

**В.Н. СТРЕЛЬНИКОВ**, д.т.н., главн. инженер проекта ПАО НКМЗ,  
г. Краматорск

**Г.С. СУКОВ**, к.э.н., ген. директор ПАО НКМЗ

**М.Г. СУКОВ**, зам. начальника цеха ПАО НКМЗ

**Г.А. ЛЕСНЯК**, начальник конструкторского. отд. редукторостроения  
ПАО НКМЗ

**Ю.П. ГАВРИШ**, начальник бюро ОКИР ПАО НКМЗ

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧКИ ГИБКОГО КОЛЕСА КРУПНОЙ ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧИ

Представлена методика составления уравнений напряженно-деформированного состояния оболочки гибкого колеса волновой передачи. Силовые факторы, действующие на выделенный элемент оболочки, сводятся к уравновешенной системе нормальных и касательных напряжений, которые заменяется эквивалентной системой сил и моментов. Напряженно-деформированное состояние оболочки получено в перемещениях и решено методами теории упругости.

Представлено методу складання рівнянь напружено-деформованого стану оболонки гнучкого колеса хвильової передачі. Силкові фактори діючі на виділений елемент оболонки зводяться до врівноваженої системи нормальних і дотичних напружень, які замінюються еквівалентною системою зусиль і моментів. Напружено-деформований стан оболонки отримано в переміщеннях і вирішено методами теорії пружності.

The technique of the equations estimating tensely-deformed condition of a cover of a flexible wheel of wave gear is presented. Power factors covers operating on an allocated element are reduced to the counterbalanced system normal and tangents of pressure which it is replaced with equivalent system of efforts and the moments. The stress-deformed condition of a cover is received in movings and is solved by methods of the theory of elasticity.

Гибкое колесо волновой передачи можно рассматривать как тонкостенную цилиндрическую оболочку. Отношение толщины стенки гибкого колеса к диаметру окружности, делящей стенку колеса пополам, составляет 0,012 (рисунок 1) [1]. Пусть цилиндрическая оболочка с толщиной стенки  $h$  и радиусом срединной поверхности  $a$  закреплена концами в толстые плиты, поворачивающиеся относительно друг друга на некоторый угол. При этом сохраняется расстояние между плитами, равное длине недеформированной оболочки. В процессе поворота плиты не испытывают деформации.

При деформации оболочки точка  $M_0$ , лежащая на ее поверхности, получает перемещение  $\bar{U}$  и переходит в некоторую точку  $M$ , радиус которой равен

$$\bar{r}^* = \bar{r} + \bar{U}; \quad \bar{U} = U\tau_1 + v\tau_2 + \omega\bar{n},$$

где  $U$ ,  $v$ ,  $\omega$  – составляющие вектора перемещения  $\bar{U}$  по осям  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\bar{n}$ .

Выделим элемент оболочки двумя плоскостями, проходящими через ось

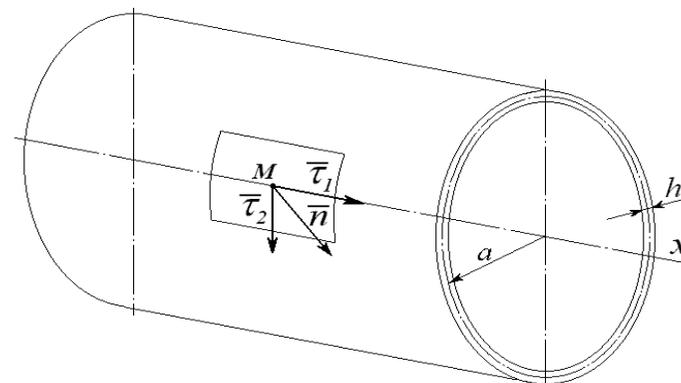


Рисунок 1 – Оболочка гибкого колеса волновой передачи

цилиндра, и двумя плоскостями, перпендикулярными этой оси. Со стороны отброшенной части оболочки на выделенный элемент действуют усилия, которые сводятся к системе нормальных и касательных напряжений, уравновешивающих выделенный элемент [1]. Система нормальных и касательных напряжений, действующих на выделенный элемент, заменяется эквивалентной системой усилий и моментов (рисунок 2)  $N_x$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{x\theta}$ ,  $M_x$ ,  $M_\theta$ ,  $M_{x\theta}$  приложенных по его боковым плоскостям

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \left( \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\omega}{a} \right) \right]; \\ N_\theta &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\omega}{a} + \nu \frac{\partial U}{\partial x} \right]; \\ N_{x\theta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial x} \right); \\ M_x &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ M_\theta &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ M_{x\theta} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu)a} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \theta} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль упругости первого ряда.

