

В.С. ГАПОНОВ, д.т.н., проф., зав. каф. ДМ и ПМ НТУ "ХПИ", Харьков;
А.И. НАУМОВ, инженер каф. ДМ и ПМ НТУ "ХПИ"

**ПАРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРУГОЙ ОПОРЫ
ПОДШИПНИКОВ РОТОРА С УПРАВЛЯЕМЫМ
ИЗМЕНЕНИЕМ КВАЗИНУЛЕВОЙ ЖЕСТКОСТИ**

Обоснована возможность частотной настройки динамической системы упругой опоры сверхскоростных роторов по ее парциальным системам.

Обґрунтовано можливість частотного налаштування динамічної системи пружної опори надшвидкісних роторів по її парціальним системам.

Grounded possibility of the frequency tuning of the dynamic system of resilient support of ultraspeed rotors for to its partial systems.

Введение. Использование пассивных упругих опор с управляемой квазиулевоу жесткостью для высокоскоростных роторов с заданной функцией жесткости в рабочем пространстве кинематико-силовых характеристик может устранить противоречие между статической и динамической жесткостями, если система будет иметь следящие свойства по низкочастотной составляющей реакции в опорах ротора [3].

Анализ последних публикаций. Вопросы эффективности применения упругих опор подшипников с управляемой квазиулевоу жесткостью для высокоскоростных роторов рассмотрены в [1-4].

Цель и постановка задачи. Целью настоящей работы является обоснование возможности частотной настройки динамической системы упругих опор с управляемой квазиулевоу жесткостью для высокоскоростных роторов с заданной функцией жесткости в рабочем пространстве кинематико-силовых характеристик по её парциальным системам.

Основная часть. Рассмотрим уравнения движения системы [1] с учётом предварительной деформации упругого элемента C_{20} , которая может быть использована для получения необходимой конфигурации элементов опоры, соответствующей квазиулевоу жесткости. В этом случае сила корректора (рисунок 1) по линии A, B_1 будет находится в конусе трения, следовательно, массой m_2 не управляет. Управление осуществляется силовым потоком, проходящим по C_{12} .

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + C_{10} x_1 - 2C_{12} (x_2 - x_1) + 2C_k \left(\frac{h_0}{h} - 1 \right) (x_2 - x_1 + b) &= F_1(t); \\ m_2 \ddot{x}_2 + C_{20} x_2 + C_{12} (x_2 - x_1) - C_k \left(\frac{h_0}{h} - 1 \right) (x_2 - x_1 + b) + F_{тр} &= 0. \end{aligned}$$

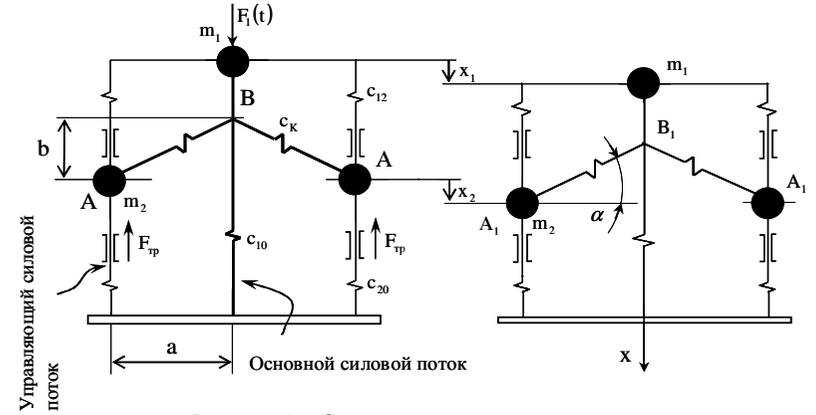


Рисунок 1 – Схема динамической системы

Сила трения $F_{тр} = F_{kn} \cdot f$, где $F_{kn} = F_k \cdot \cos \alpha$; α – угол трения между m_2 и направляющей. Сила в корректоре $F_k = C_r \cdot \Delta h$, где Δh – деформация корректора, C_r – жесткость корректора, $AB \cong h_0$; $A_1 B_1 \cong h$.

