

**В.А. БЕРЕЖНОЙ**, ст. преподаватель каф. ГМКГ НТУ "ХПИ", Харьков;  
**Н.В. МАТЮШЕНКО**, к.т.н., доцент каф. ГМКГ НТУ "ХПИ";  
**А.В. ФЕДЧЕНКО**, к.т.н., доцент каф. ГМКГ НТУ "ХПИ"

**ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЭВОЛЬВЕНТНОГО ПРЯМОЗУБОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ**

Рассматривается динамическая модель для эвольвентной цилиндрической прямозубой передачи. Из системы дифференциальных уравнений динамической системы получены уравнения для определения амплитудно-частотных характеристик зубчатой передачи.

Розглядається динамічна модель для евольвентної циліндричної прямозубої передачі. З системи диференціальних рівнянь динамічної системи отримані рівняння визначення амплітудно-частотних характеристик зубчастої передачі.

A dynamic model is examined for cylindrical spur gears. From the system of differential equalizations of the dynamic system equalizations of determination of gain-frequency characteristics of gearing are got.

**Введение.** Современные механизмы с зубчатыми передачами работают при повышенных скоростях и нагрузках, в связи, с чем возрастает их динамическая напряжённость. Цилиндрическое эвольвентное прямозубое зацепление является характерным источником возникновения колебаний, поэтому процессам возбуждения колебаний в механизмах с прямозубыми передачами и посвящается данное теоретическое исследование [1, 2].

**Постановка задачи.** Цель работы – получить математическую модель динамики одноступенчатой цилиндрической эвольвентной прямозубой передачи на основе уравнений Лагранжа с учетом жесткости зубьев и валов, которая в дальнейшем будет использована для исследования изменения собственных частот системы при воздействии на жесткость зубьев.

**Разработка динамической модели для эвольвентных цилиндрических прямозубых передач.** В общем виде зубчатая передача представляет собой четырёхмассовую динамическую модель (см. рисунок). Здесь:  $I_1$  – момент инерции *двигателя*;  $I_4$  – момент инерции *исполнительного механизма*;  $I_u$  и  $I_k$  – моменты инерции *шестерни* и *колеса*;  $C_1$  и  $C_4$  – крутильные жесткости соединительных валов;  $c_{ш}^2$  и  $c_{к}^2$  – жесткости зубьев шестерни и колеса;  $C_3$  – жесткость зацепления, где  $C_3=c_{ш}^2+c_{к}^2$ .

Геометро-кинематическая модель четырёхмассовой системы определяется четырьмя обобщенными координатами:  $\varphi_1, \varphi_4$  – углы поворота *ведущей* и *ведомой* присоединенных масс;  $\varphi_u, \varphi_k$  – углы поворота *шестерни* и *колеса* соответственно.

Для принятой динамической модели запишем дифференциальные уравнения движения, воспользовавшись уравнением Лагранжа II рода [4]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \tag{1}$$

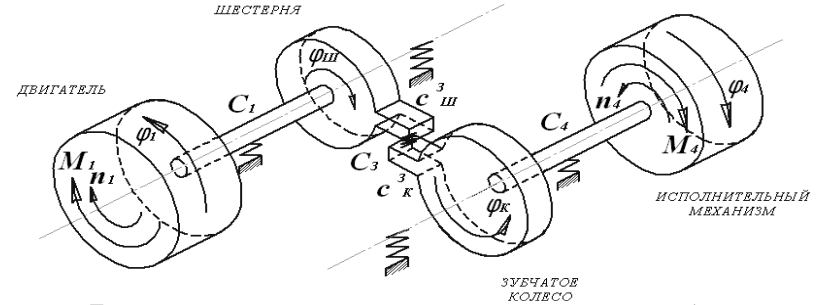


Рисунок – Динамическая модель цилиндрического эвольвентного прямозубого зацепления

где  $T$  – кинетическая энергия системы;  $\Pi$  – потенциальная энергия системы;  $Q_i$  – обобщенная сила, соответствующая  $i$ -й обобщенной координате;  $q_i$  –  $i$ -я обобщенная координата;  $\dot{q}_i$  – скорость  $i$ -той обобщенной координаты.

