

А.П. ПОПОВ, д.т.н., проф., зав. каф. механики и конструирования машин
НУК им. адм. Макарова, Николаев

О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ РЕШЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Впервые показано, что при очень больших радиусах кривизны R образующие боковых поверхностей зубьев шестерни и установленного соотношения между приведенными радиусами кривизны ρ_w и R в двух взаимно перпендикулярных плоскостях решение пространственной контактной задачи по мере нагружения сопряженной пары зубьев сводится к решению плоской контактной задачи.

Вперше показано, що при дуже великих радіусах кривизни R твірні бічних поверхонь зубів шестерні та встановленого співвідношення між приведеними радіусами кривизни ρ_w і R в двох взаємно перпендикулярних площинах рішення просторової контактної задачі по мірі навантаження спряженої пари зубів зводиться до рішення плоскої контактної задачі.

For the first time it has been shown that with very large radiuses of curvature R of the teeth flank generatrices of the pinion teeth and determined correlations between reduced radius of curvature ρ_w and R in the two interperpendicular planes the solution of spatial contact problem comes to solution of plane contact problem as conjugate pair of teeth is loaded.

Актуальность проблемы. Повышение нагрузочной способности зубчатых передач по контактным напряжениям является актуальной проблемой, успешное решение которой предопределяет существенное повышение эффективности современного редукторостроения. Данная проблема является неразрывной составной частью существующих научных программ и заданий практически во всех отраслях машиностроения, выпускающих зубчатые передачи.

Анализ последних исследований. Наиболее полно новые технические решения и теоретические исследования, направленные на существенное повышение нагрузочной способности зубчатых передач и улучшение их виброакустических характеристик, изложены в [1-7]. Указанные технические решения и исследования базируются на замене линейного контакта точечным контактом на основе их профильной, продольной и трехмерной модификации.

Цель работы. Подтверждение достоверности новой теории контактной прочности применительно к упруго сжатым зубьям с пространственной точечной системой зацепления, изложенной в [4].

Изложение основного материала. В [4] впервые получена зависимость для нахождения максимальных контактных напряжений для сопряженной пары зубьев с начальным (до нагружения) точечным контактом

$$\sigma_{\max} = \frac{3\alpha F_n}{2\pi a^2},$$

где $\alpha=alb$ – коэффициент; a, b – малая и большая полуоси эллиптической площадки контакта, которые при коэффициентах Пуассона $\nu_1=\nu_2=\nu$ и модулях

упругости $E_1 \neq E_2$ имеют вид:

$$a = 1,2023 \sqrt{\frac{\alpha \rho_w F_n}{(\alpha + \nu) E_{\text{пр}}}}; \quad (2) \quad b = 1,2023 \sqrt{\frac{\rho_w F_n}{\alpha^2 (\alpha + \nu) E_{\text{пр}}}}; \quad (3)$$

$\rho_{\text{пр}} = \rho_1 \rho_2 / (\rho_2 \pm \rho_1)$ – приведенный радиус кривизны боковых профилей зубьев шестерни и колеса в полюсе зацепления; знак (+) принимается при внешнем, а знак (–) – при внутреннем зацеплении зубьев; $E_{\text{пр}} = 2E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$ – приведенный модуль упругости материалов.

В уравнении (1) коэффициент α изменяется в пределах $0 < \alpha \leq 1,0$, в отличие от рассмотрения подобных задач в [8-10] и в источниках других авторов, в связи с чем указанное условие целиком и полностью определяет границы общего решения пространственных контактных задач.

Если в уравнениях (2) и (3) принять коэффициент $\alpha=1,0$, то при этом эллиптическая площадка контакта размером πab перейдет в круговую площадку контакта размером πr^2 с радиусом $r=a=b$. В рассматриваемом случае в качестве расчетной будет иметь место модель контакта двух упруго сжатых шаров, применительно к которой выражения (1) и (2), (3) преобразуются к виду:

$$\sigma_{\max} = 0,393 \sqrt{\frac{E_{\text{пр}}^2 F_n}{\rho_w^2}}; \quad (4) \quad r = a = b = \sqrt[3]{\frac{\rho_w F_n}{E_{\text{пр}}}}. \quad (5)$$

Нетрудно заметить, что зависимости (4), (5) целиком и полностью совпадают с таковыми, впервые полученными Герцем [8] применительно к расчетной модели двух упруго сжатых сферических тел в виде шаров.

Определившись с первым условием границ применимости решений пространственных контактных задач, при котором коэффициент $\alpha=1,0$, перейдем к рассмотрению второго условия, при котором коэффициент $\alpha \rightarrow 0$.

