882–885. 2. *Flavius A. Ardelean, Petru Ungur*. Comparison between the classical harmonic drive and the hermetized harmonic drive // Annals of the Oradea University. Fascicle of Management and Technological Engineering. – 2007. – Vol.VI(XVI). – P.886–889. 3. МВТУ им. Баумана, кафедра РК-2. Учебно-методический комплекс по Теории Механизмов и Машин. Лекции. Лекция 18 [Электронный ресурс]: база данных методической и учебной информации. – Электрон. данные (1 файл). – Режим доступа: http://tmm-umk.bmstu.ru/lectures/lect_18.htm. – Загл. с экрана. 4. Мотор-редукторы. Мотор-барабаны. Редукторы. Колеса и муфты. Некоторые вопросы сборки волновых зубчатых редукторов [Электронный ресурс]: база данных технической информации. – Электрон. данные (1 файл). – Режим доступа: http://www.gears.ru/bar_s_1.htm. – Загл. с экрана. 5. *Полетучий А.И.* Теория и конструирование высокоэффективных волновых зубчатых механизмов: моногр. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – 2005. – 675с.

Поступила в редколлегию 30.04.2010

УДК 621.833

В.Н. СТРЕЛЬНИКОВ, д.т.н., главн. инж. пр-та ЗАО "НКМЗ", г. Краматорск
Г.С. СУКОВ, к.э.н., генеральный директор ЗАО "НКМЗ"
А.И. ВОЛОШИН, главный инженер ЗАО "НКМЗ"
А.И. ТИТАРЕНКО, к.т.н., главн. инж. ПМО ЗАО "НКМЗ"
Г.А. ЛЕСНЯК, начальник отдела редуктороения ЗАО "НКМЗ"

АПРОКСИМАЦИЯ ЗУБЬЕВ С КРУГОВЫМ ПРОФИЛЕМ В БИПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Виконано апроксимацію зубів із круговим профілем за допомогою біполярної системи координат, у результаті чого спрощена розробка моделі розрахунку кругового зуба на міцність. На круговий зуб накладена сітка біполярних координатних ліній, що окреслює контур зуба й охоплює його масив таким чином, що будь-яка крапка масиву зуба однозначно визначена в площині координат. Через збільшення ортів координатних ліній представлені переміщення.

Approximation of teeth with a circular profile by means of a bipolar coordinate system is executed, therefore model elaboration of circular tooth calculation of a durability is simplified. On a circular tooth the grid of bipolar coordinate lines, delineating a head loop of a tooth and enveloping its array in such a manner that any point of an array of tooth uniquely defined in a plane of coordinates is overlapped. Migrations through increments of coordinate lines basis vectors are presented.

Зуб является частью массива, составляющего зубчатое колесо. Для расчета выделим из массива отдельный зуб цилиндрической поверхностью большого радиуса R' . В результате сечение зуба будет ограничено замкнутым контуром, образованным дугами образующих окружностей боковых поверхностей с радиусами r_1 и радиусом R_1 очерчивающим окружности вершин зубьев. Для построения профиля зуба задается радиус R_1^* центров образующих окружностей и число зубьев z_1 колеса. Определяется угловой шаг зубьев λ_1 колеса $\lambda_1 = \frac{180^\circ}{z_1}$. Радиусы окружностей R' , выделяющие зубья из массива,

получаются геометрическим построением (рисунок 1). Взаимодействие зуба с массивом рассматриваем как заделку [1]. Участок зуба загружен нормальной контактной нагрузкой. Остальные части поверхности зуба свободны от нагрузки. Граничную задачу о прочности зуба решаем в биполярных координатах (рисунок 2).

Координатными линиями биполярной системы координат являются окружности. Возможен выбор системы координат, для которой окружности радиусов r_1 образующие профиль зубьев и R' вырезающие зуб из массива, будут координатными линиями, а окружность выступов с радиусом R_1 будет заменена близкой к ней координатной линией. На оси абсцисс координатной плоскости XOY симметрично относительно начала координат расположим полюсы O' и O'' . Расстояние между полюсами примем равным $2a$.