$$\Delta h = h_0 - h = h_0 - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 2b(x_2 - x_1) + h_0^2}.$$

Условие самоторможения $F_{тр} \geq F_{kt}$;

$$f \cdot F_k \cdot \cos \alpha \geq F_k \cdot \sin \alpha; \quad \alpha \leq \arctg f; \quad F_{тр} = f \cdot C_k \left(\frac{h_0}{h} - 1 \right) a. \quad (1)$$

Уравнения движения с учетом (1)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + C_{10} x_1 - 2C_{12} (x_2 - x_1) + 2C_k \left(\frac{h_0}{h} - 1 \right) (x_2 - x_1 + b) = F_1(t); \\ m_2 \ddot{x}_2 + C_{20} x_2 + C_{12} (x_2 - x_1) - C_k \left(\frac{h_0}{h} - 1 \right) (x_2 - x_1 + b - fa) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$f = \text{sign}(\dot{x}_2), \quad f = \begin{cases} f & \mapsto \dot{x}_2 < 0 \\ 0 & \mapsto \dot{x}_2 = 0 \\ -f & \mapsto \dot{x}_2 > 0 \end{cases}$$

Уравнения статики соответствуют ($\ddot{x}_1 \rightarrow 0$; $\ddot{x}_2 \rightarrow 0$)

$$\begin{cases} C_{10} x_1 - 2C_{12} (x_2 - x_1) + 2C_k \left(\frac{h_0}{h} - 1 \right) (x_2 - x_1 + b) = F_1; \\ C_{20} x_2 + C_{12} (x_2 - x_1) - C_k \left(\frac{h_0}{h} - 1 \right) (x_2 - x_1 + b - fa) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

$$f = \text{sign}(F_{12}); \quad f = \begin{cases} f & \mapsto F_{12} < 0; \\ f = 0 & \mapsto F_{12} = 0; \\ -f & \mapsto F_{12} > 0. \end{cases}$$

Динамическая система, должна четко разделяться на две подсистемы: основную (силовую) и управляющую. Для этого необходимо, чтобы их парциальные частоты достаточно отличались друг от друга.

Управляющая массой m_2 сила $F_y \cong F_{12} = C_{12}(x_2 - x_1)$. Для её определения рассмотрим равновесие массы m_2 (рисунок 2)

$$F_y - F_{\text{тр}} + F_{\text{к}} - F_{20} = 0; \quad F_y = C_{20}x_2 - C_k \left(\frac{h_0}{h} - 1 \right) (x_2 - x_1 + b - fa).$$

Для получения необходимой несущей способности механизма упругой опоры необходима предварительная деформация упругого элемента C_{20} – силой предварительной затяжки F_{020} .

Работу системы пассивной упругой опоры с управляемой квазиулевым жесткостью можно разбить на этапы:

1) $F_{20} < F_{020}$; $F_{20} < F_{020}$ предполагает $x_2 = 0$ и уравнения статики (3) принимают вид

$$F_1 = C_{10}x_1 + 2C_{12}x_1 + 2C_k \left(\frac{h_0}{\sqrt{x_1^2 - 2bx_1 + h_0^2}} - 1 \right) (b - x_1). \quad (4)$$

Таким образом система уравнений статики вырождается в одно уравнение для рассматриваемого этапа работы механизма.

2) $F_{20} \geq F_{020}$. Рассмотрим реализацию $F_{20} = F_{020}$. Из $\alpha \rightarrow 0$ следует $x_1 \cong b$.

