

енный четырехзвенник  $O_1ABO_2$  и является построением Бобилье в начальной плоскости зацепления. Точка  $K$  является одной из точек контакта.

Для произвольной точки контакта  $K_1$  (рисунок 1) проведем линию зацепления  $CD$  параллельно  $AB$ , найдем новый полюс  $W_1$  и проведем плоскость зацепления  $\Sigma_1$ , которая пересечет оси вращений в точках  $D_1$  и  $C_1$ . Из этих точек опустим перпендикуляры на линию зацепления  $CD$ . Полученный четырехзвенник  $D_1DCC_1$  и является построением Бобилье в произвольной точке контакта.

Для передачи с непостоянным углом зацепления построения аналогичны, только линия зацепления – кривая, проходящая через выбранную точку контакта. Угол зацепления  $\alpha_1$  образует прямая, проведенная через точку контакта и полюс зацепления. Все линии зацепления имеют один вид.

Для вычисления радиусов кривизны в случае постоянного угла зацепления можно применить уравнение Эйлера-Савари в виде, предложенном Ф.Л. Литвиным

$$\frac{1}{\rho_2 - l} - \frac{1}{\rho_1 - l} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{1}{\sin \alpha}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – угол зацепления в полюсе передачи;  $\rho_1, \rho_2$  – радиусы кривизны контактирующих поверхностей;  $R_1 = O_1W_0$  и  $R_2 = O_2W_0$ .

Для передачи с переменным углом зацепления уравнение (1), как показано в работе [1], принимает вид

$$\frac{1}{\rho_2 - l} - \frac{1}{\rho_1 - l} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha)}{\sin \alpha}, \quad (2)$$

где  $\alpha_1$  – текущий угол зацепления. Все остальные параметры такие же, как и в (1).

Для вычисления радиусов кривизны рабочих поверхностей можно воспользоваться формулой

$$\rho_i = l \pm \frac{R_i \sin \beta_n}{\cos(\alpha_1 - \beta_n)}, \quad (3)$$

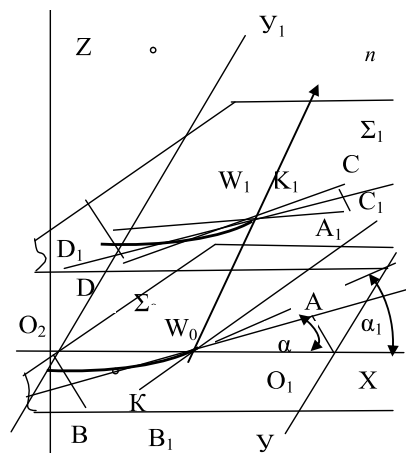


Рисунок 1 – К построению Бобилье для пространственной передачи в произвольной плоскости зацепления

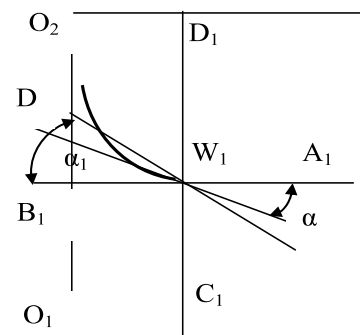


Рисунок 2 – Проекция зацепления на плоскость  $XO_1Y$

где  $l$  – расстояние  $K_iW_i$ ;  $\beta_n$  – угол смещения в построении Бобилье (рисунок 2), определяемый по формуле

$$\beta_n = \arctg \frac{k}{R_n \pm k \operatorname{tg} \alpha}; \quad (4)$$

$n$  – номер зубчатого колеса.

**Выводы.** Показано, что для пространственной передачи можно применять формулы (1) и (2) в соответствии с видом линии зацепления.

**Список литературы:** 1. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584с. 2. Павлов А.И. Ось зацеплений пространственной передачи // Вестник НТУ "ХПИ" – Харьков, 2002. – Вып.7, т.2. – С.58–59. 3. Павлов А.И. Современная теория зубчатых зацеплений. – Харьков: ХНАДУ, 2005. – 100с.

Поступила в редколлегию 20.04.08

УДК 621.01:621.833

**Н.Н. ТКАЧУК**, мл. научн. сотр. каф. КГМ им. А.А. Морозова НТУ "ХПИ", г. Харьков

**Н.А. ТКАЧУК**, д.т.н., проф., зав. каф. ТММ и САПР НТУ "ХПИ"

### КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ В ПРИЛОЖЕНИЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

У статті описані основні співвідношення кінематичного методу Литвина стосовно геометричного синтезу просторових зацеплень. Реалізація співвідношень кінематичного методу проведена на прикладі двопараметричних передач.

The theoretical basis of Lytvyn's kinematics method as it applies to the geometrical synthesis of the spatial gears are described in the paper. Realization of the kinematics method is described on the example of two-parameter gear.

**Введение.** Рассмотрим общие свойства задачи синтеза геометрии и анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) сложнопровильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями, которые без потери общности можно осуществить на примере двухпараметрических передач, впервые предло-

женных В.Р. Ковалюхом [1-7]. При их исследовании потребовалось создать новые схемы решения задач синтеза геометрии и анализа НДС. Особенностью данного типа передач является то, что в них реализуется одновременно два типа относительного движения зубчатых колес. Помимо вращательного движения, они могут совершать смещение относительно друг друга без потери зацепления. При этом первоначальный контакт зубьев передачи происходит в точке, а не по линии [5, 6]. Для того, чтобы обеспечить такое пространственное зацепление, необходимы зубья сложной формы, не нашедшие широкого распространения ранее. Общая методика исследования подобных зубчатых передач была предложена в работе [7] и предусматривает решение двух взаимосвязанных задач: синтез рабочих поверхностей зубьев и параметрический анализ по критериям жесткости и прочности в пространстве геометрических и силовых характеристик синтезируемой двухпараметрической передачи.

Ниже предложена математическая модель и реализация метода решения первой задачи на примере цилиндро-конической передачи с равновысокими зубьями на коническом колесе. Подробно описан алгоритм синтеза рабочих поверхностей зубьев, основанный на кинематическом методе Ф.Л. Литвина [4-7], а также приведена его численная адаптация. Сравнение и анализ результатов позволило сделать вывод о качественном характере влияния отдельных параметров задачи на вид получаемых поверхностей и оценить точность метода.

