

Для вычисления радиусов кривизны рабочих поверхностей можно воспользоваться формулой

$$\rho_i = l \pm \frac{R_i \sin \beta_n}{\cos(\alpha_1 - \beta_n)}, \quad (3)$$

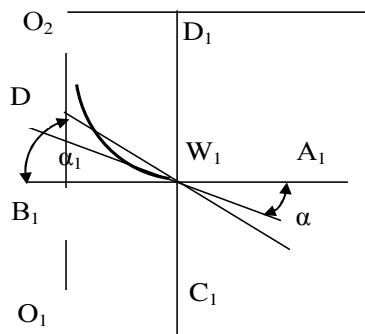


Рисунок 2 – Проекция зацепления на плоскость  $XO_1Y$

где  $l$  – расстояние  $K_iW_i$ ;  $\beta_n$  – угол смещения в построении Бобилье (рисунок 2), определяемый по формуле

$$\beta_n = \arctg \frac{k}{R_n \pm k \operatorname{tg} \alpha}; \quad (4)$$

$n$  – номер зубчатого колеса.

**Выводы.** Показано, что для пространственной передачи можно применять формулы (1) и (2) в соответствии с видом линии зацепления.

**Список литературы:** 1. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584с. 2. Павлов А.И. Ось зацеплений пространственной передачи // Вестник НТУ "ХПИ" – Харьков, 2002. – Вып.7, Т.2. – С.58-59. 3. Павлов А.И. Современная теория зубчатых зацеплений. – Харьков: ХНАДУ, 2005. – 100с.

Поступила в редколлегию 02.04.11

УДК 621.833.6

**А.В. ШЕХОВ**, старший научный сотрудник НАКУ "ХАИ", г. Харьков

### АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

В статье рассмотрены алгоритмы нахождения решения задач оптимального проектирования многоступенчатых зубчатых механизмов. Приведен пример проектирования двухступенчатого кратного рядового механизма по критерию минимальной общей массы.

В статті розглянуто алгоритми знаходження рішення задач оптимального проектування багатоступінчатих зубчастих механізмів. Наведено приклад проектування двоступінчатого кратного рядового механізму за критерієм мінімальної загальної маси.

In article the algorithms of find results tasks of optimum design gear mechanisms is submitted. Example optimum design gear mechanism is given.

**Постановка проблемы.** Проектирование многоступенчатого зубчатого механизма – комплекс задач, которые решает конструктор. Это синтез кинематической схемы механизма, расчет кинематики и динамики механизма, прочностной расчет звеньев механизма, выполнение специальных расчетов, связанных с назначением проектируемого механизма и другие расчеты. На сегодняшний день эти расчеты, как правило, выполняют на компьютерах. С другой стороны, эти расчеты выполняются как оптимизационные. Другими словами, конструктор решает свои задачи как задачи оптимального проектирования. Особенность решения таких задач состоит в том, что они формулируются как многокритериальные задачи. Эффективное решение задач оптимального проектирования требует разработки соответствующих алгоритмов. Обычно, задача оптимального проектирования формулируется как поиск минимума или максимума некоей целевой функции, значение которой зависит от параметров проектирования. От вида целевой функции и ее свойств, как математической функции, зависит трудоемкость решения задачи оптимального проектирования. В этом плане разработка алгоритмов оптимизации конструкции вышеуказанных механизмов представляет собой актуальную задачу.

**Анализ литературы.** Вопросам оптимального проектирования многоступенчатых зубчатых механизмов посвящено достаточно много работ, в частности [1-4]. В работах [1-2] приведены примеры определения распределения общего передаточного отношения по ступеням составных планетарных механизмов, обеспечивающие минимум их массы из условий равнопрочности его зубчатых зацеплений. Там же приводятся блок-схемы некоторых алгоритмов, которые применялись авторами при решении этих примеров. Вопросы оптимизации по габаритам, массе и приведенному моменту инерции многоступенчатых рядных механизмов приведены в работах [3-4]. Здесь, как и в вышеуказанных работах, в качестве параметров проектирования выбраны передаточные отношения отдельных ступеней проектируемого механизма. Заметим, что такой подход типичен для решения задач оптимального проектирования многоступенчатых зубчатых механизмов.

