

В.О. МАЛАЩЕНКО, д.т.н., професор НУ "Львівська політехніка"
О.Р. СТРИЛЕЦЬ, аспірант НУ "Львівська політехніка"
В.М. СТРИЛЕЦЬ, к.т.н., доцент НУ водного господарства
та природокористування, м. Рівне

ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРУЖНИХ ШПОНКОВИХ З'ЄДНАНЬ ТИПУ ВАЛ-МАТОЧИНА

Розглянуті динамічні властивості пружних шпонкових з'єднань приводів, при передачі ними періодичного, ударного довготривалого і короткотривалого навантаження та їх значного перевантаження, аж до зупинки виконавчого механізму, від вала до маточини або навпаки без врахування втрат енергії у них.

Рассмотрены динамические свойства упругих шпоночных соединений приводов, при передаче ими периодического, ударного длительного и кратковременного нагружения и их значительной перегрузки, вплоть до остановки исполнительного механизма, от вала до ступицы или наоборот, без учета потерь энергии в них.

Dynamic properties of transmissions resilient keys connections, during the transition of periodical, forced, permanent and short-term loading and significant overload up to the stoppage of executive device from shaft to hub or other way without considering of energy losses are considered.

З'єднання пружними призматичними шпонками описані в роботах [1...5]. Схема одного з'єднання показана на рисунку 1. Її можна розглядати як загальну для всіх пружних шпонкових з'єднань. Тут вал 1 і маточина 2 (шків, зірочка, зубчасте колесо тощо) з'єднані між собою пружною призматичною шпонкою 3. Пружний зв'язок вала та маточини дозволяє знизити короткочасні перевантаження, забезпечує, наприклад, плавніше входження зубів у зачепленнях зубчастих передач та інші переваги для привода.

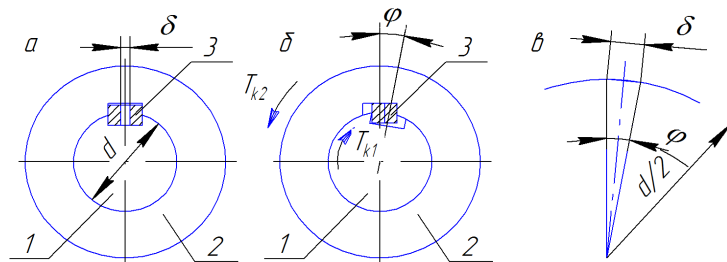


Рисунок 1 – Схеми роботи з'єднання типу "вал-маточина" з пружною призматичною шпонкою:
а – до навантаження; б – після навантаження;
в – для визначення кута повороту вала відносно маточини

Однією із основних характеристик пружних шпонкових з'єднань є його

жорсткість, записується відомою залежністю [6]

$$C_{\varphi} = \frac{dM}{d\varphi}, \quad (1)$$

де M – обертальний момент, який передається з'єднанням; φ – кут відносно повороту маточини відносно вала в площині їх обертання.

Відомі пружні призматичні шпонок мають постійну та змінну жорсткості, яку можна отримати вибором відповідної конструкцією.

Для аналізу впливу пружних шпонкових з'єднань на динамічні властивості привода і розв'язати поставлену задачу використовуємо рисунок 2, де прийняті наступні позначення: J_{ϕ} – приведений до вала момент інерції мас привода, які стоять до вала приведення; J_M – приведений до маточини момент інерції мас привода – від маточини до виконавчого механізму; ω_{ϕ} і M_{ϕ} – кутова швидкість і обертальний момент на валу; ω_M і M_M – кутова швидкість і обертальний момент на маточині.