**Этапы решения.** При решении задачи синтеза было решено исходить из тех предположений, что форма зубьев одного из колес, передаточное отношение и закон относительного смещения зубчатых колес являются заданными. В этом случае становится возможным однозначно определить форму зубьев другого колеса и линии зацепления, соответствующие обоим независимым движениям звеньев передачи. Для этого выбрана схема решения (рисунок 1), в которой реализуется кинематический метод расчета пространственных зубчатых зацеплений. Исходными параметрами являются рабочая поверхность зуба одного из колес, параметризованная некоторыми параметрами  $\alpha$  и  $\theta$ , и закон движения колес, определяемый матрицей перехода между локальными системами координат колес, являющейся функцией параметров движения  $\varphi_1$  и  $u$ . Для цилиндрической передачи [1-3, 6, 7] задается форма зуба цилиндрического колеса:  $r_2(\alpha, \theta)$  – радиус-вектор точки поверхности зуба в локальной системе координат;  $n_2(\alpha, \theta)$  – вектор нормали в точке зуба с параметрами  $\alpha$  и  $\theta$ . Вращение колес определяется углом поворота конического колеса  $\varphi_1$ , связанным с  $\varphi_2$ , углом поворота цилиндрического колеса, соотношением

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = -i_{21} = \text{const}, \quad (1)$$

что соответствует постоянному передаточному числу. Параметр  $u$  отвечает

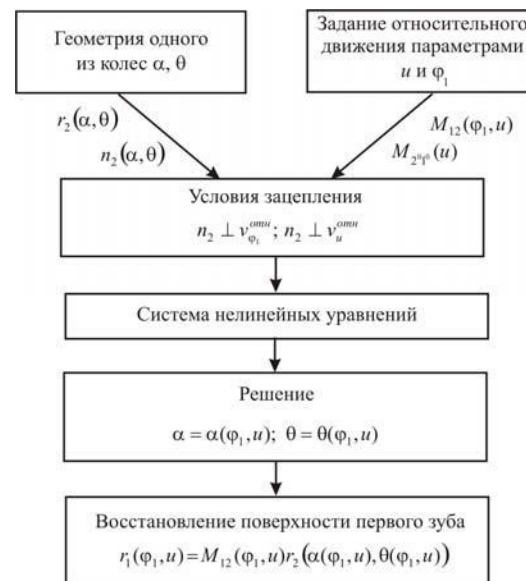


Рисунок 1 – Алгоритм синтеза рабочей поверхности зубьев двухпараметрической передачи

за второе независимое движение. При фиксированных  $\varphi_1$  и  $u$  это условие принимает вид системы двух нелинейных уравнений относительно  $\alpha$  и  $\theta$ , что позволяет найти их как функции параметров движения:

$$\{\alpha = \alpha(\varphi_1, u); \theta = \theta(\varphi_1, u)\}. \quad (2)$$

В свою очередь, с использованием соотношения (2) можно восстановить форму зуба конического колеса:

$$r_1(\varphi_1, u) = M_{12}(\varphi_1, u)r_2(\alpha(\varphi_1, u), \theta(\varphi_1, u)). \quad (3)$$

Здесь  $r_1$  и  $r_2$  – радиус-векторы точки контакта зубьев в локальных системах координат первого и второго колес. При численном решении системы (2) получается конечный набор точек, а потому искомая форма рабочей поверхности зуба первого колеса в конечном счете получается в виде сетки (облака) точек.

**Условие зацепления.** Рассмотрим две ортогональные системы координат  $O_e e_1 e_2 e_3$  и

за второе независимое движение.

В точке контакта должно выполняться условие обкатки. Относительная скорость точек зубьев, находящихся в зацеплении, должна быть ортогональной общему вектору нормали касающихся поверхностей зубьев [4-7]. Поскольку одновременно возможными должны быть два разных вида движения, указанное условие эквивалентно  $\{n_2 \perp v_{\varphi_1}^{omni}, n_2 \perp v_u^{omni}\}$ ,

где  $v_{\varphi_1}^{omni}$  и  $v_u^{omni}$  – относительные скорости контактирующих точек, соответствующие вращению и сдвигу зубчатых колес, соответственно.

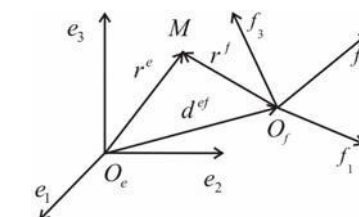


Рисунок 2 – Системы координат  $O_e e_1 e_2 e_3$  и  $O_f f_1 f_2 f_3$

$O_f f_1 f_2 f_3$  (рисунок 2) в аффинном пространстве и некоторую точку  $M$ , координаты которой в каждой из них выражаются как  $r_i^e = (r^e, e_i)$ ;  $r_j^f = (r^f, f_j)$ . Радиус-векторы связаны между собой соотношением  $r^e = d^{ef} + r^f$ ;  $r^f = d^{fe} + r^e$ , откуда  $d_i^f = (d^{ef}, e_i)$ ,  $r_i^e = (r^e, e_i) = (d^{ef}, e_i) + (r_j^f f_j, e_i) = d_i^f + L_{ij}^{ef} r_j^f$ ,  $L_{ij}^{ef} = (e_i, f_j)$ . В результате можем выразить компоненты одного вектора через компоненты другого:

$$r^e = d^f + L^{ef} r^f; r^f = d^e + L^{fe} r^e. \quad (4)$$

Матрицы вращения  $L^{ef}$  и  $L^{fe}$  взаимнообратные и ортогональные:  $L^{fe} = (L^{ef})^{-1} = (L^{ef})^T$ . Векторные величины  $d^f$  и  $d^e$  связаны между собой соотношением  $d^e = -L^{fe} d^f$ . Соотношения (4) удобно записывать в однородных координатах:  $\rho^e = \begin{pmatrix} r_1^e & r_2^e & r_3^e & 1 \end{pmatrix}^T$ ;  $\rho^f = \begin{pmatrix} r_1^f & r_2^f & r_3^f & 1 \end{pmatrix}^T$ . Они тогда принимают вид:  $\rho^e = M^{ef} \rho^f$ ;  $\rho^f = M^{fe} \rho^e$ , где  $M^{ef}$  и  $M^{fe}$  – матрицы взаимного перехода для однородных координат:

$$M^{ef} = \begin{pmatrix} L^{ef} & d^f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M^{fe} = \begin{pmatrix} L^{fe} & d^e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведенные выше соотношения используются для описания движения зубчатых колес и записи связи между координатами точек в локальных системах координат. Вводятся четыре системы координат (рисунок 3). Локальные системы колес  $O_i x_i y_i z_i$  вращаются вместе с ними, координаты точек зубьев в этих системах не меняются. Системы  $O_i x_{i0} y_{i0} z_{i0}$  соответствуют фиксированному положению звеньев при некотором значении параметра  $u$ . Угол между осями  $x_{i0}$  и  $y_{i0}$  и соответствующими осями локальной системы координат равен углу поворота колеса  $\varphi_i$ . Таким образом, взаимное движение колес разделяется на перемещение осей вращения и центров звеньев, определяемое параметром  $u$ , и вращение вокруг осей  $z_{i0}$  с угловыми скоростями, связанными передаточным соотношением (1).