Что касается второго, характеризующего границу общего решения пространственных контактных задач, то в этом случае до сих пор не сформировался определенный подход с целью возможного представления и объяснения тех или иных положений рассматриваемого вопроса. Например, до сих пор бытует мнение по поводу того, что линейный контакт является частным случаем точечного контакта [9]. Более того, подавляющее число исследователей в области контактной прочности уверены в том, что границами решений пространственных контактных задач является случай линейного контакта, когда большая полуось эллипса $b \rightarrow \infty$, а эллипс перерождается в узкую полосу контакта шириной $2b_0$, определение которой возможно по формуле Герца, полученной для плоской задачи с начальным линейным касанием тел. По этим соображениям рассматриваемое второе условие [10] является неверным и неприемлемым в силу бездоказательности.

Для нахождения второго условия следует исходить не из несуществующих размеров большой полуоси эллипса $b \rightarrow \infty$, а из реальных и конкретных размеров упруго сжатых тел с начальным точечным касанием. Например, из

[4] очевидно, что коэффициент $\alpha = a/b = \sqrt{\rho_w/R}$, зависящий от радиуса кривизны R образующих боковых поверхностей зубьев шестерни, определяется по формуле $R = b_w^2/8\Delta S$ (рисунок 1), где b_w – длина зубьев; ΔS – параметр продольной модификации зубьев шестерни в торцевых сечениях зубьев. Следовательно, не изменяя длины зубьев b_w , возможно за счет уменьшения параметра ΔS добиться таких величин радиуса R , при котором практически коэффициент $\alpha \rightarrow 0$.

При очень малых значениях коэффициента α сопряженная пара зубьев с начальным точечным касанием будет характеризоваться в процессе нагружения силой F_n двумя моделями контакта. Сначала при действии некоторой силы $F_{n1} < F_n$, будет иметь место модель точечного контакта упругости сжатых зубьев в пределах максимальной величины контактной деформации $W_{max} = b^2/2R \leq \Delta S$. Однако как только осуществится равенство $W_{max} = \Delta S$ (рисунок 1,а), то от указанной модели точечного контакта сопряженная пара зубьев перейдет в стадию решения плоской контактной задачи, в связи с чем взаимодействие зубьев будет осуществляться в пределах узкой полоски деформации шириной $2b_0$ под действием силы $F_{n2} = F_n - F_{n1}$.

При этом максимальная величина контактных напряжений σ_{max} будет определяться суммой максимальных величин контактных напряжений σ_{1max} и σ_{1H} от действия сил соответственно F_{n1} и F_{n2} , характерных для двух указанных стадий нагружения сопряженной пары зубьев, причём сумма напряжений $\sigma_{max} = \sigma_{1max} + \sigma_{1H}$ будет стремиться к величине максимальных контактных напряжений σ_H , определяемых по формуле Герца применительно к плоской линейной задаче. При уменьшении параметра ΔS и неизменной длине зубьев b_w радиус R возрастает, в связи с чем сила F_{n1} и напряжений σ_{1max} будут уменьшаться, а сила F_{n2} и напряжения σ_{1H} начнут возрастать. При очень малых значениях параметра ΔS сила F_{n2} и напряжения σ_{1H} будут характеризоваться величинами, практически совпадающими с величинами силы F_n и напряжений σ_H .

Для подтверждения выдвинутых положений и доводов в пользу второго условия рассмотрим решение задачи, полагая $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ и $E_1 \neq E_2$. Расчетная модель контакта зуба 1 шестерни с криволинейными образующими боковых поверхностей (радиус R) и зуба 2 колеса с прямолинейными образующими его боковых поверхностей до нагружения и после нагружения некоторой силой F_{n1} приведена соответственно на рисунке 1,а и 1,б.

При решении рассматриваемой задачи сначала найдем зависимость силы F_{n1} , под действием которой величина зазора ΔS в торцевом сечении зубьев 1 и

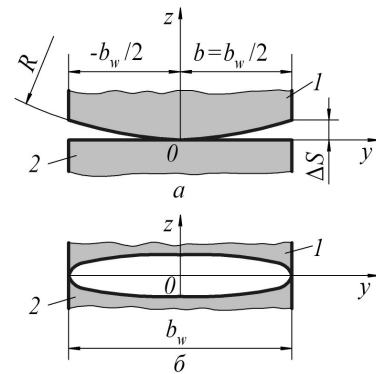


Рисунок 1 – Расчетные модели контакта зубьев в плоскости zOy до нагружения (а) и после нагружения (б)