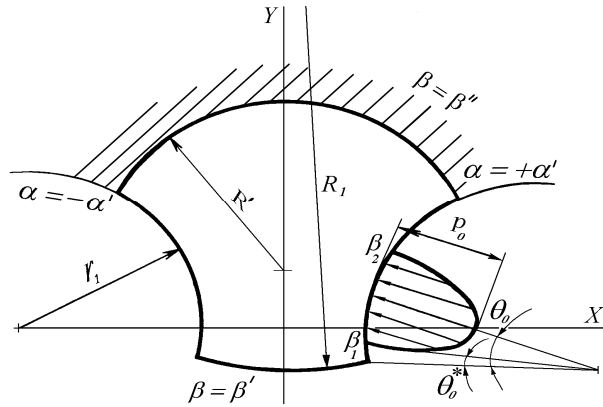


Рисунок 1 – Расчетная схема нагруженного зуба

Из полюсов в произвольную точку плоскости XOY проведем радиусы ρ_1 и ρ_2 . Задание абсолютных величин ρ_1 и ρ_2 не определяет однозначно положение точки M на плоскости: для заданных ρ_1 и ρ_2 получаются две точки симметрично относительно оси абсцисс. Неоднозначность устраним введя биполярные координаты α и β . За координату α примем $\alpha = \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}$. Правой полу-

плоскости XOY соответствуют положительные значения α , левой – отрицательные. За координату β примем внешний угол треугольника $\theta O'M$, отсчитанный от продолжения радиуса ρ_2 до ρ_1 , так чтобы $|\beta| < 180^\circ$. Положительный угол отсчитывается против стрелки часов, отрицательный – по ходу часовой стрелки. Верхней полуплоскости соответствуют положительные значения углов β , нижней – отрицательные.

Однозначность нарушается на оси абсцисс при $|X| \geq a$. Вдоль линий $Y=0$ при $X \leq -a$ и $X \geq a$ следует сделать разрезы. Верхним берегам разрезов соответствуют значения $\beta = \pi$, нижним $\beta = -\pi$. Установим связь декартовых и биполярных координат. В соответствии с рисунком 2 получим [2]

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos \beta = 4a^2.$$

Выразим радиусы ρ_1 и ρ_2 через α и β , учитывая при этом $\rho_1 = \rho_2 \cdot e^\alpha$

$$\rho_1 = \frac{2ae^\alpha}{\sqrt{(e^{2\alpha} + 1) + 2e^\alpha \cos \beta}}; \quad \rho_2 = \frac{2a}{\sqrt{(e^{2\alpha} + 1) + 2e^\alpha \cos \beta}}. \quad (1)$$

Установим зависимость между декартовыми координатами X , Y некоторой точки M и биполярными. Из треугольника $\theta O'M$ находим

$$\rho_1 \cos \gamma = X + a, \quad \rho_2^2 = \rho_1^2 + 4a^2 - 4a\rho_1 \cos \gamma. \quad (2)$$

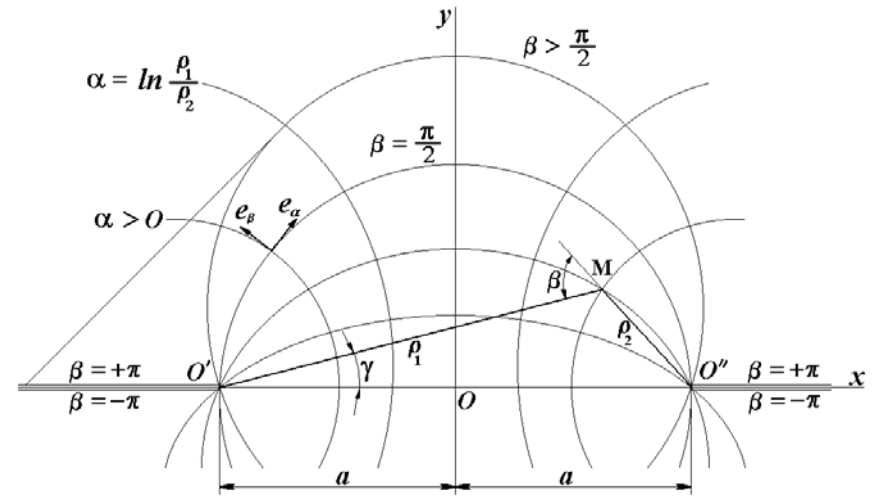


Рисунок 2 – Координатные линии биполярной системы координат

Для определения координат X воспользуемся формулами (1), (2) теоремой косинусов и выражениями гиперболических функций

$$X = \frac{a \cdot \text{Sh } \alpha}{\text{Ch } \alpha + \cos \beta}. \quad (3)$$

Для определения координаты Y определим площадь треугольника $\theta O'M$: $0,5 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sin \beta = ay$, откуда

$$Y = \frac{a \cdot \sin \beta}{\text{Ch } \alpha + \cos \beta}. \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) определяют уравнения координатных линий в параметрической форме, если в них поочередно полагать $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$.

