

Отсюда следует, что уравнения (22) и (23) не равны друг другу. Это значит, что касательные к профилям зубьев, спрофилированных одним и тем же инструментом, но с разными движениями заготовки относительно режущего инструмента, не совпадают и имеют разные углы наклона к осям координат. Следовательно, в обоих случаях профили зубьев разные.

Результат, полученный в уравнениях (22) и (23), можно сформулировать в виде теоремы.

**Теорема.** Для обеспечения расположения зубьев нормально центроиде нарезаемого участка некруглого колеса необходимо и достаточно заготовке нарезаемого колеса, кроме согласованного с производящим инструментом вращательного движения с постоянной окружной скоростью сообщать дополнительные обкатные движения в плоскости нормального сечения образующей аксоида нарезаемого колеса относительно полюса зацепления нарезаемого колеса и режущего инструмента таким образом, чтобы центр кривизны нарезаемого участка centroиды находился на линии нормали к центроиде режущего инструмента, проходящей через мгновенный центр вращения.

Доказательством теоремы служит изложенный выше материал.

**Список литературы:** 1. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584с. 2. А.с. 439375 СССР, МКа В23f 15/02. Способ нарезания некруглых зубчатых колес / Н.Л. Утатов, В.Н. Севрюк. – Оpubл. в Б.И., 1974, №30. – 1975. 3. Гохман Х.И. Теория зацеплений, обобщенная и развитая путем анализа. – Одесса, 1986.

Поступила в редколлегию 21.04.10

УДК 621.833

**А.В. ФЕДЧЕНКО**, к.т.н., ст. преп. каф. НГГ НТУ "ХПИ", г. Харьков

**Н.В. МАТЮШЕНКО**, к.т.н., доцент каф. НГГ НТУ "ХПИ"

### ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ПЕРЕДАЧУ НОВИКОВА ДЛЗ

Виконано дослідження стійкості рішення системи диференціальних рівнянь з змінними коефіцієнтами, що описують циліндричну передачу Новикова.

Stability of the decision of system of the differential equations with the variable factors, Novikov describing cylindrical gear is investigated.

Для задачи об устойчивости движения в постановке Ляпунова А.М. характерно следующее:

а) рассматривается устойчивость невозмущенного движения только по отношению к возмущениям начальных условий;

б) предполагается, что начальные возмущения, а следовательно, и последующие возмущения – достаточно малые величины;

в) рассматривается неограниченный интервал времени.

Рабочим состоянием многих машин и агрегатов является колебательное движение их звеньев, не является исключением и зубчатая передача. Будем считать ее голономной механической системой, которая в общем случае описывается системой дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n); S = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

и в которой функции  $X_s$  удовлетворяют условиям Липшица по переменным  $x_s$  в каждой замкнутой области  $\bar{G}_s \subset G$  и  $t \in J_t^+$ , где  $J_t^+ = [0 \leq t \leq \infty]$ :

$$G = \{x: x \in E_n; \|x\| < H, H = \text{const или } H = \infty\}; \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \text{ или } \|x\|_2 = \max_s(x_s). \quad (2)$$

При этом из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно [1], что по каждому набору вещественных чисел  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t_0)$  из области  $\bar{G}_s \times J_t^+$  определяется  $n$  непрерывно дифференцируемых функций

$$x_s(t, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, t_0) = x_s(t); s = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

удовлетворяющих системе (1) и принимающих значения

$$x_s(t) = x_s^0 \text{ при } t = t_0.$$

Следует заметить, что функции  $X_s$  ( $s=1, 2, \dots, n$ ) должны, естественно, зависеть от некоторых конструктивных параметров передачи  $(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \Omega$ .

Наряду с системой (1) имеет место другая система

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n) + R_s(t, x_1, \dots, x_n); (S = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

в которой функции  $R_s(t, x_1, \dots, x_n)$  учитывают непрерывно действующие возмущения на систему (1). В этом случае можно предположить, что в области  $\bar{G}_s \times J_t^+$  существует решение системы (4) и оно единственно для заданных начальных условий. Однако в [1] показано, что функции  $R_s(t, x_1, \dots, x_n)$  на практике не определимы, что существенно усложняет задачу, но, как правило, из-

вестны верхние границы, которые эти функции не превосходят. Для упрощения дальнейшего исследования переписем системы (1) и (4) в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x); \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + R(t, x), \quad (6)$$

где  $x$ ,  $X$  и  $R$  –  $n$ -мерные векторы в пространстве  $E_n$ .