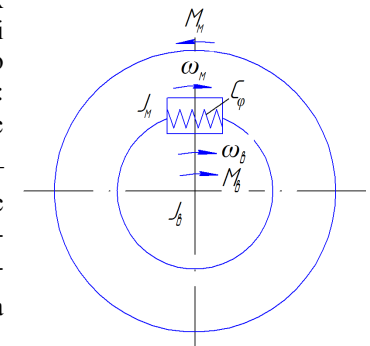


Рисунок 2 – Динамічна розрахункова схема

Припущення: у розрахунках коливань враховується тільки сталий C_{φ} ; пружне шпонкове з'єднання має малу демпфуючу здатність; обертальний момент M_{ϕ} може змінюватись без суттєвої зміни кутової швидкості ω_{ϕ} .

Перераховані умови дозволяють розглянути систему (рисунок 2), як просту, з однією ступінню вільності [6] з центром полярних координат на осі вала. Осі координат обертаються з кутовою швидкістю ω_{ϕ} . Тоді зможемо описати рух системи рівнянням загального вигляду

$$J_M \frac{d^2 \varphi_M}{dt^2} + C_{\varphi} \varphi_M = M_M. \quad (2)$$

Розглянемо розв'язки рівняння (2) для чотирьох характерних випадків зміни навантаження M_M виконавчого механізму, графіки яких показані на рисунку 3:

Періодична зміна навантаження є найбільш розповсюджена на практиці. Її можна виразити за допомогою гармонічної функції у вигляді

$$M_M = M_0 + M_{am} \sin \omega t, \quad (3)$$

де M_0 – постійна складова навантаження, номінальний обертовий момент на

валу двигуна; $M_{ам}$ і ω – амплітуда та кругова частота навантаження.

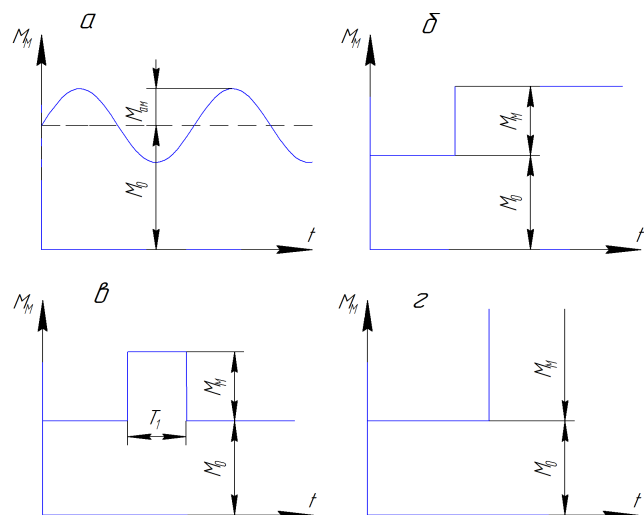


Рисунок 3 – Графіки навантаження виконавчого механізму:

a – навантаження змінюється періодично на протязі тривалого часу; *б* – величина ударного навантаження після різкого збільшення залишається незмінним на протязі тривалого часу; *в* – величина ударного навантаження після різкого збільшення зберігається на протязі малого часу; *г* – виконавчий механізм миттєво зупиняється внаслідок значного перевантаження

Далі позначимо $\varphi_m = \varphi_0 + \varphi$ і диференціюємо двічі, маємо

$$\frac{d^2 \varphi_m}{dt^2} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad (4)$$

де φ_0 – кут повороту маточини відносно вала в площині їх обертання постійною складовою навантаження.

Враховуючи (3), після нескладних перетворень із (2) отримаємо:

$$J_m \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C_\varphi \cdot \varphi = M_{ам} \cdot \sin \omega t, \quad (5)$$

або

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + p^2 \cdot \varphi = q \cdot \sin \omega t, \quad (6)$$

де

$$p = \sqrt{\frac{C_\varphi}{J_m}}, \quad q = \frac{M_{ам}}{J_m}. \quad (7)$$

Рівняння (5) і (6) описують вимушені гармонійні коливання. Загальний їхній розв'язок можна записати у вигляді

$$\varphi_3 = A \sin pt + B \cos pt + \frac{q}{p^2 - \omega^2} \sin \omega t, \quad (8)$$

де A і B – постійні коефіцієнти; p – кругова частота вільних коливань.