Напряженно-деформированное состояние оболочки представляется уравнениями [2]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{P_1(1-\nu^2)}{Eh} &= 0; \\ \frac{1+\nu}{2a} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12a^2} \times \\ \times \left( \frac{d^3 \omega}{dx \partial \theta} + \frac{1}{a^2} \frac{d^3 \omega}{\partial \theta^3} \right) + \frac{h^3}{12a^3} \left( \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) + \frac{P_2(1-\nu)}{Eh} &= 0; \\ \nu \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\omega}{a} \frac{h^2}{12} \left( a \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{2}{a} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right) + \\ + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^4 \omega}{\partial \theta^4} - \frac{h^2}{12} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{a^3} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right) + \frac{aP_3(1-\nu^2)}{Eh} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

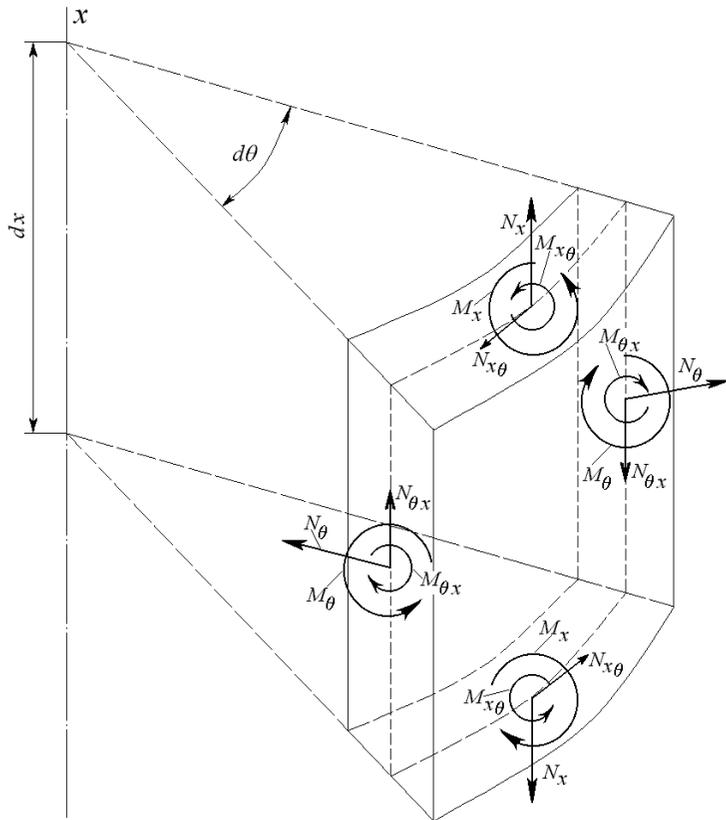


Рисунок 2 – Положительные направления усилий и моментов, действующих на выделенный элемент оболочки со стороны отброшенной части оболочки

В силу равномерности передачи крутящего момента от плит к поперечному сечению оболочки производные перемещений  $U, v, w$  по  $\theta$  равны нулю, а также равны нулю нагрузки  $P_1=P_2=P_3=0$ , с учетом чего уравнения (2) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\nu}{a} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0; \\ \left( \frac{1-\nu}{2} \right) \left( 1 + \frac{h^2}{12a^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0; \\ \nu \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решение второго уравнения системы (3) позволяет определить смещение  $v$

$$v = C_1 x + C_2. \quad (4)$$

Постоянная интегрирования  $C_2$  равна нулю при выборе начала координат на середине длины оболочки и уравнение (4) примет вид

$$v = C_1 x. \quad (5)$$

Поворот образующей цилиндрической оболочки  $\psi$  связан с углом поворота конечного сечения  $\varphi$  следующим образом (рисунок 3)

$$\psi = \frac{2a\varphi}{1} = a \cdot \varphi_a.$$

Постоянная интегрирования  $C_1$  в уравнении (5) определяется с учетом связи угла поворота образующей цилиндра со смещением точки, лежащей на образующей  $v$  (рисунок 4)

$$C_1 = \frac{\partial v}{\partial x} = \psi. \quad (6)$$

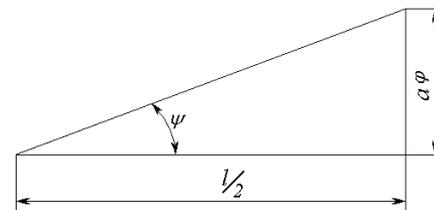


Рисунок 3 – Связь углов поворота образующей цилиндра и конечного сечения оболочки