Решением систем (5) и (6) следует считать вектор-функцию  $x(t)$  с компонентами  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ . Введя далее обозначение  $J = \{t: t_0 \leq t \leq t_0 + T\}$ , где  $T > 0$ , будем считать, что системы (5) и (6) определены в области

$$D = \bar{G}_\delta \times J \subset G \times J_t^+ \quad (7)$$

Установив понятие предельного перехода в нормированном фазовом пространстве, можно далее предположить, что последовательность векторов  $x_m^0$  сходится при  $m \rightarrow \infty$  к вектору  $x^0$ . Обозначим через  $x=f(t)$  решение системы (5), определенное в области  $D$  начальным вектором  $x_m^0$ , т.е.  $f_m(t_0)=x_m^0$ . Тогда, если  $x=f(t)$  – решение системы (5), определенное на том же отрезке и соответствующее начальному вектору  $x^0$ , то будем иметь  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(t)=f(t)$ , при  $m \rightarrow \infty$ , причем стремление к пределу на  $J$  равномерно по  $t$ . Содержание этого утверждения состоит в следующем. Если выполнены приведенные выше условия, то для любого положительного  $\varepsilon$  можно указать положительное  $\delta$  такое, что неравенство  $\|f_m(t) - f(t)\| < \varepsilon$  имеет место при  $t \in J$ , лишь только при  $\|x_m^0 - x^0\| < \delta$ . Это утверждение, носящее название теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных [1], использовано нами ниже.

Основным методом исследования технической устойчивости движения является метод функций Ляпунова, опирающийся на исследование поведения вспомогательной функции на траектории рассматриваемой системы.

Таким образом, опираясь на вышеизложенное, оценить устойчивость системы [2]

$$I_1 \phi_1 + c_1(\phi_1 - \phi_{\text{ш}}) = M_1;$$

$$I_{\text{ш}} \phi_{\text{ш}} - c_1(\phi_1 - \phi_{\text{ш}}) + F_1(z)R_{\text{ш}} + F_2(z)R_{\text{ш}} = -M_1 - h'_3 \phi_{\text{ш}};$$

$$m_{\text{ш}} \dot{x}_{\text{ш}} + c'_{\text{ш}} [x_{\text{ш}} - (a + b_w/2)\psi_{\text{ш}}] + c''_{\text{ш}} [(a + b_w/2)\psi_{\text{ш}} + x_{\text{ш}}] + F_1(z) + F_2(z) =$$

$$P_{1\text{ш}} - P_{2\text{ш}} - h_{1\text{ш}}(\dot{x}_{\text{ш}} - (a + b_w/2)\dot{\psi}_{\text{ш}}) - h_{2\text{ш}}(\dot{x}_{\text{ш}} + (a + b_w/2)\dot{\psi}_{\text{ш}});$$

$$I'_{\text{к}} \psi_{\text{к}} - c'_{\text{к}}(a + b_w/2)[x_{\text{к}} - (a + b_w/2)\psi_{\text{к}}] + c''_{\text{к}}(a + b_w/2)[(a + b_w/2)\psi_{\text{к}} + x_{\text{к}}] +$$

$$(z \pm (i-1)p_x)F_1(z) + (z \pm (i-1)p_x + q_{21})F_2(z) = -P_{1\text{к}}(a + b_w/2) - P_{2\text{к}}(a + b_w/2) +$$

$$h_{1\text{к}}(a + b_w/2)(\dot{x}_{\text{к}} - (a + b_w/2)\dot{\psi}_{\text{к}}) - h_{2\text{к}}(a + b_w/2)(\dot{x}_{\text{к}} + (a + b_w/2)\dot{\psi}_{\text{к}});$$

$$I_{\text{к}} \phi_{\text{к}} + c_2(\phi_{\text{к}} - \phi_4) + F_1(z)R_{\text{к}} + F_2(z)R_{\text{к}} = M_4 - h''_3 \phi_{\text{к}};$$

$$m_{\text{к}} \dot{x}_{\text{к}} + c'_{\text{к}} [x_{\text{к}} - (a + b_w/2)\psi_{\text{к}}] + c''_{\text{к}} [(a + b_w/2)\psi_{\text{к}} + x_{\text{к}}] - F_1(z) - F_2(z) =$$

$$P_{1\text{к}} - P_{2\text{к}} - h_{1\text{к}}(\dot{x}_{\text{к}} - (a + b_w/2)\dot{\psi}_{\text{к}}) - h_{2\text{к}}(\dot{x}_{\text{к}} + (a + b_w/2)\dot{\psi}_{\text{к}});$$

$$I'_{\text{к}} \psi_{\text{к}} - c'_{\text{к}}(a + b_w/2)[x_{\text{к}} - (a + b_w/2)\psi_{\text{к}}] + c''_{\text{к}}(a + b_w/2)[(a + b_w/2)\psi_{\text{к}} + x_{\text{к}}] -$$