Уравнение равновесия с учетом $\alpha \rightarrow 0$ $F_{12} - F_{\text{сб}} - F_{020} = 0$ и в окончательном виде

$$C_{12} = \frac{fC_k(h_0 - a) + F_{020}}{b}.$$

Жесткость системы для $F_{20} < F_{020}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = C_{10} + 2C_{12} + 2C_k \left[1 + h_0 \frac{(b - x_1)^2}{(x_1^2 - 2bx_1 + h_0^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - 2bx_1 + h_0^2}} \right]. \quad (5)$$

Механические системы, имеющие интервал перемещения с отрицательной жесткостью, должны обладать хотя бы одним положением неустойчивого

равновесия. Координаты возможных положений равновесия из (4)

$$F_1 = C_{10}x_1 + 2C_{12} + 2C_k \left(\frac{h_0}{\sqrt{x_1^2 - 2bx_1 + h_0^2}} - 1 \right) (b - x_1);$$

система с неустойчивым положением равновесия если

$$F_{1K} \cong 2C_k \left(\frac{h_0}{\sqrt{x_1^2 - 2bx_1 + h_0^2}} - 1 \right) (b - x_1) = 0.$$

В положение статического неустойчивого равновесия $x_1 = b$, следовательно,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = C_{10} + 2C_{12} + 2C_k \left(1 - \frac{h_0}{a} \right) = 0.$$

В итоге

$$C_k = \frac{C_{10} + 2C_{12}}{2 \left(\frac{h_0}{a} - 1 \right)}.$$

Наибольшее перемещение от положения $x_1 = b$, на котором приведенная (суммарная) жесткость механизма $C_{\Sigma} \cong \frac{\partial F_1}{\partial x_1}$ не больше некоторого заданного значения $C_{\Sigma 0}$, определится из (5)

$$C_{10} + 2C_{12} + 2C_k \left[1 + h_0 \left(\frac{(b - x_1)^2}{(x_1^2 - 2bx_1 + h_0^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - 2bx_1 + h_0^2}} \right) \right] - C_{\Sigma 0} = 0.$$

Динамика системы. Система уравнений (5) нелинейная. Рассмотрим возможность её линеаризации. Для этого оценим пределы изменения h_0/h .

Положению статического неустойчивого равновесия соответствует $|(x_2 - x_1)| = b$, тогда $h = \sqrt{h_0^2 + 3b^2}$. Предельному положению корректора соответствует $a = b$, тогда $h_0 = b\sqrt{2} = 1,41b$ и, следовательно, $(b/h_0)_{\text{max}} = 0,707$. Линеаризованные уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{C_{10}}{m_1} x_1 - 2 \frac{C_{12}}{m_1} (x_2 - x_1) + 2 \frac{C_k}{m_1} (K_H - 1)(b + x_2 - x_1) &= \frac{F_1(t)}{m_1}; \\ \ddot{x}_2 + \frac{C_{20}}{m_2} x_2 + \frac{C_{12}}{m_2} (x_2 - x_1) - \frac{C_k}{m_2} (K_H - 1)(b + x_2 - x_1 - af) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

После соответствующих преобразований

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= d_1; \\ \ddot{x}_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= d_2, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1^{-1} [C_{10} + 2C_{12} - 2C_K(K_H - 1)]; & a_{21} &= m_2^{-1} [C_K(K_H - 1) - C_{12}]; \\ a_{12} &= 2m_1^{-1} [C_K(K_H - 1) - C_{12}]; & a_{22} &= m_2^{-1} [C_{20} + C_{12} - C_K(K_H - 1)]; \\ d_1 &= m_1^{-1} [F_1(t) - 2C_K(K_H - 1)b]; & d_2 &= C_K m_2^{-1} (K_H - 1)(b - af). \end{aligned}$$

Уравнения свободных колебаний механической системы упругой опоры

$$\left. \begin{aligned} -A_1\omega^2 + a_{11}A_1 + a_{12}A_2 &= 0; \\ -A_2\omega^2 + a_{21}A_1 + a_{22}A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} (a_{11} - \omega^2)A_1 + a_{12}A_2 &= 0; \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - \omega^2)A_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

являются однородными линейными алгебраическими уравнениями относительно A_1 и A_2 . Такая система уравнений имеет нетривиальное решение только в том случае, если определитель $\Delta(\omega)$ из коэффициентов при A_1 и A_2 равен нулю.