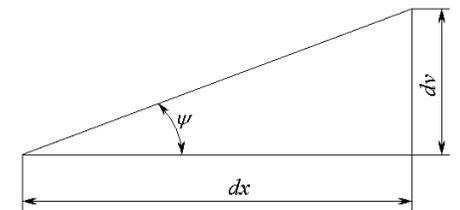


Рисунок 4 – Зависимость угловых и линейных перемещений образующей цилиндра

В третье уравнение системы (1) подставим значения (6)  $\partial U/\partial \theta = 0$ , последнее указывает на независимость смещений от угла  $\theta$

$$N_{x_\theta} = G \cdot h \cdot C_1. \quad (7)$$

Усилие  $N_{x_\theta}$  является результирующим касательных напряжений  $\tau$  боковой плоскости выделенного элемента единичной длины

$$N_{x_\theta} = \tau \cdot h. \quad (8)$$

Совместным решением (7) и (8) определяется постоянная интегрирования  $C_1$

$$C_1 = \frac{\tau}{G}. \quad (9)$$

Смещение  $v$  определяется подстановкой значения постоянной интегрирования  $C_1$  (9) в (5)

$$v = \frac{\tau \cdot x}{G}.$$

Величина крутящего момента, приложенного к оболочке

$$M_{кр} = 2\pi \cdot a^2 h \tau$$

вызывает касательные напряжения

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2\pi \cdot a^2 \cdot h} = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad (10)$$

где  $W_p$  – момент сопротивления при кручении.

Используя выражения (6), (9) и (10), можно установить угловое смещение оболочки

$$\psi = \frac{M_{кр}}{W_p \cdot G}. \quad (11)$$

Из условия равенства перемещений  $\psi x = a\varphi$  и с учетом выражения (11), определяется угол относительного смещения нормальных сечений оболочки  $\varphi$

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot x}{W_p \cdot G \cdot a} = \frac{M_{кр} \cdot x}{G \cdot I_p},$$

где  $I_p = 2\pi a^3 h$  – полярный момент инерции оболочки;  $G = E/2(1+\nu)$  – мо-

дуль упругости при сдвиге.

Из шестого уравнения системы (1) и с учетом зависимостей (6), (9), (10) и равенства  $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \theta} = 0$  определяется момент  $M_{x_\theta}$ , действующий на выделенный элемент оболочки

$$M_{x_\theta} = \frac{h^2}{24\pi \cdot a^3} M_{кр}. \quad (12)$$

Момент  $M_{x_\theta}$  приложен к сечению оболочки единичной длины. Полный момент  $\sum M_{x_\theta}$ , действующий по всему нормальному сечению оболочки

$$\sum M_{x_\theta} = \frac{h^2}{24\pi \cdot a^3} M_{кр}.$$

При кручении оболочки с зашпеленными концами (рисунок 5) возникают растягивающие усилия, направленные по образующей цилиндра. Установим зависимость между крутящим моментом, действующим на оболочку  $M_{кр}$ , и величиной растягивающих напряжений, направленных вдоль образующей цилиндра.

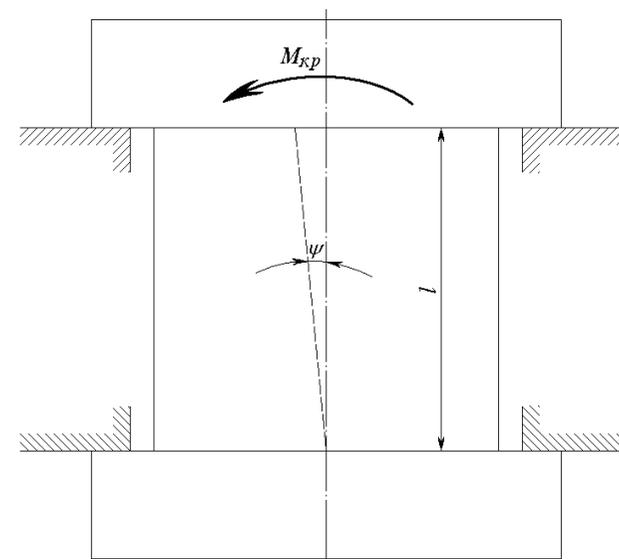


Рисунок 5 – Схема нагрузки оболочки гибкого колеса волновой передачи

Из соотношения  $\psi \cdot l = \alpha \cdot \varphi$  определяется угол закручивания  $\psi$

$$\psi = \alpha \cdot \varphi_0,$$

где  $\varphi_0 = \varphi/l$  – угол закручивания на единицу длины оболочки.