$$(z \pm (i-1)p_x)F_1(z) - (z \pm (i-1)p_x + q_{21})F_2(z) = -P_{1\text{к}}(a + b_w/2) - P_{2\text{к}}(a + b_w/2) +$$

$$h_{1\text{к}}(a + b_w/2)(\dot{x}_{\text{к}} - (a + b_w/2)\dot{\psi}_{\text{к}}) - h_{2\text{к}}(a + b_w/2)(\dot{x}_{\text{к}} + (a + b_w/2)\dot{\psi}_{\text{к}});$$

$$I_4 \phi_4 - c_2(\phi_{\text{к}} - \phi_4) = -M_4,$$

где

$$F_1(z) = A_{1j} c_3 (z \pm (i-1)p_x) [\varphi_{\text{ш}} R_{\text{ш}} - \varphi_{\text{к}} R_{\text{к}} + \Delta \beta (z \pm (i-1)p_x) + x_{\text{ш}} - x_{\text{к}} + (z \pm (i-1)p_x)(\psi_{\text{ш}} - \psi_{\text{к}})];$$

$$F_2(z) = A_{2j} c_3 (z \pm (i-1)p_x + q_{21}) [\varphi_{\text{ш}} R_{\text{ш}} - \varphi_{\text{к}} R_{\text{к}} + \Delta \beta (z \pm (i-1)p_x + q_{21}) + x_{\text{ш}} - x_{\text{к}} + (z \pm (i-1)p_x + q_{21})(\psi_{\text{ш}} - \psi_{\text{к}})],$$

можно следующим образом. Имея некоторый набор начальных условий, в нашем случае  $\varphi_1^0, \varphi_{\text{ш}}^0, \varphi_{\text{к}}^0, x_{\text{ш}}^0, x_{\text{к}}^0, \psi_{\text{ш}}^0, \psi_{\text{к}}^0, \varphi_4^0$  согласно (3) должны существовать в нашем случае 8 функций, удовлетворяющих (1). Эти функции  $\varphi_1(t), \varphi_{\text{ш}}(t), \varphi_{\text{к}}(t), x_{\text{ш}}(t), x_{\text{к}}(t), \psi_{\text{ш}}(t), \psi_{\text{к}}(t), \varphi_4(t)$  у нас заданы таблично, т.к. получены численным интегрированием. В качестве начальных условий были определены

$$\varphi_1^0 = 0,00188; \varphi_{\text{ш}}^0 = -0,000187; \varphi_{\text{к}}^0 = 0,000122;$$

$$x_{\text{ш}}^0 = -6,29 \cdot 10^{-6}; x_{\text{к}}^0 = 1,18 \cdot 10^{-5}; \varphi_4^0 = 0,0012.$$

При изменении одного из начальных условий, а именно  $\varphi_1=0,00188+1\%$ , после анализа полученных графиков, оказалось, что изменения составляют для  $\varphi_{\text{ш}}(0,04)=-0,00205$ , что на 10,8% отличается от исходного значения в соответствующей точке.

Таблица

Изменяемый параметр +1%	Изменения по обобщенным координатам, %							
	$\varphi_{\text{ш}}$	$\varphi_1$	$\varphi_{\text{к}}$	$\varphi_4$	$x_{\text{ш}}$	$x_{\text{к}}$	$\psi_{\text{ш}}$	$\psi_{\text{к}}$
$\varphi_{\text{ш}}+1\%$	5	11,8	0,8	0,4	0,1	0,1	0	3
$\varphi_1+1\%$	10,8	12	8,2	0	0	0	0	0
$\varphi_{\text{к}}+1\%$	5	13	0,8	0,2	11	3,5	0	3
$\varphi_4+1\%$	5	4	0	0,6	14	3,5	0	0
$x_{\text{ш}}+1\%$	5	4,2	0,8	0,4	0,1	7	0	3
$x_{\text{к}}+1\%$	14	1	0,8	0,1	2	3,5	0	0
$\psi_{\text{ш}}+1\%$	5	9	1,3	0	11	7	1,5	3
$\psi_{\text{к}}+1\%$	5	12,6	0	0,4	0,1	11	1,5	3

Для  $\varphi_1$  расхождения составили 12%, для  $\varphi_{\text{к}} - 8,2\%$ , для  $x_{\text{ш}}, x_{\text{к}}, \varphi_4$  изменения составили 0%. Изменяя начальные условия, согласно теореме о непрерывности зависимости решения от начальных условий, на +1% по каждой из координат

отдельно, получаем искомые функции, которые отличаются от первоначальных на 0–14%, что является достаточным признаком технической устойчивости решения. Расчеты по всем координатам сведены в таблицу.