Найдем уравнения координатных линий в явной форме. Считаем координату α постоянной. Исключим из уравнений (3) и (4) координату β . Делим уравнение (4) на уравнение (3) и определяем $\sin \beta = \frac{Y}{X} \text{sh } \alpha$. Из уравнения (3)

$$\cos \beta = \frac{a}{X} \text{Sh } \alpha - \text{Ch } \alpha.$$

Исключим параметр β и получим уравнение окружности

$$\left(X - a \frac{\text{Ch } \alpha}{\text{Sh } \alpha}\right)^2 + Y^2 = \frac{a^2}{\text{Sh}^2 \alpha}. \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что центры окружностей $\alpha=\text{const}$ расположены на оси X , имеют координаты $\left(a \cdot \frac{\text{Ch } \alpha}{\text{Sh } \alpha}; 0\right)$ и радиусы окружностей $R_\alpha = \frac{a}{\text{Sh } \alpha}$.

Полагаем постоянной координату β . Из уравнений (3) и (4) исключим координату α , находим

$$\text{Sh } \alpha = \frac{X}{Y} \sin \beta; \quad \text{Ch } \alpha = \frac{a \cdot \sin \beta}{Y} - \cos \beta.$$

Исключаем координату α , заменяя $\text{Ch } \alpha$ и $\text{Sh } \alpha$ соответствующими значениями

$$X^2 + (Y + a \cdot \text{ctg } \beta)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \beta}. \quad (6)$$

Координатные линии $\beta=\text{const}$ – окружности (6) с центрами на оси Y , имеют координаты $(0; -a \text{ctg } \beta)$ и радиусы окружностей координатных линий

$$R_\beta = \frac{a}{\sin \beta}.$$

Координатные линии проходят через полюсы биполярной системы координат [3]. Для доказательства в уравнении (6) семейства линий надо положить $Y=0$, получаем $X=\pm a$. Через каждую точку плоскости с координатами $(\alpha; \beta)$ проходит пара ортогональных координатных линий $\alpha=\text{const}; \beta=\text{const}$. Для доказательства ортогональности координатных линий, определим угловые коэффициенты касательных K_α и K_β к координатным линиям $\alpha=\text{const}$ и $\beta=\text{const}$, в точке их пересечения

$$K_\alpha = \frac{Y'_\beta}{X'_\beta}; \quad K_\beta = \frac{Y'_\alpha}{X'_\alpha}. \quad (7)$$

Дифференцируем выражения координатных функций (3) и (4)

$$\left. \begin{aligned} X'_\alpha &= \frac{a(1 + \text{Ch } \alpha \cos \beta)}{(\text{Ch } \alpha + \cos \beta)^2}; & X'_\beta &= \frac{a \cdot \text{Sh } \alpha \cdot \sin \beta}{(\text{Ch } \alpha + \cos \beta)^2}; \\ Y'_\alpha &= \frac{a \cdot \sin^2 \beta \cdot \text{Sh } \alpha}{(\text{Ch } \alpha + \cos \beta)^2}; & Y'_\beta &= \frac{a(1 + \text{Ch } \alpha \cdot \cos \beta)}{(\text{Ch } \alpha + \cos \beta)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и подставляем в формулы (7)

$$K_\alpha = \frac{(1 + \text{Ch } \alpha \cdot \cos \beta)}{\text{Sh } \alpha \cdot \sin \beta}; \quad K_\beta = -\frac{\sin \beta \cdot \text{Sh } a}{(1 + \text{Ch } \alpha \cdot \cos \alpha)}. \quad (9)$$

Из формул (9) следует условие ортогональности координатных линий

$$K_\alpha K_\beta = 1. \quad (10)$$

Вдоль координатных линий $\beta=\text{const}$ и $\alpha=\text{const}$ направим орты \vec{e}_α и \vec{e}_β . Орт \vec{e}_α направлен в сторону возрастания координаты α по касательной к линии $\beta=\text{const}$, орт \vec{e}_β направлен в сторону возрастания координаты β по касательной к линии $\alpha=\text{const}$ (рисунок 3). Связь между приращением криволинейной координаты и дифференциалом дуги координатной линии определяется коэффициентами Ляме