**Цель статьи.** Разработка алгоритма решения задачи оптимального проектирования многоступенчатого зубчатого механизма, предоставляющего решение непосредственно для чисел зубьев колес механизма. Сравнение традиционного и разработанного алгоритмов.

**Раздел.** Пусть задан многоступенчатый зубчатый механизм в виде  $n$  ступенчатого кратного рядного механизма, кинематическая схема которого, приведена на рисунке 1.

Значение общего передаточного отношения механизма находят по формуле

$$U_{\Sigma} = u_1 u_2 \cdots u_{n-1} u_n = \frac{z_2 z_4 \cdots z_{2n}}{z_1 z_3 \cdots z_{2n-1}}, \quad (1)$$

где  $u_i = z_{2i}/z_{2i-1}$  – передаточное отношение  $i$ -ой ступени механизма ( $i=1, n$ ).

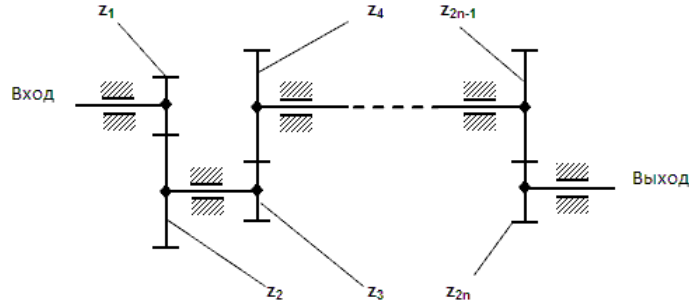


Рисунок 1 – Многоступенчатый кратный рядный механизм

Для заданного значения общего передаточного отношения механизма  $U_\Sigma$  требуется спроектировать механизм, имеющий наименьшую суммарную массу зубчатых колес  $M_\Sigma$ .

Запишем суммарную массу зубчатых колес  $M_\Sigma$  в виде следующей суммы

$$M_\Sigma = M_1 + M_2 + \dots + M_n, \quad (2)$$

где  $M_i = \frac{\pi\rho_i}{4} (b_{2i-1}d_{2i-1}^2 + b_{2i}d_{2i}^2)$  – масса зубчатых колес  $i$ -ой ступени механизма;  $\rho_i$  – плотность материала зубчатых колес  $i$ -ой ступени механизма;  $b_{2i-1}, b_{2i}, d_{2i-1}, d_{2i}$  – ширины и делительные диаметры зубчатых колес  $i$ -ой ступени механизма.

Заметим, что масса зубчатых колес  $M_i$  вычисляется на основе физической модели, рассмотренной в [1].

Принимаем следующее равенство

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = \rho. \quad (3)$$

С учетом (3) выражение (2) записываем в виде

$$M_\Sigma = \frac{\pi\rho}{4} b_1 d_1^2 \left( 1 + \frac{b_2}{b_1} u_1^2 + \frac{b_3 d_3^2}{b_1 d_1^2} \left( 1 + \frac{b_4}{b_3} u_2^2 \right) + \dots + \frac{b_{2n-1} d_{2n-1}^2}{b_1 d_1^2} \left( 1 + \frac{b_{2n}}{b_{2n-1}} u_n^2 \right) \right). \quad (4)$$

В (4) учтено следующее соотношение

$$\frac{d_{2i}^2}{d_{2i-1}^2} = \left( \frac{m_i z_{2i}}{m_i z_{2i-1}} \right)^2 = u_i^2, \quad (5)$$

где  $m_i$  – модуль зубчатых колес  $i$ -ой ступени механизма.

Полагая  $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ ,  $d_1 = d_3 = \dots = d_{2n-1}$  и  $m_1 = m_2 = \dots = m_n$ , получим

$$M_\Sigma = \frac{\pi\rho}{4} b_1 d_1^2 (n + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2) = \frac{\pi\rho}{4} b_1 d_1^2 \left( n + u_1^2 + u_2^2 + \dots + \frac{U_\Sigma^2}{u_1^2 u_2^2 \dots u_{n-1}^2} \right). \quad (6)$$

Выражение (6) представим в безразмерном (относительном) виде

$$\overline{M}_\Sigma = \frac{M_\Sigma}{C_M} = n + u_1^2 + u_2^2 + \dots + \frac{U_\Sigma^2}{u_1^2 u_2^2 \dots u_{n-1}^2}, \quad (7)$$

где  $C_M = \frac{\pi\rho}{4} b_1 d_1^2$ .