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \omega^2) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \omega^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим частотное уравнение системы

$$\Delta(\omega) = \omega^4 - (a_{11} - a_{22})\omega^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0,$$

его решением будет

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{a_{11} - a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}. \quad (9)$$

Общее решение системы уравнений (6)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_2); \\ x_2 &= A_{21} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_{22} \sin(\omega_2 t + \psi_2). \end{aligned} \right\}$$

Здесь A и ψ – произвольные постоянные, $\omega_1, \omega_2, \psi_1$ и ψ_2 относятся соответственно к первой и второй главным формам колебаний, т.е. к колебаниям на основной и второй частотах. Первый индекс – порядковое число координаты, второй индекс – форма колебания. Колебательное движение масс состоит из двух гармонических составляющих с частотами ω_1 и ω_2 . Амплитуды и фазовые углы гармонических составляющих $x_1(t)$ и $x_2(t)$ задаются начальными условиями, но отношение амплитуд этих составляющих определится из (8).

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{11} - \omega_1^2} = \frac{1}{\mu_1}; \quad \frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{a_{22} - \omega_2^2}{a_{21}} = \frac{1}{\mu_2}.$$

Подставив μ_1 и μ_2 в (9), получим

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_2); \\ x_2 &= \mu_1 A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \mu_2 A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_2). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Постоянные интегрирования A_{11}, A_{12}, ψ_1 и ψ_2 вычисляются из начальных условий $x_1(0), \dot{x}_1(0), x_2(0)$ и $\dot{x}_2(0)$.

Если начальным условиям соответствует $A_{12} = 0$ в уравнениях (10), то движения, описываемые первой формой колебаний

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1), \\ x_2 &= \mu_1 A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1). \end{aligned} \right\}$$

Аналогично, если $A_{11} = 0$, то движение масс соответствует второй форме колебаний

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_2), \\ x_2 &= \mu_2 A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_2). \end{aligned} \right\}$$

Эпюры амплитуд этих главных форм колебаний показаны на рисунке 3 (амплитуды произвольны).

При первой форме колебания $x_1(t)$ и $x_2(t)$ всегда имеют постоянное отношение амплитуд μ_1 и совпадают по фазе при положительном μ_1 . При второй форме колебания имеет место постоянное отношение амплитуд μ_2 , но разность фаз составляет π и отношение μ_2 отрицательное.

Уравнения вынужденных колебаний механической системы упругой опоры (7). Общий интеграл этой системы дифференциальных уравнений является суммой общего интеграла системы однородных уравнений и частного интеграла рассматриваемой системы уравнений.

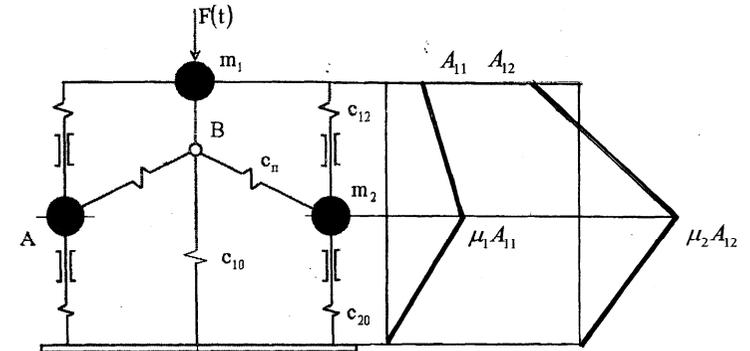


Рисунок 3 – Эпюры амплитуд главных форм колебаний

Частное решение системы (7), определяющее вынужденные колебания системы, находим в виде

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega t + \psi); & x_2 &= A_2 \sin(\omega t + \psi); \\ \dot{x}_1 &= -A_1 \omega^2 \sin(\omega t + \psi); & \dot{x}_2 &= -A_2 \omega^2 \sin(\omega t + \psi). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подставив (11) в (7), получим