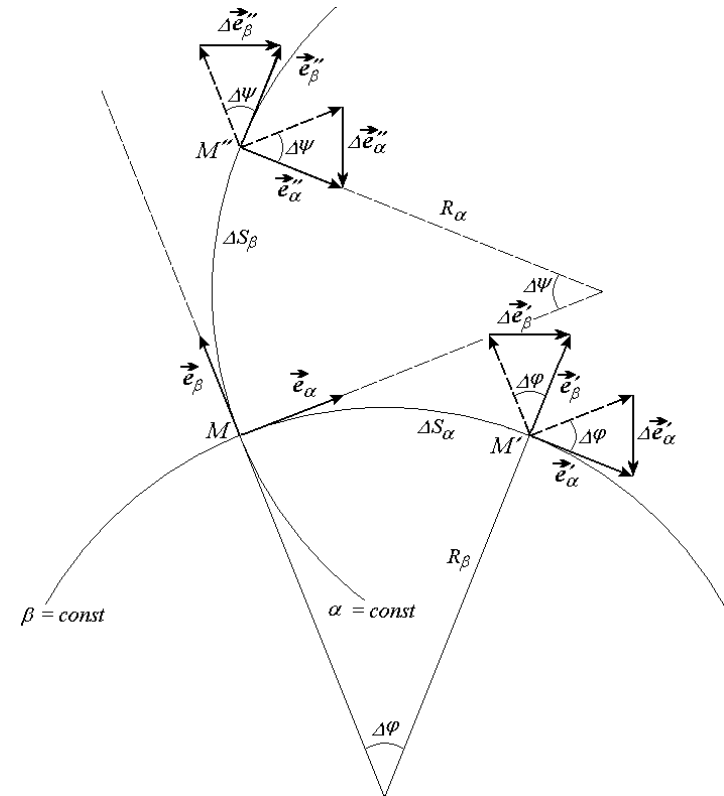


Рисунок 3 – Схема приращения ортов координатных линий

$$dS_\alpha = H_\alpha \cdot d\alpha; \quad dS_\beta = H_\beta \cdot d\beta. \quad (11)$$

Коэффициенты H_α и H_β определяются по формулам

$$H_\alpha = \sqrt{(X'_\alpha)^2 + (Y'_\alpha)^2}; \quad H_\beta = \sqrt{(X'_\beta)^2 + (Y'_\beta)^2}. \quad (12)$$

Подставим в выражения (12) значения $X'_\alpha, X'_\beta, Y'_\alpha, Y'_\beta$ из формул (8):

$$H_\alpha = H_\beta = H = \frac{a}{\operatorname{Ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (13)$$

В соответствии с значениями (11), (12), (13) частные производные ортов $\bar{e}_\alpha, \bar{e}_\beta$

$$\frac{\partial \bar{e}_\alpha}{\partial \alpha} = -\frac{H}{R_\beta} \cdot \bar{e}_\beta; \quad \frac{\partial \bar{e}_\beta}{\partial \alpha} = \frac{H}{R_\beta} \cdot \bar{e}_\alpha; \quad \frac{\partial \bar{e}_\alpha}{\partial \beta} = -\frac{H}{R_\alpha} \bar{e}_\beta; \quad \frac{\partial \bar{e}_\beta}{\partial \beta} = \frac{H}{R_\alpha} \bar{e}_\alpha. \quad (14)$$

Для аппроксимации профилей зубьев координатными линиями биполярной системы координат, необходимо определить межполюсное расстояние и значения параметров α и β для контура зуба. Рассмотрим построение аппроксимирующего профиля для зуба сателлита (рисунок 4).