Итак, при заданных параметрах  $n$ ,  $U_\Sigma$ ,  $\rho$ ,  $b_1$  и  $d_1$  минимум функции (7) зависит от распределения суммарного передаточного отношения проектируемого механизма по его ступеням.

Оптимальные значения передаточных отношений ступеней определяют из решения следующей системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \overline{M}_\Sigma}{\partial u_j} &= 0, \quad j = 1, n-1; \\ u_n &= \frac{U_\Sigma}{\prod_{j=1}^{n-1} u_j}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В системе (8)  $n-1$  уравнений имеют вид

$$u_j - \frac{U_\Sigma^2}{u_1^2 u_2^2 \dots u_{j-1}^2 u_{j+1}^2 \dots u_{n-1}^2} = 0, \quad j = 1, n-1. \quad (9)$$

С математической точки зрения система уравнений (8) – нелинейная система алгебраических уравнений  $n$ -го порядка. Решение такой системы кроме комплексных корней имеет также действительные корни.

В области действительных чисел решение системы (8) имеет вид

$$u_{opt1} = u_{opt2} = \dots = u_{optn} = \sqrt[n]{U_\Sigma}. \quad (10)$$

Так как в проектируемом механизме использованы внешние зубчатые зацеп-

ления, то решения (10) следует брать со знаком минус.

Параметры  $b_1$  и  $d_1$  выбирают из условий контактной и изгибной прочности. Например, для контактной прочности получим [1]

$$b_1 d_1^2 \geq \frac{0,77 T_{\text{вых}} (K_{H\beta} K_{Hv})_1 (Z_E)_1}{U_{\Sigma} (\cos^2 \alpha \cdot \text{tg } \alpha_w)_1 (\sigma_{HP})_1^2} \cdot \frac{u_1}{u_1 - 2}, \quad (11)$$

где  $U_{\Sigma}$ ,  $T_{\text{вых}}$  – суммарное передаточное отношение и вращающий момент на выходе механизма;  $K_{H\beta}$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по длине контактной линии при расчете на контакт;  $K_{Hv}$  – коэффициент, учитывающий динамическую нагрузку, возникающую в зацеплении до зоны резонанса при расчете на контакт;  $Z_E$  – коэффициент, учитывающий механические свойства материалов сопряженных зубчатых колес;  $\alpha$ ,  $\alpha_w$  – угол профиля зуба и угол зацепления;  $\sigma_{HP}$  – допустимое напряжение на контакт.

В формуле (11) нижний индекс 1 относится к зубчатым колесам первой ступени механизма.

Заметим, что условия для материалов, модулей, ширин и диаметров зубчатых колес проектируемого механизма, которые были нами приняты выше, обычно принимают для так называемых кинематических механизмов.

В качестве примера оптимального проектирования рассмотрим двухступенчатый кратный рядный механизм с суммарным передаточным отношением  $U_{\Sigma} = 31$ . Выражение для относительной массы механизма запишем в виде

$$\bar{M}_{\Sigma}(u_1) = 2 + u_1^2 + \frac{U_{\Sigma}^2}{u_1^2}. \quad (12)$$

Составим систему вида (8)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{M}_{\Sigma}}{\partial u_1} = u_1 - \frac{U_{\Sigma}^2}{u_1^3} = 0; \\ u_1 u_2 = U_{\Sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Система (13) имеет 4 решения:  $u_1 = -\sqrt{31}, u_2 = -\sqrt{31}$ ,  $u_1 = \sqrt{31}, u_2 = \sqrt{31}$ ,  $u_1 = -\sqrt{31}i, u_2 = \sqrt{31}i$ ,  $u_1 = \sqrt{31}i, u_2 = -\sqrt{31}i$ .

Выбираем первое решение:  $u_{opt1} = -\sqrt{31}, u_{opt2} = -\sqrt{31}$ .

Для первого зубчатого колеса принимаем число зубьев  $z_1=18$ . Тогда че-

рез найденное значение передаточного отношения  $u_{opt1} = -\sqrt{31} = -5,568$ , находим  $z_2=100$ .

Из условий получения выражения для относительной массы вида (7) имеем  $z_3=z_1$  и соответственно  $z_4=z_2$ .