Запишем кинетическую энергию исходной системы

$$2T = I_1 \dot{\varphi}_1^2 + I_u \dot{\varphi}_u^2 + I_k \dot{\varphi}_k^2 + I_4 \dot{\varphi}_4^2. \tag{2}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) &= I_1 \ddot{\varphi}_1; & \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= 0; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} \right) &= I_4 \ddot{\varphi}_4; & \frac{\partial T}{\partial \varphi_4} &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_u} \right) &= I_u \ddot{\varphi}_u; & \frac{\partial T}{\partial \varphi_u} &= 0; & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) &= I_k \ddot{\varphi}_k; & \frac{\partial T}{\partial \varphi_k} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Потенциальная энергия системы:

$$2\Pi = C_1(\varphi_1 - \varphi_u)^2 + C_3(\varphi_u R_u - \varphi_k R_k)^2 + C_4(\varphi_k - \varphi_4)^2. \tag{4}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} &= +C_1(\varphi_1 - \varphi_u); & \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_u} &= -C_1(\varphi_1 - \varphi_u) + C_3 R_u (\varphi_u R_u - \varphi_k R_k); \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_4} &= -C_4(\varphi_k - \varphi_4); & \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_k} &= -C_3 R_k (\varphi_u R_u - \varphi_k R_k) + C_4(\varphi_k - \varphi_4). \end{aligned} \tag{5}$$

Обобщенные силы найдены как частные производные по обобщенным координатам из выражения для виртуальной работы,

$$A = -\varphi_1 M_1 + \varphi_4 M_4. \tag{6}$$

Тогда

$$Q_{\varphi_1} = \frac{\partial A_{\varphi_1}}{\partial \varphi_1} = -M_1; \quad Q_{\varphi_4} = \frac{\partial A_{\varphi_4}}{\partial \varphi_4} = +M_4. \tag{7}$$

Воспользовавшись уравнением Лагранжа, запишем дифференциальные уравнения движения приведенной системы:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + C_1(\varphi_1 - \varphi_{uu}) = -M_1; \\ I_{uu} \ddot{\varphi}_{uu} - C_1(\varphi_1 - \varphi_{uu}) + C_3 R_{uu}(\varphi_{uu} R_{uu} - \varphi_{\kappa} R_{\kappa}) = 0; \\ I_{\kappa} \ddot{\varphi}_{\kappa} - C_3 R_{\kappa}(\varphi_{uu} R_{uu} - \varphi_{\kappa} R_{\kappa}) + C_4(\varphi_{\kappa} - \varphi_4) = 0; \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 - C_4(\varphi_{\kappa} - \varphi_4) = +M_4. \end{cases} \quad (8)$$

Полученная система дифференциальных уравнений второго порядка (8) описывает вынужденные колебания рассмотренной эквивалентной динамической модели зубчатой передачи и позволяет исследовать влияние на колебательный процесс основных геометрических, кинематических и динамических параметров линейной модели [5].

Решение дифференциальной системы ищем в виде

$$\begin{cases} \varphi_1 = A_1 \cos \omega t; & \varphi_{\kappa} = A_3 \cos \omega t; \\ \varphi_{uu} = A_2 \cos \omega t; & \varphi_4 = A_4 \cos \omega t. \end{cases} \quad (9)$$

Свободные колебания соответствуют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} -A_1 I_1 \omega^2 + A_1 c_1 - A_2 c_1 = 0; \\ -A_2 I_2 \omega^2 - A_1 c_1 + A_2(c_1 + c_3 R_2^2) + A_3 c_3 R_2 R_3 = 0; \\ -A_3 I_3 \omega^2 + A_2 c_3 R_2 R_3 + A_3(c_4 + c_3 R_3^2) - A_4 c_4 = 0; \\ -A_4 I_4 \omega^2 - A_3 c_4 + A_4 c_4 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

или

$$\begin{pmatrix} c_1 - I_1 \omega^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 \omega^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 \omega^2 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 - I_4 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (11)$$

Следовательно, определитель (12) равен нулю, т.е.

$$A = \begin{vmatrix} c_1 - I_1 \omega^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 \omega^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 \omega^2 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 - I_4 \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

В результате раскрытия данного определителя, получается частотное уравнение, корни которого соответствуют главным частотам свободных колебаний системы, совершающей крутильные колебания.