Рассмотрим точку зацепления звеньев 1 и 2 и соответствующие ей точки на поверхно-

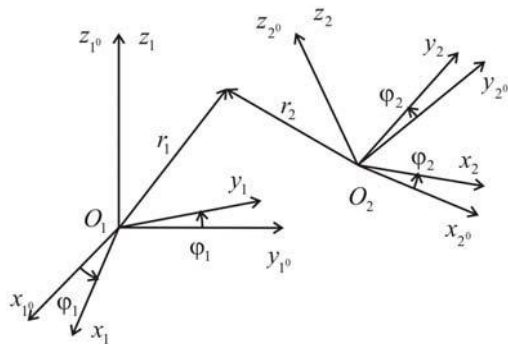


Рисунок 3 – Системы координат звеньев передачи

сти звеньев с радиус-векторами  $r_1$  и  $r_2$ . Компоненты однородных координат этих точек связаны соотношением  $\rho_2 = M_{21} \rho_1$ , где

$$M_{21} = M_{22^0}(\varphi_2) M_{2^0 1^0}(u) M_{1^0 1}(\varphi_1). \quad (5)$$

Чтобы определить относительную скорость точек звеньев в месте контакта, вводится произвольная неподвижная система координат, которой отвечает индекс "s".  $M_{s1}$  и  $M_{s2}$  определяют переход от локальных координат к введенным глобальным. При этом

$$\rho_1^s = M_{s1} \rho_1 \Rightarrow v_1^s = \frac{d}{dt} \rho_1^s = \frac{d}{dt} M_{s1} \rho_1; \rho_2^s = M_{s2} \rho_2 \Rightarrow v_2^s = \frac{d}{dt} \rho_2^s = \frac{d}{dt} M_{s2} \rho_2.$$

В качестве  $t$  может выступать как время, так и другой параметр движения, в частности,  $\varphi_1$  или  $u$ . С учетом того, что  $M_{s1} = M_{s2} M_{21}$ , определяется относительная скорость точек, находящихся в зацеплении, в неподвижной системе координат:

$$\begin{aligned} v_{omn}^s &= v_1^s - v_2^s = \frac{d}{dt} M_{s1} \rho_1 - \frac{d}{dt} M_{s2} \rho_2 = \\ &= \frac{d}{dt} M_{s2} M_{21} \rho_1 + M_{s2} \frac{d}{dt} M_{21} \rho_1 - \frac{d}{dt} M_{s2} \rho_2 = M_{s2} \frac{d}{dt} M_{21} \rho_1. \end{aligned}$$

Таким образом, в системе координат второго звена относительная скорость принимает следующее значение:  $v_2^{omn} = \frac{d}{dt} M_{21} \rho_1$ . Для того, чтобы движение звеньев передачи происходило свободно в области параметров  $\varphi_1, u$ , необходимо, чтобы условие зацепления выполнялось для всех возможных перемещений, определяемых этими параметрами. Для каждого из них в отдельности условие  $v^{omn} \perp n$  записывается следующим образом:

$$n_2^T \frac{\partial M_{21}}{\partial \varphi_1} \rho_1 = 0; n_2^T \frac{\partial M_{21}}{\partial u} \rho_1 = 0. \quad (6)$$

Здесь  $n_2$  – вектор, первые три компоненты которого равны компонентам вектора общей нормали в локальной системе координат второго звена, а четвертая – нулю. Соответственно, значение этого вектора определяется параметрами поверхности зуба второго колеса  $\alpha$  и  $\theta$ :  $n_2 = n_2(\alpha, \theta)$ . Помимо этого следует учесть, что  $\rho_1 = M_{21} \rho_2$ . Вместе с соотношениями (6) это позволяет записать условие зацепления в точке зуба  $\rho_2(\alpha, \theta)$  в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} n_2^T(\alpha, \theta) \frac{\partial M_{21}(\varphi_1, u)}{\partial \varphi_1} M_{12}(\varphi_1, u) \rho_2(\alpha, \theta) &= 0; \\ n_2^T(\alpha, \theta) \frac{\partial M_{21}(\varphi_1, u)}{\partial u} M_{12}(\varphi_1, u) \rho_2(\alpha, \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом (5) и (1)

$$\frac{\partial M_{21}(\varphi_1, u)}{\partial \varphi_1} = -i_{21} M'_{22^0}(\varphi_2) M_{2^0_1}(u) M_{1^0_1}(\varphi_1) + M_{22^0}(\varphi_2) M_{2^0_1}(u) M'_{1^0_1}(\varphi_1);$$

$$\frac{\partial M_{21}(\varphi_1, u)}{\partial u} = M_{22^0}(\varphi_2) M'_{2^0_1}(u) M_{1^0_1}(\varphi_1).$$

Матрицы вращения  $M_{1^0_1}$ ,  $M_{22^0}$  и их производные имеют простой вид:

$$M_{ii^0} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; M'_{ii^0} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 & 0 \\ -\cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$M_{i^0_i} = (M_{ii^0})^T; M'_{i^0_i} = (M'_{ii^0})^T.$$

Матрица перехода  $M_{2^0_1}$  определяется сложным относительным движением конического и цилиндрического колес. Для случая цилиндрического зацепления предложено такое взаимное расположение [1], при котором цилиндрическое колесо размещается перпендикулярно линии зуба на коническом колесе. При этом матрица  $M_{2^0_1}$  определяется выбором линии и радиуса конического колеса.

#### Условие эквидистантности линии зубьев на коническом колесе.

В [1] было предложено подчинить линии зубьев на коническом колесе условию эквидистантности, которое заключается в следующем. Расстояние по поверхности конуса между двумя соседними линиями, получающимися одна из другой вращением на угол  $\delta$ , должно быть постоянным (рисунок 4). Такое требование обеспечивает равную высоту получающихся зубьев конического колеса и глубину впадин между ними. В результате зуб получается одинаково прочным и одинаково входит в зацепление с зубьями цилиндрического колеса по всей своей длине.