**Список литературы:** 1. Мартынюк А.А. Техническая устойчивость в динамике. – Киев: Техніка, 1973.- 188с. 2. Кириченко А.Ф., Федченко А.В. Математическая модель внутренней динамики цилиндрических передач Новикова ДЛЗ // Проблемы качества и долговечности зубчатых передач и редукторов: Труды международной научно-технической конференции. – Харьков, 1997. – С.102–108.

Поступила в редколлегию 28.04.10

УДК 621.833

**В.П. ШИШОВ**, д.т.н., профессор каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля, г. Луганск  
**О.А. РЕВЯКИНА**, к.т.н., доцент каф. инженерно-педагогических дисциплин ЛНУ им. Т.Г. Шевченко, г. Луганск  
**П.Н. ТКАЧ**, к.т.н., доцент каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля  
**Ю.А. СКЛЯР**, аспирант каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля

### КРИТЕРИИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ РЕЕЧНОЙ ПЕРЕДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ РЕЙКИ

Викладено математичну модель визначення геометрично-кінематичних критеріїв працездатності рейкової передачі загального вигляду та рейкової цівкової передачі з ізсувом вихідного контуру.

The mathematical model of definition of the geometric and kinematic criteria of work capacity of rail transmission of a general view and rail sausage filler nozzle transmissions with and shift of an initial head loop is stated.

**Постановка проблемы.** Реечные передачи находят применение в силовых механизмах – в автомобилях, сельскохозяйственных и подъемно-транспортных машинах, прессовом оборудовании, в пищевой промышленности и др. Причем, работоспособность реечных передач существенно влияет на работоспособность оборудования в целом. Поэтому задача повышения нагрузочной способности и долговечности таких передач является актуальной и может быть отнесена к проблеме многокритериальной оптимизации машиностроительных конструкций [1].

**Анализ литературы.** Эвольвентные реечные передачи достаточно изучены. Теория таких передач [2, 3, 4], а также значительный опыт, накопленный в ходе их эксплуатации, позволяют сделать вывод о том, что они достигли своего предела по качественным показателям работоспособности. Подтверждением тому является развитие в последние десятилетия новых видов

реечных передач, в том числе цевочных. Их развитие связано, в значительной мере, с крупногабаритными передачами. В основном они применяются взамен эвольвентных передач [5]. Известны цевочные передачи, в которых цевки рейки зацепляются с эвольвентным зубчатым колесом [6]. Причем, предлагаемое зацепление является приближенным, а поэтому не обеспечивает постоянную скорость движения рейки.

Математическая модель определения геометро-кинематических критериев реечных передач общего вида и реечных цевочных передач без смещения рейки получена в работе [8].

**Цель статьи.** Получить математическую модель реечных передач со смещением рейки.

Рассмотрим зацепление прямозубой рейки общего вида с зубчатым колесом и следующие системы координат (рисунок 1):

- $XYZ$  – неподвижная система координат;
- $X_2Y_2Z_2$  – система координат, связанная с колесом;
- $X_pY_pZ_p$  – система координат, связанная с рейкой.

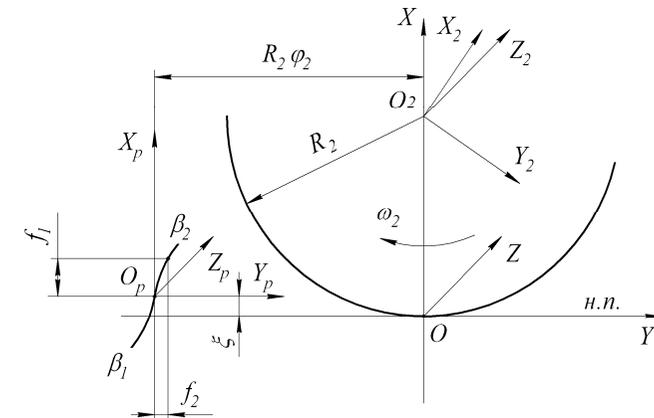


Рисунок 1 – Схема зацепления рейки с колесом со смещением:  
н.п. – начальная прямая;  $\omega_2$  – угловая скорость колеса;  
 $\varphi_2$  – угол поворота колеса;  $\xi$  – смещение рейки

Профиль зубьев рейки изображен в виде кривой  $\beta_1 - \beta_2$ . Уравнение этой кривой в системе координат  $X_pY_pZ_p$  запишем в виде:

$$\begin{aligned} X_p &= f_1(\lambda); \\ Y_p &= f_2(\lambda); \\ Z_p &= Z_0, \end{aligned} \quad (1)$$