Для построения АЧХ нужно знать закон возмущений  $M_1$  и  $M_4$ . Если принять,  $p$  – частота возмущения, то решение ищут в виде:

$$\begin{cases} M_1 = B_1 \cos pt; \\ M_4 = B_4 \cos pt, \end{cases} \quad (13) \quad \begin{cases} \varphi_1 = A_1 \cos pt; & \varphi_{\kappa} = A_3 \cos pt; \\ \varphi_{uu} = A_2 \cos pt; & \varphi_4 = A_4 \cos pt. \end{cases} \quad (14)$$

Подставив (7) и (8) в (1), получим

$$\begin{pmatrix} c_1 - I_1 p^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \\ -M_4 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

$$B_1 = \begin{vmatrix} M_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & -c_4 \\ -M_4 & 0 & -c_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} c_1 - I_1 p^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{vmatrix}$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} c_1 - I_1 p^2 & M_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & -c_4 \\ 0 & -M_4 & -c_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} c_1 - I_1 p^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{vmatrix}$$

$$B_3 = \begin{vmatrix} c_1 - I_1 p^2 & -c_1 & M_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & 0 & -c_4 \\ 0 & 0 & -M_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} c_1 - I_1 p^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{vmatrix}$$

$$B_4 = \begin{vmatrix} c_1 - I_1 p^2 & -c_1 & 0 & M_1 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & 0 \\ 0 & 0 & -c_4 & -M_4 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} c_1 - I_1 p^2 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 R_2^2 - I_2 p^2 & c_3 R_2 R_3 & 0 \\ 0 & c_3 R_2 R_3 & c_4 + c_3 R_3^2 - I_3 p^2 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 - I_4 p^2 \end{vmatrix} \quad (16)$$

В результате решения устанавливают функции амплитуды вынужденных колебаний  $B_1, B_1, B_2, B_3, B_4$  от частоты возмущения  $p$  и строят соответствующие АЧХ.

**Выводы.** Данная динамическая модель позволяет исследовать колебательные процессы в цилиндрической эвольвентной прямозубой передаче.

**Список литературы:** 1. *Абрамов Б.М.* Колебания прямозубых зубчатых колёс. – Харьков: ХГУ, 1968. – 175с. 2. *Петрусевич А.И.* Динамические нагрузки в зубчатых передачах с прямозубыми колёсами. – М.: АН СССР, 1956. – 134с. 3. *Кириченко А.Ф., Воронцова Д.В., Бережной В.А.* Геометро-кинематическая модель динамики прямозубых эвольвентных передач с учётом модификации зубьев // Вестник науки и техники: Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт", ТОВ "Харьковский дом науки и техники" – Харьков: ТОВ "ХДНТ", 2006. – Вып.1-2(24-25). – С.11-17. 4. *Бережной В.А.* О выборе расчётной динамической модели для эвольвентных цилиндрических прямозубых передач // Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут". – Харків: НТУ "ХПІ", 2010. – Вип.27. – С.44-48.

*Поступила в редколлегию 30.04.12*

УДК 621. 833

**М. БОШАНСКИ**, к.т.н., проф., институт транспортной техники и инженерного проектирования факультета машиностроения Словацкого технического университета, Братислава, Словакия;  
**А. ВАНЯ**, к.т.н., институт транспортной техники и инженерного проектирования факультета машиностроения Словацкого технического университета;  
**М. ГУДАКОВА**, к.т.н., доц., институт материаловедения факультета наук о материалах и технологии Словацкого технического университета;  
**В. МАЛЫ**, к.т.н., кафедра проектирования машин технического факультета Словацкого сельскохозяйственного университета в Нитре, Словакия

### **ТВЕРДЫЕ ПОКРЫТИЯ КАК ВОЗМОЖНОСТЬ ПОВЫШЕНИЯ НАГРУЗОЧНОЙ СПОСОБНОСТИ ВЫПУКЛО-ВОГНУТЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С БИО-МАСЛЯНОЙ СМАЗКОЙ**

Повышение нагрузочной способности и срока службы зубчатых передач является проблемой, решение которой в настоящее время значительно определяют вопросы, связанные не только с требованиями использовать новые технологии и материалы и повышать их эффективность, но и с нагрузкой на окружающую среду. В статье рассматриваются возможности применения тонких твердых покрытий в зубчатых передачах, работающих во взаимодействии с органическими смазками. Статья в основном направлена на возможности использовать покрытия материалов, подходящих для производства зубчатых колес, и на обсуждение результатов scratch-тестов пленок, нанесенных на выбранные материалы 12061, 14220, 15340 и 19091.

Підвищення навантажувальної здатності і терміну служби зубчастих передач є проблемою, рішення якої в наш час значно визначають питання пов'язані не тільки з вимогами використовувати нові технології і матеріали та підвищувати їхню ефективність, але і з навантаженням на середовище. В статті розглядаються можливості використання тонких твердих покриттів в зубчастих передачах, що працюють у взаємодії з органічними мастилами. Стаття у основному направлена на можливості використання покриттів матеріалів, що підходять для виробництва зубчастих коліс, та на обговорення результатів scratch тестів плівок, що нанесені на обрані матеріали 12061, 14220, 15340 та 19091.