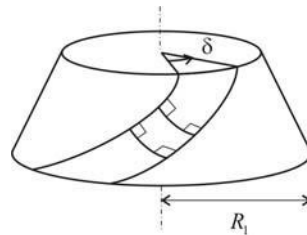


Рисунок 4 – Линии зубьев на коническом колесе

Для нахождения такой линии запараметризуем поверхность конуса и изобразим искомую линию на его развертке на плоскости. Вводим  $\psi$  и  $u$  – ортогональные координаты (рисунок 5), для которых координатные линии являются направ-

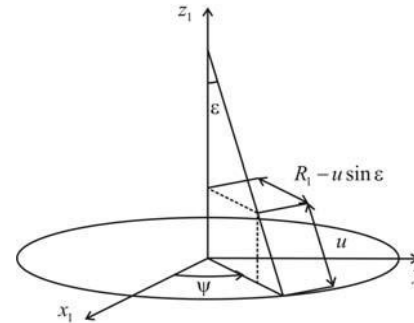


Рисунок 5 – Параметризация конуса

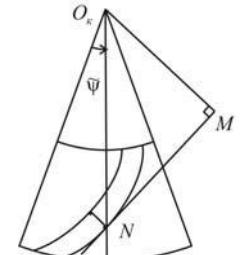


Рисунок 6 – Линии зубьев на развертке конуса

ляющими горизонтальными окружностями и прямыми образующими соответственно. При развороте конуса прямые переходят в прямые на плоскости, пересекающиеся в точке  $O_k$ . Окружности с разрезом переходят в дуги концентрических окружностей на плоскости. При этом их длина составляет  $2\pi(R_1 - u \sin \epsilon)$ . Расворот угла развертки равен  $2\pi \sin \epsilon$ . Соответственно,  $\tilde{\psi} = \psi \sin \epsilon$  – угол между линией разреза и образом координатной линии  $\psi$ . Координатные линии при разворачивании остаются ортогональными и не меняют длины. Это значит, что

отображение изометрично, и на развертке все углы и длины всех кривых сохраняются. Рассмотрим одну линию зуба и соседнюю с ней (рисунок 6). Выполнение условия эквидистантности этих линий на конусе эквивалентно существованию общей нормали постоянной длины для их образов на развертке. При этом повороту линии зуба на угол  $\delta$  соответствует поворот ее образа на развертке вокруг точки  $O_k$  на угол  $\delta \sin \epsilon$ .

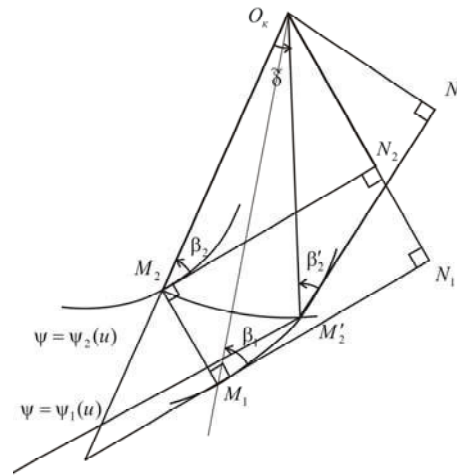


Рисунок 7 – Критерий эквидистантности

**Утверждение.** Если  $MN$  (см. рисунок 6) постоянно вдоль некоторой кривой, то равноотстоящая от нее кривая совпадет с ней при пово-

роте на определенный угол. Действительно, пусть первая кривая имеет уравнение  $\psi = \psi_1(u)$ , а равноотстоящая от нее вторая кривая – уравнение  $\psi = \psi_2(u)$ , тогда в произвольной точке  $M_1$  первой кривой существует общая со второй кривой нормаль  $M_1M_2$  (рисунок 7). Определим точку  $M'_2$  как пересечение первой кривой с окружностью с центром в  $O_\kappa$ , проходящей через  $M_2$ . Поскольку полученная точка будет принадлежать первой кривой,  $M'_2N'_2 = M_1N_1$ . С другой стороны,  $M_1N_1 = M_2N_2$  как стороны прямоугольника. Отсюда следует, что треугольники  $O_\kappa M_2N_2$  и  $O_\kappa M'_2N'_2$  равны и поворотом на некоторый угол  $\tilde{\delta}$  совмещаются, а, значит,  $\beta'_2 = \beta_2$ .

Имеем:

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \psi_2'^2 (R_1 - u \sin \varepsilon)^2}} \Rightarrow \psi_2'(u) = \psi_1'(u) \Rightarrow \psi_2(u) = \psi_1(u) + \tilde{\delta}.$$

$$\beta_2' = \frac{1}{\sqrt{1 + \psi_1'^2 (R_1 - u \sin \varepsilon)^2}} \Big|_{\beta_2' = \beta_2'}$$

Отсюда видно, что кривые  $\psi = \psi_1(u)$ ,  $\psi = \psi_2(u)$  действительно получают-ся одна из другой поворотом на  $\tilde{\delta}$ . Легко доказать и обратное к *Утверждению*. Таким образом, условие постоянства  $MN$  получается необходимым и достаточным для эквидистантности линий зубьев и может быть использовано для их определения. Итак,  $MN = \text{const} \Leftrightarrow \cos \beta_i (R_1 - u \sin \varepsilon) = \cos \beta R_1$ , где  $\beta = \beta_i(0)$  – угол между касательной к линии зуба и образующей конического колеса в начальной точке зуба. Отсюда с учетом  $\cos \beta_i = 1 / \sqrt{1 + \psi'^2 (R_1 - u \sin \varepsilon)^2}$  получаем  $\psi'^2 = \frac{1}{R_1^2 \cos^2 \beta} \left[ 1 - \frac{R_1^2 \cos^2 \beta}{(R_1 - u \sin \varepsilon)^2} \right]$ . В случае закручивания зуба против часовой стрелки приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно  $\psi$ :

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{1}{R_1 \cos \beta} \sqrt{1 - \frac{R_1^2 \cos^2 \beta}{(R_1 - u \sin \varepsilon)^2}},$$

интегрируя которое, находим следующее общее решение:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sin \varepsilon} \left[ \arctg \left( \sqrt{\left( \frac{R_1 - u \sin \varepsilon}{R_1 \cos \beta} \right)^2 - 1} \right) - \sqrt{\left( \frac{R_1 - u \sin \varepsilon}{R_1 \cos \beta} \right)^2 - 1} \right] + C,$$

где  $C$  – некоторая константа.