Растяжение волокон оболочки  $\Delta l$  при закручивании на угол  $\psi$

$$\Delta l = l \cdot \varepsilon = \frac{l}{\cos \psi} - l \approx l \frac{\psi^2}{2},$$

где  $\varepsilon$  – относительное удлинение оболочки, определяется из предыдущего равенства

$$\varepsilon = \frac{\psi^2}{2} = \varphi_0^2 \frac{a^2}{2}.$$

В соответствии с законом Гука находим растягивающие напряжения в поперечных сечениях оболочки

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \varphi_0^2 \frac{a^2}{2}. \quad (13)$$

Угол закручивания, приходящийся на единицу длины оболочки

$$\varphi_0 = \frac{M_{кр}}{G I_p} = \frac{(1+\nu)}{E \cdot \pi \cdot a^3 \cdot h} M_{кр}. \quad (14)$$

Подставляя значения  $\varphi_0$  из предыдущего выражения (14) в уравнение (13), получим

$$\sigma = M_{кр} \frac{(1+\nu)^2}{\pi^2 \cdot E \cdot h^2 \cdot a^4}. \quad (15)$$

При достижении касательных напряжений  $\tau$  максимально допустимых значений  $[\tau]$  записываем выражение допустимого крутящего момента  $[M_{кр}]$  приложенного к оболочке

$$[M_{кр}] = 2\pi \cdot a^2 h [\tau]. \quad (16)$$

В соответствии с выражениями (15) и (16) получим формулу определения нормальных напряжений

$$\sigma = \frac{4(1+\nu)^2}{E} [\tau]. \quad (17)$$

Из соотношения (17) определяем  $\sigma = 0,32[\tau]$ .

Растягивающие напряжения, возникающие в оболочке, направленные вдоль образующей цилиндра, слишком малы, и их можно не учитывать.

Диски генератора волн, гибкое и жесткое зубчатые колеса образуют узлы, подвергающиеся наиболее интенсивному силовому воздействию в процессе работы волновой зубчатой передачи.

Крутящий момент формируется в результате деформации зубчатого венца гибкого колеса при контакте с дисками генератора волн. Благодаря этому осуществляется зацепление зубчатого венца гибкого колеса с неподвижным зубчатым колесом на участке, имеющем значительную протяженность. Возникающие усилия воспринимаются дисками генератора волн и гибким колесом. Величина этих усилий определяется крутящим моментом на выходном валу волновой зубчатой передачи. Усилия в зацеплении являются внешней нагрузкой для дисков генератора волн и гибкого колеса. Под их воздействием в дисках генератора волн и элементах гибкого колеса возникают напряжения.

Интенсивность распределения касательных усилий, приложенных к зубчатому венцу гибкого колеса, аппроксимируем параболической зависимостью (рисунок 6)

$$q_t = q_{t \max} \left( 1 - \frac{\theta^2}{\theta^{*2}} \right),$$

где  $\theta^*$  – половина центрального угла, проведенного к крайним точкам линии зацепления;  $\theta$  – текущий угол, отсчитываемый от большой оси генератора волн;  $q_{t \max}$  – максимальная интенсивность нагрузки.

Максимальная интенсивность касательной нагрузки выражается через крутящий момент  $M_2$

$$q_{t \max} = \frac{3M_2}{8a_1^2 \cdot \theta^*},$$

где  $a_1$  – радиус начальной окружности гибкого колеса.

Венец зубчатого колеса воспринимает радиальную нагрузку, распределенную по параболическому закону. Интенсивность радиальной нагрузки

$$q_r = q_{R_2} \left( 1 - \frac{\theta^2}{\theta^{*2}} \right), \quad (18)$$

где  $q_{R_2}$  – максимальная величина радиальной нагрузки.