Перші два члени в (8) виражають вільні, а третій – вимушені коливання системи. Беручи до уваги тільки частину вимушених коливань, з урахуванням (6), отримаємо динамічною складовою навантаження у вигляді

$$\varphi C_\varphi = \frac{M_{ам}}{1 - (\omega/p)^2} \cdot \sin \omega t. \quad (9)$$

Позначимо амплітуду динамічного навантаження через $M_{ав}$, отримаємо

$$M_{ав} = \frac{M_{ам}}{1 - (\omega/p)^2}. \quad (10)$$

Залежність між $M_{ав}$ і ω/p виражається відомою резонансною кривою показаною на рисунку 4.

На основі аналізу отриманої кривої є очевидні випадки такі, що:

– при значеннях $\omega/p = 0$ і $\omega/p = \sqrt{2}$ значення $M_{ав} = M_{ам}$ за абсолютною величиною; у проміжку $0 < \omega/p < \sqrt{2}$ завжди буде $M_{ав} > M_{ам}$ і при $\omega/p = 1$ настає резонанс, що супроводжується поломкою деталей привода, при цьому $M_{ав} \rightarrow \infty$;

– при значеннях $\omega/p > \sqrt{2}$ завжди є випадок $M_{ав} < M_{ам}$.

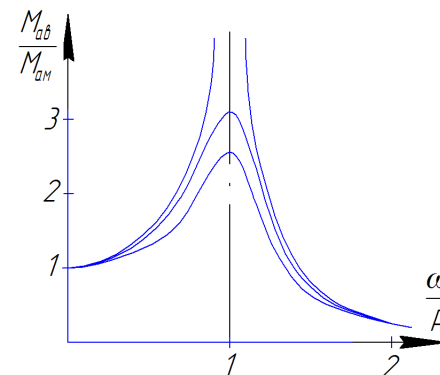


Рисунок 4 – Резонансна крива

Відтак, використовуючи запропоновані формулу (10) і нерівність $\omega/p > \sqrt{2}$, можна отримати випадок, коли пружне шпонкове з'єднання забезпечить плавну роботу привода для періодичного навантаження, а його жорсткість буде задовольняти умові

$$C_{\varphi} < \frac{J_m \cdot \omega^2}{2}. \quad (11)$$

Розглянемо другий випадок, який характерний для приводів, що вмикаються на повне навантаження після холостого ходу: металорізальні верстати, прокатні стани, вантажо-піднімальні машини тощо (рисунок 3,б).

Рівняння руху маси J_m буде подібне (6), в якому праву частину слід замінити постійним приростом навантаження M_m .

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + p^2 \cdot \varphi = q, \quad (12)$$

де

$$q = \frac{M_m}{J_m}. \quad (13)$$

Загальним розв'язком рівняння (12) є:

$$\varphi = A \sin pt + B \cos pt + \frac{q}{p^2}. \quad (14)$$

Останній член правої частини (14) рівний куту повороту маточини відносно вала в площині їх обертання при статичній дії приросту навантаження M_m . У цьому легко переконатися, якщо взяти до уваги позначення у (7).

У рівнянні (14) перші два члени виражають вільні коливання, що викликані ударним навантаженням, які швидко затухають внаслідок дисипації енергії, а залишається один третій член. На початковій ділянці коливань після ударного навантаження вільні коливання мають суттєві значення, а тому не можуть бути виключені із аналізу. Постійні коефіцієнти A і B у (14) визначаються за початковими умовами. Суть цих умов у тому, що перед ударним навантаженням додатковий кут відносного повороту маточини відносно вала в площині їх обертання φ і швидкість її повороту ω були рівні нулю. Тоді, при $t=0$: $\varphi=0$ і $d\varphi/dt=0$, а $B = -q/p^2$.