Отсюда

$$\cos \beta_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \psi'^2 (R_1 - u \sin \varepsilon)^2}} = \frac{R_1 \cos \beta}{R_1 - u \sin \varepsilon}.$$

В дальнейшем будет использоваться одно из следующих представлений частного решения с начальным условием  $\psi(0) = 0$ :

$$\psi(u) = \frac{1}{\sin \varepsilon} [\beta_i - \text{tg}(\beta_i)] - \frac{1}{\sin \varepsilon} [\beta - \text{tg}(\beta)] =$$

$$= \frac{1}{\sin \varepsilon} \left[ \arctg \left( \sqrt{\left( \frac{R_1 - u \sin \varepsilon}{R_1 \cos \beta} \right)^2 - 1} \right) - \sqrt{\left( \frac{R_1 - u \sin \varepsilon}{R_1 \cos \beta} \right)^2 - 1} \right] - \frac{1}{\sin \varepsilon} [\beta - \text{tg}(\beta)].$$

Выбранная ветвь решения обрывается в точке, где значение  $\cos \beta_i$  достигает единицы:  $\cos \beta_i = 1 \Leftrightarrow R_1 \cos \beta = R_1 - u \sin \varepsilon \Rightarrow u^{\max} = R_1 \frac{1 - \cos \beta}{\sin \varepsilon}$ . Теперь с помощью найденной формы зуба можно задать относительное расположение осей звеньев передачи и построить матрицу перехода  $M_{2^0 1^0}$ .

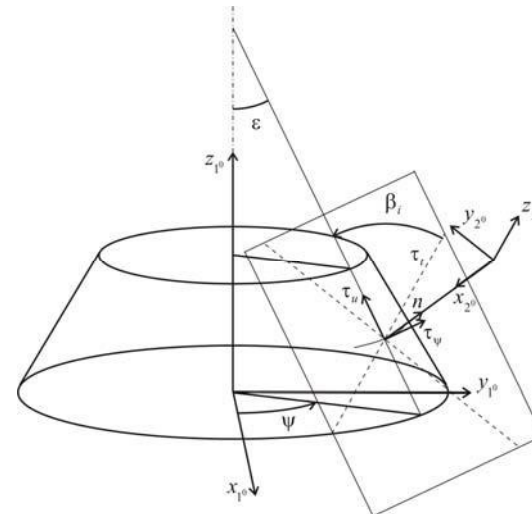


Рисунок 8 – Взаимное расположение осей конического и цилиндрического колес

зуба. Ось  $O_2y_2^0$  выбирается таким образом, чтобы орты системы образовывали

### Взаимное расположение осей колес передачи.

Положение осей  $O_1x_1^0, y_1^0, z_1^0$  и  $O_2x_2^0, y_2^0, z_2^0$  определяется параметром  $u$ . По нему выбирается точка на линии зуба конического колеса. Центр системы координат цилиндрического колеса  $O_2$  располагается по нормали на удалении  $R_2$  от выбранной точки. Ось  $O_2x_2^0$  направлена к точке линии зуба, ось  $O_2z_2^0$ , относительно которой цилиндрическое колесо совершает вращение, параллельна касательной к линии



правую тройку (рисунок 8). При таком определении  $O_2x_2 \parallel n$ :  $O_2x_2 = -n(u, \psi)$ ,  $O_2z_2 \parallel \tau_i$ :  $O_2z_2 = \cos \beta_i \tau_u + \sin \beta_i \tau_\psi$ ,  $O_2y_2 \perp O_2x_2, O_2z_2$ :  $O_2y_2 = \sin \beta_i \tau_u - \cos \beta_i \tau_\psi$ , где в левых частях вторых выражений в (6), (7) подразумеваются значения ортов. Здесь  $\tau_\psi$  и  $\tau_u$  – касательные к координатным линиям конуса; под  $\psi$  подразумевается  $\psi(u)$ ;  $n$  – вектор нормали к конусу в выбранной точке линии зуба, которые в системе координат конического колеса имеют следующее представление:

$$n(u, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varepsilon \\ \sin \psi \cos \varepsilon \\ \sin \varepsilon \end{pmatrix}; \quad \tau_u = \begin{pmatrix} -\cos \psi \sin \varepsilon \\ -\sin \psi \sin \varepsilon \\ \cos \varepsilon \end{pmatrix}; \quad \tau_\psi = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Помимо этого  $O_1O_2 = r(u, \psi) + R_2 n(u, \psi)$ , где  $r(u, \psi)$  – радиус-вектор точки линии зуба на конусе  $r(u, \psi) = (\cos \psi (R_1 - u \sin \varepsilon) \sin \psi (R_1 - u \sin \varepsilon) \cos \varepsilon)^T$ .

В итоге, имея представление для всех трех ортов системы  $O_2x_2y_2z_2$  и вектора  $O_1O_2$  в системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ , можем записать матрицы преобразования координат:

$$L_{2^0_1} = \begin{pmatrix} -n^T \\ \sin \beta_i \tau_u^T - \cos \beta_i \tau_\psi^T \\ \cos \beta_i \tau_u^T + \sin \beta_i \tau_\psi^T \end{pmatrix}; \quad M_{2^0_1} = \begin{pmatrix} L_{2^0_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{2^0_1} & -L_{2^0_1} O_1 O_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для записи системы (7) необходима производная матрицы  $M_{2^0_1}$  по  $u$ . Однако у нее имеется особенность в точке  $u = u^{\max}$ , в которой некоторые коэффициенты матрицы  $\frac{dM_{2^0_1}}{du}$  обращаются в бесконечность. Для того, чтобы этого избежать, предлагается изменить переменную дифференцирования. Так,  $\beta_i$  взаимно однозначно выражается через  $u$ , при этом  $\frac{dM_{2^0_1}}{du} = \frac{dM_{2^0_1}}{d\beta_i} \frac{d\beta_i}{du}$ ,  $\frac{d\beta_i}{du} < 0$  при  $\beta_i \neq \pi/2$ . На основании этого второе уравнение системы (7) можем заменить эквивалентным  $n_2^T \frac{\partial M_{21}}{\partial u} M_{12} \rho_2 = 0 \Leftrightarrow n_2^T \frac{\partial M_{21}}{\partial \beta_i} M_{12} \rho_2 = 0$ . Для нахождения

$\frac{dM_{2^0_1}}{d\beta_i}$  достаточно:

$$\frac{d\psi}{d\beta_i} = \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 \beta_i}}{\sin \varepsilon}, \quad \frac{du}{d\beta_i} = -\frac{R \cos \beta \sin \beta_i}{\sin \varepsilon \cos^2 \beta_i}, \quad \frac{dn}{d\beta_i} = \frac{d\psi}{d\beta_i} \cos \varepsilon \tau_\psi, \quad \frac{d\tau_u}{d\beta_i} = -\frac{d\psi}{d\beta_i} \sin \varepsilon \tau_\psi,$$

$$\frac{d\tau_\psi}{d\beta_i} = -\frac{d\psi}{d\beta_i} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{dr}{d\beta_i} = \frac{du}{d\beta_i} \tau_u + \frac{d\psi}{d\beta_i} (R_1 - u \sin \varepsilon) \tau_\psi.$$

**Поверхность зубьев цилиндрического колеса.** В рассматриваемой цилиндрической передаче в качестве профиля зуба выбирается эвольвента вращения – поверхность, образованная вращением эвольвенты, лежащей в плоскости  $O_2x_2y_2$ , вокруг некоторой оси, находящейся в той же плоскости. Уравнение эвольвенты в плоскости и выражение для вектора нормали:  $r_{ev}(\alpha) = R_2^{ev} [\cos \alpha + \alpha \sin \alpha, \sin \alpha - \alpha \cos \alpha]$ ;  $n_{ev}(\alpha) = [\sin \alpha, -\cos \alpha]$ .