Величина максимальной нагрузки зависит от угла зацепления  $\alpha$  и определяется по формуле

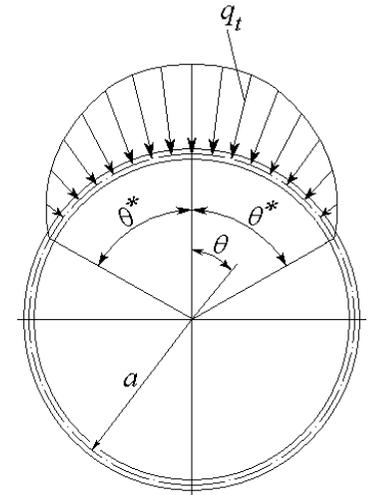


Рисунок 6 – Эпюра распределения касательных усилий в зацеплении зубчатого венца гибкого колеса

$$q_{R2} = \frac{3M_2 \operatorname{tg} \alpha}{8a_1^2 \cdot \theta^*}. \quad (19)$$

Вследствие малой изгибной жесткости зубчатого венца можно принять, что радиальная нагрузка определяется по формулам (18), (19) и полностью передается на цилиндрическую поверхность внешнего обода дисков генератора волн.

Крутящий момент, возникший в зацеплении, передается на шлицевый венец посредством цилиндрической оболочки, в которой выравнивается распределение касательных усилий от крутящего момента. Деформация зубчатого венца диска генератора воли создает в оболочке краевой эффект и дополнительное поле напряжений. Уровень интенсивности последних не должен превышать уровня интенсивности касательных напряжений при передаче крутящего момента.

Для обеспечения прочности и оптимизации конструктивных форм необходим уточненный расчет напряженного состояния основных деталей волновой зубчатой передачи.

Методики уточненных расчетов были получены из решения уравнений теории упругости. Разработанные методики позволили выполнить на прочностные расчеты гибких колес крупных волновых зубчатых редукторов, а также рассчитать ряд вариантов, связанных с оптимизацией параметров конструкции.

В оболочке выделим поле напряжений, связанное с передачей крутящего момента, и поле напряжений от краевого эффекта. Поле напряжений от крутящего момента определяется через компоненты смещения срединной поверхности

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= 0; \\ V_0 &= \frac{(1+\nu)M_2 \cdot X}{\pi(1+3\xi^2)a \cdot E \cdot h}; \\ W_0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где  $U_0, V_0, W_0$  – соответственно осевые, окружные и радиальные смещения точек, срединной поверхности оболочек;  $a$  – радиус срединной поверхности;  $h$  – толщина оболочки;  $x$  – осевая координата, отсчитанная от торца оболочки, сопряженного с зубчатым венцом. Величина  $\xi^2$  вычисляется по формуле  $\xi^2 = h^2/12a^2$ .

Смещениям (20) соответствуют напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_0} &= 0; \\ \sigma_{\theta_0} &= 0; \\ \tau_0 &= \frac{M_2 \left(1 - \frac{Z}{a}\right)}{2\pi \cdot a^2 \cdot h(1+3\xi^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где  $Z$  – нормальная координата, отсчитанная от срединной поверхности оболочки.

Решениям (21) соответствуют краевые условия для свободных торцов, нагруженных касательной нагрузкой, распределенной по тому же закону, что и касательные напряжения в третьей формуле системы (25). Эти напряжения невелики. Так для волновых редукторов привода перефутеровки рудоразмольных мельниц, где  $a=548,3\text{мм}$ ,  $h=13,5\text{мм}$ ,  $M_2=500\text{кН}\cdot\text{м}$ , максимальные касательные напряжения, рассчитанные по третьей формуле системы уравнений (25), получились равными 20МПа.

#### Выводы:

1. Разработана методика численного определения силовых факторов действующих на гибкое колесо волновой передачи с дисковым генератором волн.
2. Выполнен анализ напряженно-деформированного состояния гибкого колеса, в результате которого определены нормальные и касательные напряжения, линейные и угловые деформации в соответствии с силовыми и конструктивными параметрами.

**Список литературы:** 1. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Издательство "Наука", 1971. – 808с. 2. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488с.

Поступила в редколлегию 16.05.11

УДК 621.833

**В.П. ШИШОВ**, д.т.н., профессор каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля, г. Луганск

**П.Л. НОСКО**, д.т.н., проф., зав. кафедрой машиноведения ВНУ им. В. Даля

**П.Н. ТКАЧ**, к.т.н., доцент каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля

**И.Г. ТКАЧ**, младший научный сотрудник каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля

#### СИНТЕЗ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛУОБКАТНЫХ ПЕРЕДАЧ ПО ГЕОМЕТРО-КИНЕМАТИЧЕСКИМ КРИТЕРИЯМ

Изложена математическая модель и порядок синтеза геометрии зубьев полуобкатных цилиндрических прямозубых передач по заданным значениям геометро-кинематических критериев работоспособности.

Викладено математичну модель та порядок синтезу геометрії зубців напівобкатних циліндричних прямозубих передач за заданими значеннями геометро-кінематичних критеріїв працездатності.