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \omega^2)A_1 + a_{12}A_2 &= d_1; \\ a_{12}A_1 + (a_{22} - \omega^2)A_2 &= d_2, \end{aligned} \right\}$$

и выражения для амплитуд вынужденных колебаний имеют вид

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{d_1(a_{22} - \omega^2) - d_2 a_{12}}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}; \\ A_2 &= \frac{d_2(a_{11} - \omega^2) - d_1 a_{12}}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}. \end{aligned} \right\}$$

Знаменатель в этих зависимостях является квадратным многочленом относительно ω^2 , следовательно, его можно записать в функции его нулей – квадратов собственных частот системы.

В случае резонанса $\omega = \omega_1$ или $\omega = \omega_2$ формы вынужденных колебаний системы аналогичны соответствующим формам главных колебаний.

Парциальные системы. Упругая опора с управляемой квазиулевой жесткостью для высокоскоростных роторных систем является системой с двумя степенями свободы, которую можно представить как две отдельные системы с одной степенью свободы, связанные друг с другом. Парциальная система, поведение которой описывается данной обобщенной координатой, получается из полной системы, если положить равными нулю все остальные координаты.

Известно, что парциальные частоты ν_1, ν_2 лежат между собственными ω_1, ω_2 .

Это свойство является общим для любых систем с двумя степенями свободы.

Управляющий силовой поток – фильтр низких частот, силовой поток – высокочастотный фильтр. Следовательно, их собственные частоты должны достаточно отличаться. При сильно различающихся парциальных частотах нормальные частоты близки к парциальным.

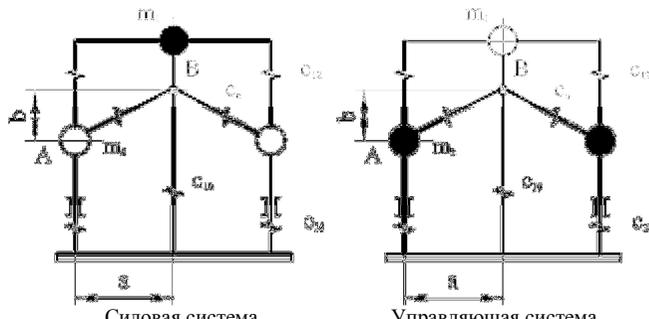


Рисунок 4 – Парциальные системы

Рассмотрим линеаризованные уравнения движения (6). Силовой парциальной системе соответствует $x_2 = 0$, управляющей парциальной системе соответствует $x_1 = 0$ (рисунок 4).

Рассмотрим параметры упругой опоры в процессе управления изменением жесткости. Этому соответствует система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{C_{10} + 2C_{12} - 2C_K(K_H - 1)}{m_1} x_1 + 2 \frac{C_K}{m_1} (K_H - 1)b &= \frac{F_1(t)}{m_1}; \\ \ddot{x}_2 + \frac{C_{20} + C_{12} - C_K(K_H - 1)}{m_2} x_2 - \frac{C_K}{m_2} (K_H - 1)(b - af) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Угол α между корректором и направлением перемещения массы m_2 по величине соизмерим с углом трения пары "ползун-направляющая" (рисунок 5).

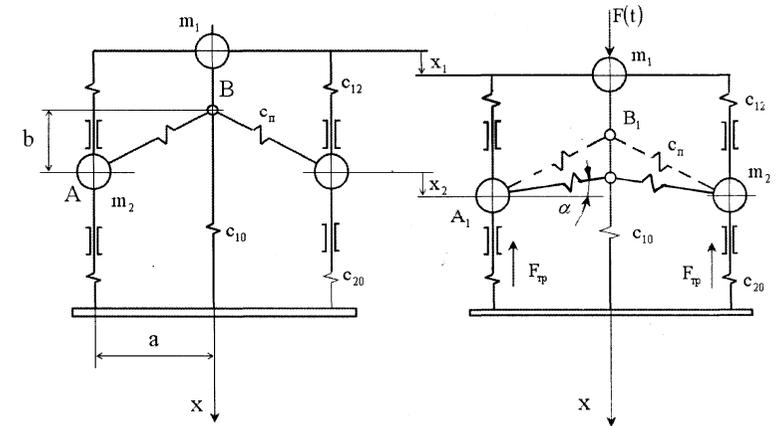


Рисунок 5 – К определению угла α

Таблица – Ориентировочные значения коэффициентов трения скольжения и углов трения