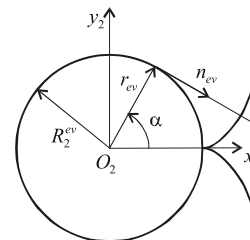


Рисунок 9 – „Положительная“ и „отрицательная“ эвольвенты

Параметр  $\alpha$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения (рисунок 9). При этом образуются лицевая и тыльная рабочие поверхности зуба на цилиндрическом колесе, через контакт с которыми передается вращение конического колеса в двух противоположных направлениях. Точки поверхности вращения и компоненты ее нормали находятся по формулам:

$$\rho_2(\alpha, \theta) = T_{tr}^{-1} T_{rot}(\theta) T_{tr} (r_{ev}(\alpha) \ 0 \ 1)^T;$$

$$n_2(\alpha, \theta) = T_{tr}^{-1} T_{rot}(\theta) T_{tr} (n_{ev}(\alpha) \ 0 \ 0)^T,$$



Рисунок 10 – Передняя и тыльная стороны зубьев на цилиндрическом колесе

где  $T_{tr}$  – матрица перехода к системе координат, содержащей ось вращения, а  $T_{rot}(\theta)$  – матрица поворота на угол  $\theta$  вокруг этой оси. Ось в плоскости  $O_2x_2y_2$ , вокруг которой вращается эвольвента, может быть выбрана произвольным образом. Так, в частности, зубья на рисунке 10 получены вращением вокруг осей, параллельных оси  $O_2x_2$  и расположенных в верхней и нижней полуплоскостях для "реверсной" (тыльной) и "аверсной" (лицевой) стороны зубьев, соответственно.

**Решение системы нелинейных уравнений.** Измененная система уравнений (7) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} n_2^T(\alpha, \theta) N_{\varphi_1}(\varphi_1, u) \rho_2(\alpha, \theta) &= 0; \\ n_2^T(\alpha, \theta) N_u(\varphi_1, u) \rho_2(\alpha, \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Радиус-вектор  $\rho_2$  точки поверхности зуба второго колеса и вектор нормали к поверхности зуба  $n_2$  задаются как функции  $\alpha$  и  $\theta$ . При этом параметры на поверхности цилиндрического колеса являются искомыми, т.е. из уравнения (8) должны быть найдены те значения  $\alpha$  и  $\theta$ , при которых возможно зацепление зубьев колес в положении, определяемом фиксированными  $\varphi_1$  и  $u$  ( $\alpha$  и  $\theta$  рассматриваются в пределах области  $\Omega_{\alpha\theta}$ ,  $\varphi_1$  и  $u$  варьируются в пределах  $\Omega_{\varphi_1 u}$ ).

Предполагается, что в области  $\Omega_{\varphi_1 u}$  существует подобласть  $\Omega_{\varphi_1 u}^m$ , в которой определены непрерывные функции  $\alpha(\varphi_1, u)$ ,  $\theta(\varphi_1, u)$ , удовлетворяющие системе (8). Принадлежность точки  $(\varphi_1, u)$  области  $\Omega_{\varphi_1 u}^m$  параметров движения, допускающих зацепление, определяется следующим образом. Каждому из уравнений системы (8) соответствует кривая в пространстве параметров  $\alpha$  и  $\theta$ . Пересечение этих кривых отвечает решениям системы при заданных  $\varphi_1$  и  $u$ . При этом может оказаться, что в  $\Omega_{\alpha\theta}$  пересечений нет (рисунок 11,а), что означает неосуществимость зацепления. В этом случае  $(\varphi_1, u) \notin \Omega_{\varphi_1 u}^m$ . Те же значения, при которых кривые в области  $\Omega_{\alpha\theta}$  пересекаются в единственной точке (рисунок 11,б), принадлежат искомой подобласти. Точка пересечения определяет значения искомым функций  $\alpha(\varphi_1, u)$ ,  $\theta(\varphi_1, u)$ . Вместе с тем возможна ситуация, при которой имеется более одного пересечения в  $\Omega_{\alpha\theta}$  (рис. 11, в). В таком случае необходимо разделить ветви решений с разными областями определения, оставив лишь одну из них.

Если при численном решении системы рассматривать сетку точек в области  $\Omega_{\varphi_1 u}$ :

$$\{(\varphi_1^{ij}, u^{ij})\}_{i,j=1}^n \subset \Omega_{\varphi_1 u}, \quad (9)$$

то среди них будут как те точки, для которых решение в области  $\Omega_{\alpha\theta}$  не существует, так и те, для которых существует хотя бы одно решение. Первые точки исключаются из рассмотрения, для остальных выбираются значения  $\{\alpha^{ij}, \theta^{ij}\}_{(i,j) \in I^m}$ . Здесь  $I^m$  – индексы точек сетки, для которых решение существует. Для того, чтобы принять эти числа за значения искомым непрерывных функций в точках  $\{(\varphi_1^{ij}, u^{ij})\}_{(i,j) \in I^m}$ , необходимо, чтобы в соседних точках сетки

значения  $\alpha^{ij}, \theta^{ij}$  были близкими. По этому принципу можно исключить лишние решения системы (9). В частности, при численном решении системы итерационными методами [8] в качестве начального приближения для нахождения  $\alpha^{ij}, \theta^{ij}$  можно выбирать полученное ранее решение в соседней точке. В случае наличия нескольких нулей в области итерационный процесс сойдется к точке, наиболее близкой к начальному приближению. При этом все узловое значения будут принадлежать одной ветви решения системы.