2 (рисунок 1,а) будет полностью выбрана. Для выбора зазора ΔS необходимо, чтобы величина максимальной контактной деформации $W_{max} = b^2/2R$ была равна величине ΔS , то есть $\Delta S = b^2/2R$, причем большая полуось b эллипса должна быть принята равной $b_w/2$. Тогда, исходя из равенства правых частей выражений $b_w = 2\sqrt{2R\Delta S}$ и (3), то есть

$$b_w = 2,4043 \sqrt{\frac{\rho_w F_{n1}}{\alpha(\alpha + \nu) E_{np}}},$$

найдем, полагая $\alpha^2 = \rho_w/R$, зависимость силы

$$F_{n1} = 1,629 \Delta S \sqrt{R \Delta S} (\alpha + \nu) E_{np}.$$

Если в последнем уравнении заменить параметр ΔS через $b_w^2/8R$, то выражение силы F_{n1} примет вид

$$F_{n1} = 0,072 \frac{b_w^3}{R} (\alpha + \nu) E_{np}. \quad (6)$$

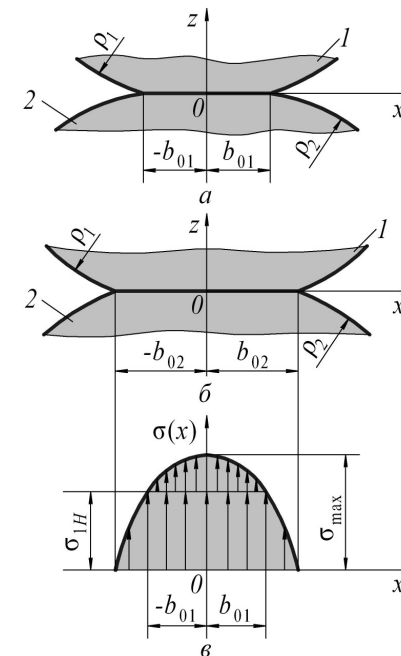


Рисунок 2 – Расчетная модель контакта зубьев при нагружении силой F_{n1} (а), силой F_{n2} (б) и эпюра напряжений (в)

Таким образом, при действии силы F_{n1} , исходя из равенства $W_{max} = \Delta S$, точечный контакт зубьев будет исчерпан, в связи с чем оставшаяся сила $F_{n2} = F_n - F_{n1}$ будет воздействовать на площадку размером πab . В данном случае эллиптическую площадку контакта обусловленную действием силы F_{n1} , заменим прямоугольной площадкой контакта со сторонами $2b_{01}$ и $2b$. Затем, исходя из равенства $4b_{01}b = \pi ab$, получим выражение параметра $b_{01} = \pi a/4$.

При этом в качестве расчетной модели контакта в плоскости zOx имеет место модель контакта двух круговых цилиндров с радиусами ρ_1 и ρ_2 , которые взаимодействуют друг с другом по площадке шириной $2b_{01}$ (рисунок 2,а) и по площадке шириной $2b_{02}$ (рисунок 2,б) при нагружении силой $F_{n2} = F_n - F_{n1}$. Эпюра распределения контактных напряжений в пределах ширины площадки $2b_{02}$ при действии сил F_{n1} и F_{n2} , суммарная величина которых равна заданной силе F_n , приведена на рисунке 2,в.

Функцию распределения деформаций $W(x)$ по ширине $2b_0$ площадки контакта при действии силы F_{n2} в соответствии с рисунком 2,в определим из выражения

$$W(x) = W_2(x) - W_1(x), \quad (7)$$

в котором функции $W_1(x)$ и $W_2(x)$ имеют вид:

$$W_1(x) = \frac{b_{01}^2}{2\rho_w} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_{01}^2}}; \quad (8) \quad W_2(x) = \frac{b_{02}^2}{2\rho_w} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_{02}^2}}. \quad (9)$$

Объединив выражения (7)-(9), найдем в окончательном виде функцию

$$W(x) = \frac{1}{2\rho_w} \left(b_{02} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_{02}^2}} - b_{01} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_{01}^2}} \right). \quad (10)$$

Для решения задачи необходимо иметь зависимость второй функции $W(x)$, равнозначной функции (10). В этом случае, исходя из гипотезы Винклера, которая в пределах упругих деформаций подчиняется закону Гука, запишем выражение второй функции [4]

$$W(x) = A \cdot \omega(x), \quad (11)$$

где $A=2(1-\nu^2)b_{02}/b_w E_{np}$ – коэффициент постели, выраженный в мм²/Н; $\omega(x)$ – функция распределенной по оси x нагрузки, Н/мм.