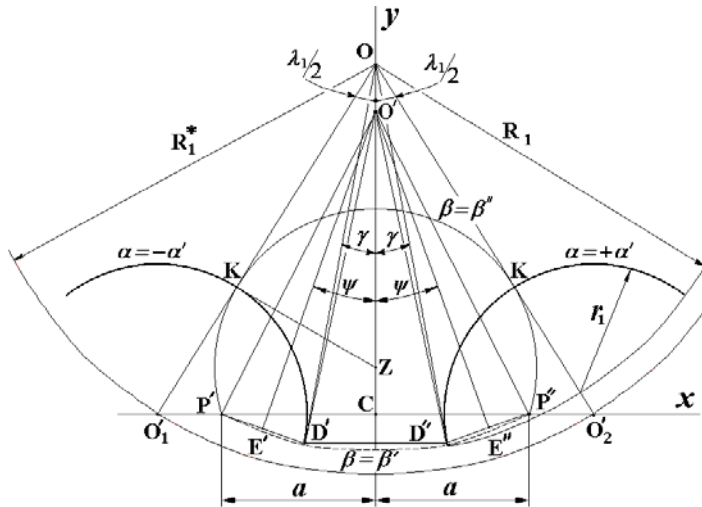


Рисунок 4 – Аппроксимация профиля зуба сателлита

Из центра сателлита O проводим окружности радиусами R_1, R_1^* и вертикальную ось симметрии. По обе стороны оси симметрии под углами $\lambda_1/2, \kappa$

ней проводим лучи. В точках O_1', O_2'' пересечения этих лучей с окружностью радиуса R_1^* получим центры O_1' и O_2'' образующих окружностей зубьев сателлита радиуса r_1 . Эти окружности с центрами O_1', O_2'' на оси X принимаем за координатные линии $\alpha = -\alpha'$ и $\alpha = +\alpha'$.

Из точки K пересечения луча, проведенного под углом $\lambda_1/2$ из центра O с образующей зуба сателлита проведем касательную до пересечения с осью Y в точке Z . Радиусом KZ проводим в массиве дугу окружности. Находим на оси X точки P' и P'' . Если точки P' и P'' принять за полюсы, то дуга окружности радиуса $KZ=R'$ будет являться координатной линией $\beta = \beta''$. Определим половину межполюсного расстояния $P'C = a$.

Находим смещение центра окружности $\beta = \beta''$, имеющей радиус R'

$$CZ = \frac{r_1 - R_1^* \cdot \sin^2 \lambda_1 / 2}{\cos \lambda_1 / 2}; \quad R' = (R_1^* - r_1) \operatorname{tg} \lambda_1 / 2. \quad (15)$$

Запишем уравнение этой окружности

$$X^2 + \left(Y - \frac{r_1 - R_1^* \sin^2 \lambda_1 / 2}{\cos \lambda_1 / 2} \right)^2 = (R_1^* - r_1)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \lambda_1 / 2. \quad (16)$$

Половину межполюсного расстояния найдем, полагая в уравнении (16) $Y=0$ и $X=a$

$$a = \sqrt{R_1^{*2} \sin^2 \lambda_1 / 2 - r_1^2}. \quad (17)$$

Определяем параметр координатной линии β''

$$\sin \beta'' = \frac{a}{KZ}. \quad (18)$$

Подставим значения KZ и a по формулам (15) и (17) в формулу (18)

$$\beta'' = \arcsin \left(\frac{\sqrt{R_1^{*2} \cdot \sin^2 \lambda_1 / 2 - r_1^2}}{(R_1^* - r_1) \operatorname{tg} \lambda_1 / 2} \right). \quad (19)$$

Угол β'' следует выбирать больше 90° . Для получения координатной линии $\beta = \beta'$, проводим окружность выступов радиусом R_1 . В пересечении с окружностями радиусов r_1 получим точки D', D'' соответствующие кромкам зуба. Найдем центр окружности координатной линии $\beta = \beta'$. Отрезок $P'D'$ делим

пополам и к середине отрезка восстанавливаем перпендикуляр. Точка O' пересечения перпендикуляра с осью Y является центром окружности – координатной линии $\beta=\beta'$. Радиусом $R'_\beta = O'P'$ проводим окружность. Окружность β' с незначительной погрешностью аппроксимирует линию выступов. Определим параметр β' . Составим уравнения для определения координатной точки D'' . Точка D' получается в результате пересечения окружностей радиусов R_1 и r_1 . Запишем уравнения этих окружностей в системе координат X, Y

$$X^2 + \left(Y - R_1^* \cos \frac{\lambda_1}{2} \right)^2 = R_1^2, \quad \left(X - R_1^* \sin \frac{\lambda_1}{2} \right)^2 + Y^2 = r_1^2. \quad (20)$$

Из разности уравнений (20) определяем угол γ

$$\cos \left(\frac{\lambda_1}{2} - \gamma \right) = \frac{R_1^2 - r_1^2 + R_1^{*2}}{2R_1 R_1^*}. \quad (21)$$