Диференціюємо рівняння (14) і виконаємо другу початкову умову, маємо, що $A=0$. Підставимо значення коефіцієнтів A і B у рівняння (14), отримаємо

$$\varphi = \frac{q}{p^2}(1 - \cos pt). \quad (15)$$

Якщо врахувати позначення (7) і перейти до моментів, дістанемо

$$M_{\epsilon} = \varphi C_{\varphi} = M_m(1 - \cos pt). \quad (16)$$

Із (16) видно, що при $t = \pi/p$, $M_{\epsilon \max} = 2M_m$.

Максимальне значення навантаження привода не залежить від частоти вільних коливань системи та жорсткості пружного шпонкового з'єднання.

Максимальне навантаження залишається постійним як при жорсткому, так і пружному шпонкових з'єднаннях, а змінюється лише плавність передачі цього навантаження. Цей висновок ґрунтується на рішенні, яке не враховує втрат у пружних шпонкових з'єднаннях.

Залежність (16) буде справедливим тільки на відрізку часу від $t=0$ до $t=t_1$, тобто маємо характерні випадки:

- при $t_1 \geq \frac{\pi}{p}$ залишається справедливою рівність $M_{\epsilon \max} = 2M_m$;
- при $\frac{\pi}{2p} < t_1 < \frac{\pi}{p}$ буде $2M_m > M_{\epsilon \max} > M_m$;
- тільки при $t_1 < \frac{\pi}{2p}$ можна очікувати $M_{\epsilon \max} < M_m$.

У третьому випадку (рисунок 3,в), при короткочасних навантаженнях після $t=T_1$ система буде вільна від додаткового навантаження M_m . Для дослідження подальшого руху системи (при $t > T_1$) використаємо розв'язок рівняння (14), враховуючи, що $q = M_m/J_m = 0$.

Тоді отримаємо

$$\varphi = A \sin pt + B \cos pt. \quad (17)$$

У (17) час відраховується від моменту закінчення дії навантаження. Постійні коефіцієнти A і B визначаються також за початковими умовами. При $t_1=0$ кут повороту маточини відносно вала в площині їх обертання φ і швидкість її повороту $d\varphi/dt$ визначаються із рівняння (15), у якому слід прийняти $t=T_1$.

Тоді отримаємо:

$$\varphi_{t=0} = \frac{q}{p^2}(1 - \cos pT_1), \quad \text{а} \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = \frac{q}{p} \sin pT_1.$$

За першою умовою із рівняння (17) маємо $B = \frac{q}{p^2}(1 - \cos pT_1)$,

а за другою – $A = \frac{q}{p^2} \sin pT_1$.

Тоді (17) приймає вигляд

$$\varphi = \frac{q}{p^2} [\sin pT_1 \sin pt_1 + (1 - \cos pT_1) \cos pt_1], \quad (18)$$

або

$$M_\epsilon = M_m [\sin pT_1 \sin pt_1 + (1 - \cos pT_1) \cos pt_1]. \quad (19)$$

Рівняння (19) дозволяє аналітично визначити максимальне значення M_ϵ у залежності від співвідношення T_1 і p . Наголосимо, що M_ϵ помітно зменшується порівняно з M_m , якщо T_1 менше, ніж $1/8$ періоду вільних коливань системи ($T_1 = \pi/4p$).

Таким чином, правильним вибором жорсткості пружного шпонкового з'єднання можна зменшити шкідливу дію ударного навантаження на елементи приводів машин та механізмів.