Используя зависимости (10) и (11), запишем уравнение напряженно – деформированного состояния сопряженной пары зубьев, обусловленное действием силы F_{n2} , а именно:

$$A \int_{-b_{02}}^{b_{02}} \omega(x) dx = AF_{n2} = \frac{2(1-\nu^2)b_{02}}{b_w E_{np}} F_{n2} = \frac{b_{02}^2}{2\rho_w} \int_{-b_{02}}^{b_{02}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_{02}^2}} dx - \frac{b_{01}^2}{2\rho_w} \int_{-b_{01}}^{b_{01}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_{01}^2}} dx = \frac{\pi(b_{02}^3 - b_{01}^3)}{4\rho_w},$$

исходя из которого найдем выражение для определения полуширины площадки контакта b_{02} в трансцендентном виде

$$\frac{b_{02}^3 - b_{01}^3}{b_{02}} = \frac{8(1-\nu^2)\rho_w F_{n2}}{\pi b_w E_{np}}. \quad (12)$$

Так как уравнение (12) решается графоаналитическим способом, то данное уравнение можно записать следующим образом

$$\varphi(b_{02}) = \frac{8(1-\nu^2)\rho_w F_{n2}}{\pi b_w E_{np}}, \quad (13)$$

где $\varphi(b_{02}) = (b_{02}^3 - b_{01}^3)/b_{02}$ – функция.

Выражение максимальных контактных напряжений при действии силы F_{n2} на сопряженную пару зубьев при известных величинах b_{02} и b_{01} имеет вид

$$\sigma_{1H} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{F_n}{2b_{02}b_w} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{F_{n1}}{2b_{01}b_w} = \frac{2}{\pi b_w} \left(\frac{F_n}{b_{02}} - \frac{F_{n1}}{b_{01}} \right). \quad (14)$$

Полная величина максимальных контактных напряжений σ_{max} определяется суммой напряжений σ_{1max} от действия силы F_{n1} по формуле (1) и напряжений σ_{1H} от действия силы F_{n2} по формуле (14), а именно:

$$\sigma_{max} = \sigma_{1max} + \sigma_{1H}. \quad (15)$$

При нахождении напряжений σ_{1max} можно воспользоваться выражением [4]

$$\sigma_{1max} = 0,333 \sqrt{\frac{\alpha(\alpha + \nu)^2 E_{np}^2 F_n}{\rho_w^2}}. \quad (16)$$

Для оценки величин сил F_{n1} и F_{n2} , размеров b_{01} и b_{02} , и также напряжений σ_{1max} , σ_{1H} и σ_{max} выполним, используя формулы (12)-(16), а также формулу Герца для линейного контакта

$$\sigma_{1H} = 0,418 \sqrt{\frac{E_{np} F_{n2}}{\rho_w b_w}},$$

расчет первой ступени прямозубчатой передачи, исходя из $z_1=36$; $z_2=100$; $m=5$ мм; $\alpha_w=20^\circ$; $b_w=215$ мм; $\Delta S=(1; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001) \cdot 10^{-3}$ мм; $F_n=3,93 \cdot 10^4$ Н; $\nu=0,3$; $E_{np}=E_1=E_2=2,1 \cdot 10^5$ МПа.

По общеизвестным формулам находим $\rho_w = m z_1 z_2 \sin \alpha_w / 2(z_1 + z_2) = 27,828$ мм и $R = b_w^2 / 8 \Delta S = (5,778; 11,556; 57,78; 557,8; 5578) \cdot 10^6$ мм при соответствующих значениях параметра ΔS . Зная величины ρ_w и R , из выражения $\alpha = \sqrt{\rho_w / R}$ рассчитываем величины коэффициента $\alpha = (2,1940; 1,5500; 0,6940; 0,2194; 0,0706) \cdot 10^{-3}$. Числовые значения сил F_{n1} и F_{n2} , а так же b_{01} , b_{02} и σ_{1max} , σ_{1H} и σ_{max} приведены в таблице.