На рисунке 2а приведен график зависимости функции  $\bar{M}_{\Sigma}(u_1)$  от значения передаточного отношения первой ступени  $u_1$ . Как видно из этого графика, данная функция имеет явный минимум, который достигается при значении  $u_1=5,568$ .

Графическая зависимость функции  $\partial \bar{M}_{\Sigma} / \partial u_1$  от значения передаточного отношения первой ступени  $u_1$  показана на рисунке 2б. График этой функции пересекает ось абсцисс в точке  $u_1=5,568$ . Другими словами эта точка является действительным корнем уравнения  $\partial \bar{M}_{\Sigma} / \partial u_1 = 0$ .

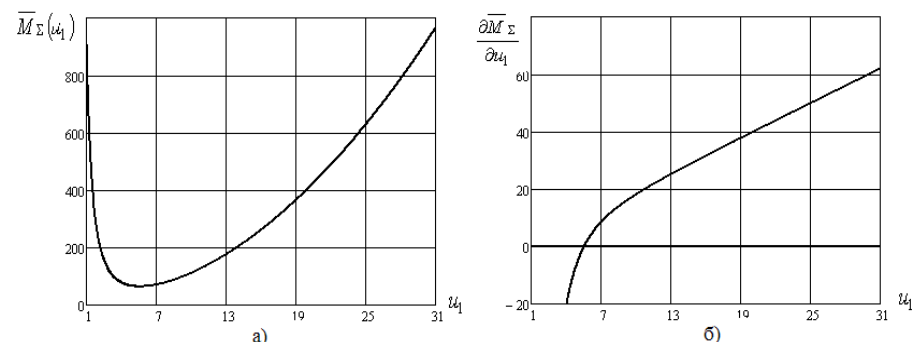


Рисунок 2 – Графическое решение для минимизации безразмерной массы двухступенчатого кратного рядного механизма с внешними зацеплениями. Вариант 1

Для оптимальных передаточных отношений первой и второй ступеней значение безразмерной массы составило  $\bar{M}_{\Sigma}(u_{opt1}, u_{opt2}) = 64$ . С учетом реализованных значений передаточных отношений этих ступеней получим  $\bar{M}_{\Sigma}(u_1 = 100/18, u_2 = 100/18) = 64,001$ .

Алгоритм решения оптимизационной задачи, решение которой приведено выше, включает следующие основные этапы:

- формирование целевой функции оптимизации как функции передаточных отношений отдельных ступеней проектируемого механизма;
- составление системы нелинейных алгебраических уравнений вида (8);
- решение составленной системы уравнений;
- нахождение из условий прочности приемлемых значений параметров  $b_1$  и  $d_1$ ;
- определение чисел зубьев с учетом принятых ограничений на конструкцию механизма и полученных значений требуемых передаточных отно-

шений его отдельных ступеней;

е) проверка полученных решений на соответствие требуемой точности реализации суммарного передаточного отношения проектируемого механизма. Если проверка показала неудовлетворительный результат, то надо вернуться к этапу д) и продолжить вычисления или вернуться к этапу в) и продолжить вычисления.

Особенность рассмотренного алгоритма состоит в том, что целевая функция принимается как непрерывная функция действительных аргументов. При этом целевая функция может быть разрывной. Также предполагается, что существуют как минимум первые частные производные этой функции. Для большинства задач оптимального проектирования такие допущения имеют место. Однако, требуемые передаточные отношения приходится реализовывать посредством выбора подходящих значений чисел зубьев колес ступеней проектируемого механизма. Но эти числа образуют дискретное множество целых чисел. Поэтому требуемые передаточные отношения, которые получают из решения системы уравнений вида (8), реализовывают с ошибкой. Так как решение задачи оптимального проектирования заканчивается после выбора чисел зубьев колес проектируемого механизма, то интерес представляет собой другой алгоритм, который ориентирован сразу на нахождение требуемых чисел зубьев. Продемонстрируем это на нашем примере, который мы рассмотрели выше.