Для исследуемой цилиндрической конической передачи решение системы (8) обладает той особенностью, что  $\theta(\varphi_1, u) \equiv 0$  в  $\Omega_{\varphi_1 u}^m$ , а  $\alpha$  не зависит от  $u$ . Это значит, что при движении цилиндрического колеса вдоль линии зуба конического колеса с изменением параметра  $u$  точка контакта на зубе цилиндрического колеса не изменяется. Кроме того, углы  $\varphi_1^{ex}$  и  $\varphi_1^{blyx}$ , при которых зубья передачи входят и выходят из зацепления, одинаковы для всех положений колес. Для вращения конического колеса против часовой стрелки, при котором усилие передается через контакт лицевых сторон зубьев,  $\varphi_1^{ex}$  и  $\varphi_1^{blyx}$  – минимальное и максимальное значения  $\varphi_1$  в области  $\Omega_{\varphi_1 u}^m = [\varphi_1^{ex}, \varphi_1^{blyx}] \times [0, u^{max}]$ . Коэффициент зацепления в таком случае также не будет меняться при сдвиге цилиндрического колеса и вычисляется по формуле:  $\kappa = \frac{\varphi_1^{blyx} - \varphi_1^{ex}}{2\pi / z_1}$ .

**Синтез поверхности (зубья на коническом колесе).** После численного решения системы нелинейных уравне-

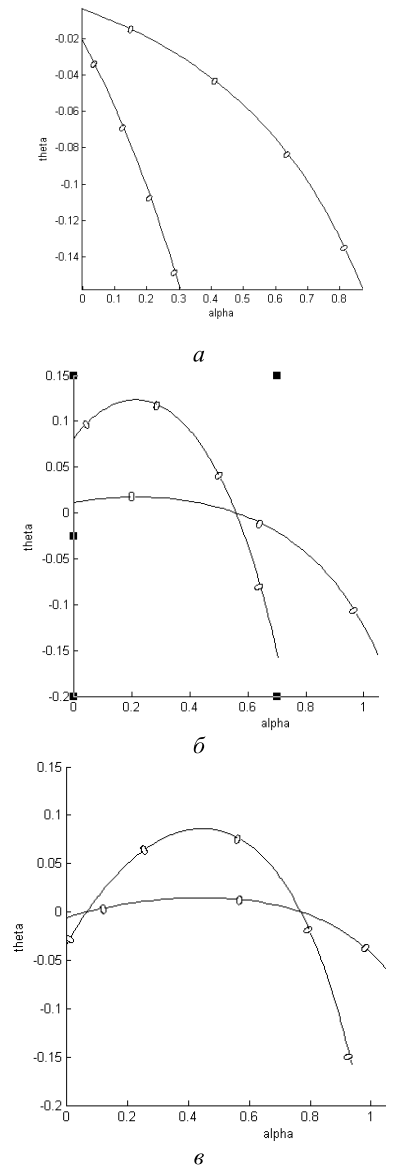


Рисунок 11 – Кривые корней первого и второго уравнений

ний поверхность зуба восстанавливается по формуле (3) с подстановкой в нее узловых значений  $\alpha^{ij}, \theta^{ij}$ . На рисунке 12 изображена полученная таким образом поверхность зуба с нанесенной на нее сеткой, которая состоит из линий двух типов. Одни представляют собой точки контакта при вращении передачи. Они начинаются у корня зуба и заканчиваются его вершиной. Другие тянутся вдоль линии зуба и состоят из точек, в которых касаются зубья при движении цилиндрического колеса, определяемом параметром  $u$ . На рисунке 13 показано, как зубья передачи входят в зацепление. Видно, что коэффициент перекрытия оказался больше единицы, и в зацеплении находятся одновременно несколько зубьев.

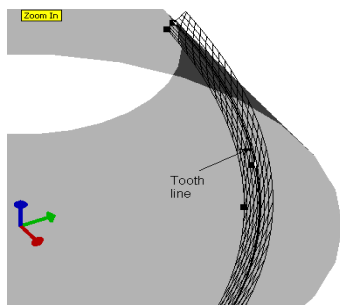


Рисунок 12 – Рабочая поверхность зуба конического колеса

Помимо передней части зуба, предложенным методом можно построить и обратную сторону зуба конического колеса (рисунок 14). Как и предполагалось, зубья получились одинаковой ширины по всей длине. Ее величину можно менять. При этом с увеличением ширины зуба конического колеса, определяемом углом между линиями прямого и обратного зубьев, уменьшается толщина зуба конического колеса, который входит при зацеплении во впадину между зубьями.

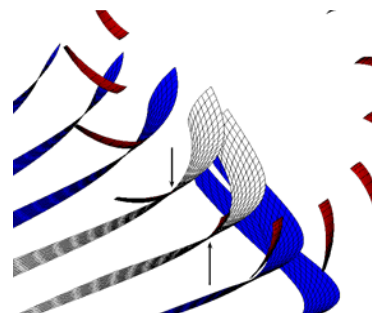


Рисунок 13 – Зацепление рабочих поверхностей зубьев

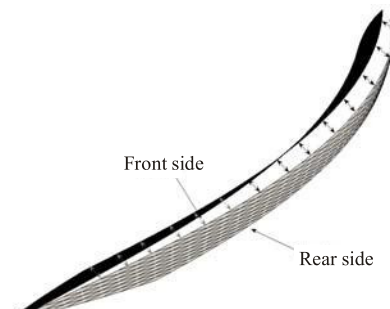


Рисунок 14 – Зуб конического колеса

Среди других параметров передачи, которые можно варьировать, размеры конического и цилиндрического колес, угол конусности (рисунок 15), начальный наклон линии зуба на коническом колесе, радиус начальной окружности эвольвенты, расположение оси вращения эвольвенты. Это позволяет в дальнейшем провести широкий параметрический анализ. Вопрос о соотношении

толщин зубьев конического и цилиндрического колес может быть приведен в качестве примера того, как правильный подбор параметров передачи может повлиять на ее прочностные и другие свойства.