Таблица – Результаты расчета

Заданные и определяемые параметры	$\Delta S \cdot 10^3$, мм				
	1,000	0,500	0,100	0,010	0,001
$R \cdot 10^{-6}$, мм	5,778	11,556	57,780	557,800	5778,000
$\alpha \cdot 10^3$	2,1940	1,5500	0,6940	0,2194	0,0706
F_{n1} , Н	7860	3920,0	792,0	78,0	7,8
b_{01} , мм	0,1850	0,1310	0,0586	0,0185	0,0060
b_{02} , мм	0,262	0,258	0,254	0,239	0,237
σ_{1max} , МПа	148,0	104,3	47,2	14,7	4,6
σ_{1H} , МПа	310,511	356,618	416,530	474,652	487,368
$\sigma_{max} = \sigma_{1max} + \sigma_{1H}$, МПа	458,511	460,918	463,730	489,352	491,968

Из таблицы очевидно, что при возрастании радиуса R за счет уменьшения параметра $\Delta S = W_{max}$ сила F_{n1} , соответствующая точечному контакту зубьев

ев, уменьшается, а сила $F_{n2}=F_n-F_{n1}$, характерная для линейного контакта, увеличивается. При этом максимальные контактные напряжения $\sigma_{1\max}$, соответствующие точечному контакту зубьев, снижаются, а напряжения σ_{1H} от действия силы F_{n2} возрастают. Кроме того, суммарные напряжения σ_{\max} увеличиваются и при очень малой величине $\Delta S=0,001 \cdot 10^{-3}$ мм, стремящейся практически к нулю, величина $\sigma_{\max}=487,368$ МПа. Данная величина напряжений практически совпадает с величиной контактных напряжений $\sigma_H=491$ МПа, имеющих место при линейном контакте зубьев и определяемых по известной формуле Герца.

Таким образом, впервые доказано и показано, что при $R \rightarrow \infty$ точечный контакт зубьев перерождается в линейный контакт зубьев, что является вторым условием применимости решений пространственных контактных задач. Определение второго, как и ранее найденного первого условия решения пространственных контактных задач, является дополнительным доказательством достоверности разработанной новой теории контактной прочности упруго сжатых тел [4].

Выводы:

1. Впервые на основе новой теории контактной прочности сформулированы два условия решений пространственных контактных задач.
2. Первое условие предусматривает равенство радиусов кривизны в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, характерное для контакта сферических тел.
3. Второе условие указывает на то, что при величинах радиусов кривизны образующих боковых поверхностей зубьев шестерни или одновременно зубьев шестерни и колеса, стремящихся к бесконечности, расчётная модель точечного контакта зубьев перерождается в расчётную модель линейного контакта зубьев.

Список литературы: 1. Пат. 77304 на винахід. Україна. Зубчаста передача з криволінійними твірними зубів / *О.П. Попов*. – а2004121281; заявл. 14.02.04; опубл. 15.11.06. Бюл. №11. 2. Пат. 77634 на винахід. Україна. Зубчасте зачеплення / *О.П. Попов*. – а20041210280; заявл. 14.02.04; опубл. 15.12.06. Бюл. №12. 3. Пат. 81008 на винахід. Україна. Зубчаста передача Попова О.П. з точковою і двопарною системою зачеплення евольвентних зубів / *О.П. Попов*. – а200507850; заявл. 08.08.05; опубл. 26.11.07. Бюл. №19. 4. *Попов А.П.* Зубчатые механизмы с точечным контактом зубьев / *О.П. Попов*. – Николаев: Изд-во Атолл, 2010. – 774с. 5. *Alexey Popov.* Новая теория контактной прочности упруго сжатых тел / *Popov Alexey*. – Lublin (Poland): Изд-во Motrol, 2010. – С.223-231. 6. *Попов А.П.* Разработка высокоэффективных зубчатых передач на основе новой теории контактной прочности / *А.П. Попов, А.И. Мироненко* // Специализированный информационно-аналитический журнал "Газотурбинные технологии". – М., 2011. – №4(95). – С.32-37. 7. *Попов А.П.* Снижение виброактивности зубчатых передач / *А.П. Попов, Ю.Н. Кипреев* // Сб. трудов XV Междунар. науч.-техн. конф. "Машиностроение и техносфера XXI века". – Донецк, 2008. – Том.3. – С.104-109. 8. Энциклопедический справочник. Инженерные расчёты в машиностроении. – М.: Машгиз, 1948. – 891с. 9. *Ковалёв М.П.* Расчёт высокоточных шарикоподшипников / *М.П. Ковалёв, М.З. Народецкый*. – М.: Машиностроение, 1980. – 375с. 10. *Ковальский Б.С.* Расчёт деталей на местное сжатие / *Б.С. Ковальский*. – Харьков: Изд-во ХВВКИУ, 1967 – 223с.

Поступила в редколлегию 10.04.12