Выражение для безразмерной массы двухступенчатого кратного рядного механизма (12) при заданном значении  $z_1$  можно представить в следующем виде

$$\bar{M}_\Sigma(z_2) = 2 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 + \frac{U_\Sigma^2}{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2}. \quad (14)$$

Если принять условия  $z_1=z_3=18$  и  $z_2=z_4$ , то имеем

$$\bar{M}_\Sigma(z_2) = 2 + \left(\frac{z_2}{18}\right)^2 + \frac{18^2 U_\Sigma^2}{(z_2)^2}. \quad (15)$$

Составим систему вида (8)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{M}_\Sigma}{\partial z_2} = \frac{z_2}{162} - \frac{648 U_\Sigma^2}{z_2^3} = 0 \\ z_2 z_4 = 324 U_\Sigma \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Система (13) имеет 4 решения:  $z_2 = -18\sqrt{31}, z_4 = -18\sqrt{31}, z_2 = 18\sqrt{31}, z_4 = 18\sqrt{31}, z_2 = -18\sqrt{31}i, z_4 = 18\sqrt{31}i, z_2 = 18\sqrt{31}i, z_4 = -18\sqrt{31}i$ .

Выбираем второе решение:  $z_2 = 18\sqrt{31}, z_4 = 18\sqrt{31}$ . После округления до ближайшего целого числа получим  $z_{opt2} = 100, z_{opt4} = 100$ .

Итак, мы получили решение, которое нами было получено выше.

В случае принятия условий  $z_1=z_3=17$  и  $z_2=z_4$ , получим  $z_{opt2} = 95, z_{opt4} = 95$ . Для передаточных отношений имеем  $u_1=95/17=5,588$  и  $u_2=95/17=5,588$ . Ошибка в реализации требуемых передаточных отношений не превысила 0,4%.

На рисунке 3а приведен график зависимости функции  $\bar{M}_\Sigma(z_2)$  от значения числа зубьев колеса первой ступени  $z_2$ . Как видно из этого графика данная функция имеет явный минимум, который достигается при значении  $z_2=100$ .

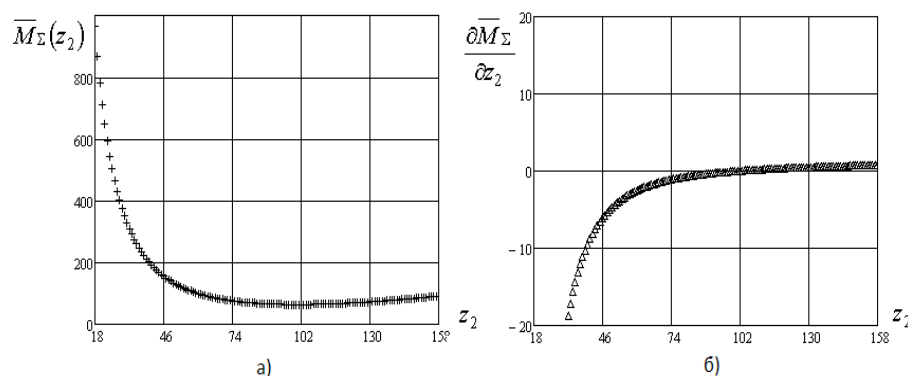


Рисунок 3 – Графическое решение для минимизации безразмерной массы двухступенчатого кратного рядного механизма с внешними зацеплениями. Вариант 2

Графическая зависимость функции  $\partial \bar{M}_\Sigma / \partial z_2$  от значения числа зубьев колеса первой ступени  $z_2$  показана на рисунке 3б. График этой функции пересекает ось абсцисс в точке  $z_2=1000$ . Эта точка является действительным корнем уравнения  $\partial \bar{M}_\Sigma / \partial z_2 = 0$ .

Заметим, что на рисунке 3 приведены графики функций дискретного аргумента  $z_2$ .

Сравнение графиков, приведенных на рисунках и 3, показывает, что первые имеют более "четкий" минимум и корень.

Итак, алгоритм, который был продемонстрирован, включает следующие основные шаги (этапы):

- а) формирование целевой функции как функции дискретных аргументов – чисел зубьев зубчатых колес;
- б) составление системы разрешающих уравнений вида (8), но только относительно неизвестных чисел зубьев;
- в) выбор чисел зубьев, которые входят в составленную систему уравне-

ний в виде параметров, от значения которых зависит ее решение;

г) решение составленной системы относительно неизвестных чисел зубьев;

д) нахождение из условий прочности приемлемых значений параметров  $b_1$  и  $d_1$ ;

е) проверка полученных решений на соответствие требуемой точности реализации суммарного передаточного отношения проектируемого механизма. Если проверка показала неудовлетворительный результат, то надо вернуться к этапу в) и продолжить вычисления или вернуться к этапу в) и продолжить вычисления.