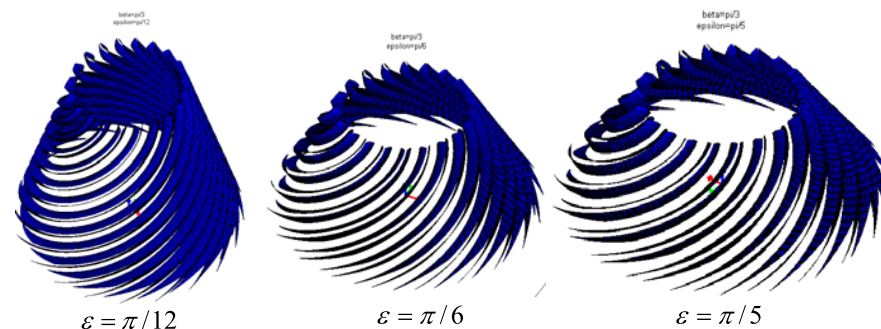


Рисунок 15 – Конические зубья с различными углами конусности

Предложенный алгоритм оказался достаточно эффективным при исследовании двухпараметрической цилиндрично-конической передачи. Разработанное программное обеспечение позволяет решать задачу синтеза рабочих поверхностей зубьев передачи с высокой точностью при произвольных значениях исходных параметров. С его помощью были найдены сопряженные поверхности зубьев, исследовано их зацепление. Разработано удобное представление основных соотношений метода, принципиально не зависящее от вида зацепления.

С использованием предложенных методов можно решить следующие задачи, связанные с анализом геометрии синтезируемых передач: обнаружение интерференции зубьев и нахождение параметров передачи, ее исключаящих; вычисление главных кривизн зубьев в точках зацепления и их направлений; формирование критериев рационального выбора параметров передачи. С их помощью станет возможным решение ряда прикладных задач, связанных с исследованием жесткости и прочности исследуемых передач, а также задач их параметрического анализа и синтеза.

**Заключение.** Одной из обнаруженных особенностей данного двухпараметрического зацепления является то, что главные кривизны поверхности зуба конического колеса имеют противоположные знаки. В результате происходит выпукло-вогнутый контакт рабочих поверхностей, и пятно контакта оказывается вытянутым в направлении, близком к направлению отрицательной главной кривизны поверхности зуба конического колеса. Кроме того, наличие такого направления может приводить к тому, что положительный радиус нормальной кривизны поверхности зуба цилиндрического колеса в нем будет больше по модулю, чем отрицательный радиус главной кривизны поверхности зуба конического колеса. Это означает наличие отрицательного зазора между зубьями в зацепленном состоянии



и невозможность вхождения в точечный контакт зубьев передачи из-за интерференции материала в зоне контакта.

Описанный выше вариант кинематического метода Литвина [4] отличается от других вариантов его применения тем, что изначально нацелен не только на восстановление геометрической формы сопрягаемых рабочих поверхностей или на формообразование этих поверхностей и вычисление траекторий движения инструмента, а и на подготовку геометрической модели как основы построения конечно-элементной. В связи с этим возможно вычисление не только координат сопряженных точек на рабочих поверхностях, но и локальных геометрических свойств их окрестностей.

Описанный на примере рабочих поверхностей зубьев двухпараметрических передач метод синтеза геометрии обладает высокой степенью общности для всего класса пространственных зацеплений. Естественно, что для более простых способов сопряжения тел упрощается и способы описания их геометрии. В дальнейшем планируется завершение построения геометрической модели зубьев двухпараметрических передач и исследование их напряженно-деформированного состояния.

**Список литературы:** 1. Ковалюх В.Р., Тернюк Н.Э. Методы обработки зубчатых колес двухпараметрических передач. // Производственно-технический бюллетень. – 1981. – №6. – С.26–27. 2. Ковалюх В.Р. Синтез зубчатых вариаторов на основе колес с равновысокоширокими зубьями и впадинами: Дисс... канд. техн. наук. – Харьков, 1982. – 156с. 3. Устиненко А.В. Разработка двухпараметрических передач и исследование их геометрии и контактной прочности: Дисс... канд. техн. наук. – Харьков, 2000. – 185с. 4. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584с. 5. Крылов Н.Н. Теория зацепления огибающих двухпараметрического семейства поверхностей // Известия вузов. Машиностроение. – 1963. – №12. 6. Ерихов М.Л. К вопросу о синтезе зацеплений с точечным касанием // Теория передач в машинах. – М.: Машиностроение, 1966. 7. Ткачук Н.Н. Методы и алгоритмы синтеза формы рабочих поверхностей зубьев двухпараметрических передач // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып. "Машиноведение и САПР". – 2005. – №60. – С.137–151. 8. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений. – М.: Мир, 1985. – 264с.

Поступила в редколлегию 21.05.10

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Устиненко А.В., Полищук И.С.</b> К 125-летию НТУ "ХПИ". Очерки об истории научной школы исследователей зубчатых передач в университете.....	3
<b>Tököly P., Vošanský M., Vanya A.</b> The effect of gear geometry on the thickness of tooth face hardened layer .....	10
<b>Бабичев Д.А., Бабичев Д.Т., Серебренников А.А.</b> Использование производной от ускорения внедрения при нахождении точек на огибающей, зная точки на обволакивающей.....	20
<b>Белодеденко С.В., Биличенко Г.Н., Гануш В.И.</b> Выбор подшипников качения и оценка их надежности с учетом вариации условий нагружения.....	26
<b>Бондаренко О.В., Устиненко О.В.</b> Оптимізація тривальних коробок передач за критерієм мінімальної міжосьової відстані методом ЛПТ-пошуку.....	31
<b>Васильева О.Е.</b> Багатопараметричний синтез конструктивних елементів корпусів циліндричних редукторів.....	38
<b>Власенко В.Н., Фей В.М.</b> Обзор рекомендаций по выбору и применению смазочных материалов для редукторов и мотор-редукторов ОМП.....	45
<b>Воронцов Б.С.</b> Математическое обеспечение интерактивного синтеза передач зацеплением ..	49
<b>Дорофеев В.Л., Дорофеев Д.В., Единович А.Б., Корнейчук А.В.</b> Особенности проектирования редукторов для самых мощных в мире украинско-российских авиационных двигателей.....	54
<b>Ишин Н.Н., Гоман А.М., Скороходов А.С.</b> Влияние динамических процессов в прямозубых зубчатых передачах на коэффициент перекрытия .....	61
<b>Кавецкий С.Н.</b> Порядок проведения синтеза планетарного механизма $\overline{AA}$ с учетом углов зацепления зубчатых колес первой и второй ступеней.....	76
<b>Калинін П.М., Курмаз Л.В., Жережон-Зайченко Ю.В.</b> Про можливість і методи забезпечення плавності зацеплення приводних зубчастих передач .....	81
<b>Кириченко И.А., Кацура А.Л., Витренко В.А., Кузьменко Н.Н., Витренко А.В.</b> Формообразование винтовых зубчатых колес в пространственном станочном зацеплении .....	89
<b>Кладова О.Ю., Сапрыкин В.Н., Шебанов И.Г.</b> Синтез планетарных механизмов типа АА и П с косозубыми цилиндрическими колёсами, осевые силы которых уравновешены .....	93