С помощью координат точки E'' и апофемы $O_1 E''$ определим угол ψ и радиус $R_{\beta'}$

$$\sin \psi = \frac{R_1 \cdot \cos \gamma - R_1^* \cos \lambda_1 / 2}{\sqrt{(R_1 \cos \gamma - R_1^* \cos \lambda_1 / 2)^2 + (a - R_1 \cdot \sin \gamma)^2}}, \quad (22)$$

$$R_{\beta'} = \frac{1}{2 \sin \psi} \sqrt{(R_1 \sin \gamma + a)^2 + (R_1 \cos \gamma - R_1^* \cos \lambda_1 / 2)^2}. \quad (23)$$

Вычисляем параметры β' и α'

$$\beta' = \arcsin \left(\frac{a}{R_{\beta'}} \right). \quad (24)$$

Определим значения параметра α' , т. е. $\text{Sh } \alpha' = \frac{a}{R_\alpha}$. Пользуясь определением функции $\text{Sh } \alpha'$, равенством (17) и значением $r_{\alpha'} = r_1$, получим

$$\alpha' = \ln \left(\frac{R_1^*}{r_1} \sin \lambda_1 / 2 + \sqrt{\frac{R_1^{*2}}{r_1^2} \sin^2 \lambda_1 / 2 - 1} \right). \quad (25)$$

Выполненное решение упрощает представление напряженно-деформированного состояния зуба [4, 5]

$$T = \bar{e}_\alpha \cdot \bar{e}_\alpha \cdot \sigma_\alpha + (\bar{e}_\alpha \cdot \bar{e}_\beta + \bar{e}_\beta \cdot \bar{e}_\alpha) \tau_{\alpha\beta} + \bar{e}_\beta \cdot \bar{e}_\beta \cdot \sigma_\beta,$$

где T – тензор напряжений; $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$ – напряжения нормальные к координатным линиям $\alpha=\text{const}, \beta=\text{const}$; $\tau_{\alpha\beta}$ – касательные напряжения на гранях элемента, выделенного координатными линиями: $\alpha, \beta, \alpha+d\alpha, \beta+d\beta$. Компоненты тензора напряжений удовлетворяют условиям равновесия $\nabla T=0$, где $\nabla = \frac{1}{H} \left(\bar{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \bar{e}_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right)$ – оператор Гамильтона.

Компоненты тензора деформации $E^* = 0,5 \cdot (\nabla \bar{U} + (\nabla \bar{U})')$, где $\bar{U} = \bar{e}_\alpha(U) + \bar{e}_\beta(V)$ – вектор смещения; $(\nabla \bar{U})'$ – транспонирование $\nabla \bar{U}$.

Компоненты тензора напряжений выразим через компоненты тензора деформаций с помощью обобщенного закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha} \left[(\text{Ch } \alpha + \cos \beta) \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial V}{\partial \beta} \right) + V \sin \beta - \frac{\nu}{1-\nu} U \text{Sh } \alpha \right], \\ \sigma_\beta &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha} \left[(\text{Ch } \alpha + \cos \beta) \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \right) - U \text{Sh } \alpha + \frac{\nu}{1-\nu} V \sin \beta \right], \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{E}{2(1+\nu)\alpha} \left[(\text{Ch } \alpha + \cos \beta) \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right) + (V \text{Sh } \alpha - U \sin \beta) \right]. \end{aligned}$$

Список литературы: 1. Стрельников В.Н. Расчёт зубьев кругового профиля на прочность // Опыт исследования, проектирования, изготовления и эксплуатации передач Новикова. Тезисы докладов Межреспубликанской научно-технической конференции – Рига: ЛРП ВНТОМ, 1989. – С.31–33. 2. Стрельников В.Н. О расчёте на прочность зуба в передаче с промежуточными телами качения // Республиканская научно-техническая конференция "Научные достижения и опыт отраслей машиностроения – народному хозяйству". Тезисы докладов – Севастополь: ВНТОМ, 1991. – С.44–45. 3. Стрельников В. Н. Прочностной расчёт зубьев в передачах с промежуточными телами качения // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Международный сборник научных трудов – Донецк: ДГТУ, 2005. – Вып.29. – С.176–188. 4. Иосилевич Г.Б., Осипова Г.В. Применение численных методов решения задач теории упругости к расчёту зубчатых передач // Вестник машиностроения. – 1976. – №4. – С.19–23. 5. Демидов С. П. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1979. – 432с.

Поступила в редколлегию 20.04.10