В заключении приведем постановку оптимизационной задачи, которая решается относительно чисел зубьев. Безразмерную массу вида (7) записываем в виде

$$\overline{M}_\Sigma = \frac{M_\Sigma}{C_M} = n + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{z_4}{z_3}\right)^2 + \dots + \frac{U_\Sigma^2}{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 \left(\frac{z_4}{z_3}\right)^2 \dots \left(\frac{z_{2n-2}}{z_{2n-3}}\right)^2}. \quad (17)$$

Формируем систему аналогичную системе (8)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \overline{M}_\Sigma}{\partial z_j} &= 0, \quad j = 2, 2n-2; \\ z_{2n} &= \frac{z_{2n-1} U_\Sigma}{\prod_{k=2}^{2n-2} \frac{z_k}{z_{k-1}}} \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

Для решения системы уравнений (18) принимают условия для чисел зубьев  $z_1, z_3, \dots, z_{2n-1}$  соответственно. Например,  $z_1 = z_3 = \dots = z_{2n-1} = 17$ . Выбранное решение данной системы уравнений округляют до целых чисел.

**Выводы.** Оба рассмотренных алгоритма решения задачи оптимального проектирования многоступенчатого зубчатого механизма имеют общее свойство, а именно, получающиеся решения зависят от выбора числа зубьев шестерни первой ступени механизма. Другими словами число зубьев шестерни первой ступени механизма является параметром, от значения которого зависит искомое решение. В задачах минимизации суммарной массы этот параметр желательно выбирать как можно меньшего значения. Если приняты одинаковые условия для чисел зубьев колес, которые являются параметрами (условия, подобные тем, которые были приняты при выводе выражения для безразмерной суммарной массы), то решения, полученные по обоим алгоритмам, совпадают. Второй алгоритм предоставляет решение сразу для искомых

чисел зубьев. Оба алгоритма можно запрограммировать на нахождение квадратов как искомым передаточных отношений ступеней механизма, так и искомым чисел зубьев его зубчатых колес.

**Список литературы:** 1. Проектирование планетарных механизмов, оптимальных по динамическим характеристикам: Учеб. пособие по курсов. и дипл. проектированию / В.А. Ткаченко, В.Т. Абрамов, М.Д. Коровкин. – Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1983. – 110с. 2. Планетарные механизмы (оптимальное проектирование) / В.А. Ткаченко. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2003. – 446с. 3. Пластмассовые зубчатые колеса в механизмах приборов. Расчет и конструирование. Справочное и научное издание / В.Е. Старжинский, Б.П. Тимофеев, Е.В. Шалобаев, А.Т. Кудинов. Под общ. ред. В.Е. Старжинского и Е.В. Шалобаева. – Санкт-Петербург-Гомель: ИММС НАН Б, 1998. – 538с. 4. Истомин С.Н. Проектирование мелкомодульных передач приборов с применением ЭВМ. – М.: Машиностроение, 1985. – 176с., ил. – (Б-ка приборостроителя).

Поступила в редколлегию 06.04.10

УДК 621.833

**В.П. ШИШОВ**, д.т.н., профессор каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля, г. Луганск

**П.Л. НОСКО**, д.т.н., проф., зав. кафедрой машиноведения ВНУ им. В. Даля  
**А.А. МУХОВАТЫЙ**, к.т.н., старший преподаватель каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля

### ВЫСОКОНАГРУЖЕННЫЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Разработана геометрия исходного контура высоконагруженных зубчатых передач, дан сравнительный анализ критериев работоспособности синтезированных, конхоидальных и эвольвентных передач.

Розроблено геометрію вихідного контуру високонавантажених зубчастих передач, дано порівняльний аналіз критеріїв працездатності синтезованих, конхoidalних і евольвентних передач.

The geometry of an initial contour of highly loaded tooth gearings is developed, the comparative analysis of criteria of working capacity synthesised, konhoidal and involute gears is given.

**Постановка задачи.** Зубчатые передачи имеют широкое распространение в механических приводах современных машин. При этом работоспособность и нагрузочная способность зубчатых передач существенно влияют на экономические показатели оборудования. Поэтому решение задачи повышения нагрузочной способности таких передач является актуальной и относится к проблеме многокритериальной оптимизации машиностроительных конструкций [1].