Тепер розглянемо випадок, коли робочий механізм миттєво зупиняється внаслідок значного перевантаження (рисунок 3,з). Кутова швидкість вала і маточини до перевантаження була постійною і дорівнювала ω_ϵ . Після цього система буде навантажена пусковим моментом електродвигуна $M_{\text{пуск}}$ тому, що він ще не вимкнений. Тут приймаємо, що $M_{\text{пуск}} = M_n$. При цьому постійну складову кута повороту маточини відносно вала в площині їх обертання φ_0 виключаємо із розгляду, а рух маси J_ϵ буде описуватись рівнянням вільних коливань (17) з початковими умовами:

$$\text{- при } t = 0, \varphi = 0 \text{ і } \frac{d\varphi}{dt} = \omega_\epsilon.$$

Постійні коефіцієнтів A і B для цих умов дорівнюють:

$$B = 0; \quad A = \frac{\omega_\epsilon}{p} \quad \text{і} \quad \varphi = \frac{\omega_\epsilon}{p} \sin pt. \quad (20)$$

Враховуючи, що $p = \sqrt{C_\varphi/J_m}$, отримаємо додатковий момент, який діє на систему

$$M = \varphi C_\varphi = \frac{C_\varphi \omega_\epsilon p}{p^2} \sin pt = J_\epsilon \omega_\epsilon p \sin pt; \quad (21)$$

при

$$t = \frac{\pi}{2p}; \quad M_{\text{max}} = J_\epsilon \omega_\epsilon p. \quad (22)$$

Рівняння (22) дозволяє стверджувати, що величина додаткового моменту, який діє на систему в результаті її раптової зупинки, прямо пропорційна частоті вільних коливань системи p . Чим менша жорсткість пружного шпонкового з'єднання при інших рівних умовах, тим менше перевантаження привода для такого критичного випадку. В той час як у жорстких з'єднаннях перевантаження можуть досягати дуже великих величин і викликати поломку слабшого елемента привода.

Висновки:

1. Аналіз отриманих результатів стосовно динамічних явищ для пружних шпонкових з'єднань приводів, при передачі ними періодичного, ударного довго- та короткотривалого навантаження і перевантаження, аж до зупинки виконавчого механізму, навіть без врахування дисипації енергії у них, істотно пом'якшує передавання моменту від вала до маточини або навпаки.

2. Запропоновані аналітичні залежності мають теоретичне та практичне значення для різних галузей машинобудування щодо проведення уточнених розрахунків навантажувальної здатності пружних шпонкових з'єднань і є науковим підґрунтям для подальших досліджень елементів приводів.

Список літератури: 1. Малащенко В.О., Стрілець О.Р., Стрілець В.М. Обґрунтування нової класифікації шпонкових з'єднань // Підйомно-транспортна техніка. – Дніпропетровськ: 2009. – №4. – С.124-130. 2. Малащенко В.О., Стрілець О.Р., Стрілець В.М. Навантажувальна здатність пружних шпонкових з'єднань типу вал-маточина // Вісник НТУ "ХПІ". Збірник наукових праць. Тематичний випуск "Проблеми механічного приводу". – Харків: НТУ "ХПІ". – 2010. – №26. – С.65-71. 3. Малащенко В.О., Стрілець О.Р., Стрілець В.М. Статичні розрахунки деяких призматичних пружних шпонок / Матеріали Міжнародної науково-технічної конференції "Фундаментальні та прикладні проблеми сучасних технологій" (м. Тернопіль, 19-21 травня 2010р.). – Тернопіль: ТНТУ, 2010. – С.68-69. 4. Малащенко В.О., Стрілець О.Р., Стрілець В.М. Деякі питання динаміки з'єднань типу вал-маточина з пружними призматичними шпонками // Праці 2-ої Міжнародної науково-технічної конференції "Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій" (м. Львів, 11-13 листопада 2010р.). – Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2010. – С.140-142. 5. Малащенко В.О., Стрілець О.Р., Стрілець В.М. Обґрунтування кінематико-силових параметрів з'єднань з пружними шпонками // Вісник НУ біоресурсів і природокористування України – К.: НУБПУ, 2010. – №26. – С.65-71. 6. Комаров М.С. Динаміка механізмів і машин. – М.: Машиностроение, 1968. – 351с.

Надійшла до редакції 15.04.11