Пара трения	f	φ°
Сталь – сталь	0,09 – 0,13	5,1 – 7,1
Сталь – бронза	0,09 – 0,10	5,1 – 5,7

Очевидно, что направление движущей силы со стороны корректора проходит внутри угла (конуса) трения и, следовательно, выполняется условие самоторможения и можно исключить действие корректора на массу m_2 . Тогда система (12) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{C_{10} + 2C_{12}}{m_1} x_1 &= \frac{F_1(t) - 2C_K(K_H - 1)b}{m_1}; \\ \ddot{x}_2 + \frac{C_{20} + C_{12}}{m_2} x_2 &= \frac{C_K}{m_2} (K_H - 1)(b - af). \end{aligned} \right\}$$

Для частотной настройки запишем уравнения свободных колебаний силовой и управляющих систем

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{C_{10} + 2C_{12}}{m_1} x_1 &= 0; \\ \ddot{x}_2 + \frac{C_{20} + C_{12}}{m_2} x_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Откуда циклические частоты свободных колебаний парциальных систем:

$$\text{силовой системы } \nu_1^2 = \frac{C_{10} + 2C_{12}}{m_1}; \text{ управляющей системы } \nu_2^2 = \frac{C_{20} + C_{12}}{m_2}.$$

Рассмотрим зависимость собственных частот динамической системы упругой опоры от соотношения парциальных частот. С учётом исключения действия корректора на массу m_2 система

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= d_1; \\ \ddot{x}_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= d_2, \end{aligned} \right\}$$

будет иметь коэффициенты $a_{11} = \nu_1^2$; $a_{12} = -\frac{2C_{12}}{m_1}$; $a_{21} = -\frac{C_{12}}{m_2}$; $a_{22} = \nu_2^2$ и уравнение собственных частот опоры можно записать в функции парциальных частот

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2}{4} - (\nu_1^2 \nu_2^2 - 2 \frac{C_{12}^2}{m_1 \cdot m_2})}. \quad (13)$$

Предельный случай для (13) сильно различающихся парциальных частот силовой и управляющей систем $\nu_1 \gg \nu_2$ даст $\omega_1^2 = \nu_1^2$, $\omega_2^2 = 0$.

При равенстве парциальных частот $\nu_1 = \nu_2$ выражения для собственных частот имеют вид $\omega_{1,2}^2 = \pm \sqrt{2 \frac{C_{1,2}^2}{m_1 \cdot m_2} - \nu_1^2 \nu_2^2}$.

Вывод: Наибольшее отличие ω от ν будет вблизи равенства парциальных частот. Принимая собственные частоты силовой и управляющих систем $\nu_1 \gg \nu_2$ различными на порядки, можно считать корректным частотную настройку динамической системы упругой опоры по её парциальным системам.

Список литературы: 1. Гапонов В.С., Наумов А.И. Математическая модель упругой опоры с управляемой квазиулевого жесткостью для подшипников высокоскоростных роторных систем. 2. Гапонов В.С., Гайдамака А.В., Гладыцева Е.Ю. Аналитический обзор литературы по вопросам конструктивного обеспечения динамической устойчивости высокоскоростных роторных систем // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. Вып. "Машиноведение и САПР". – 2010. – №19. – С.39-44. 3. Гапонов В.С., Калинин П.М. Пасивна віброзахисна система з керованою квазиулевою жорсткістю. Патент на винахід 62934 Україна – 2004. Бюл.№1. 4. Гапонов В.С., Наумов А.И. Упругая опора подшипников ротора с управляемым изменением квазиулевого жесткости // Вісник НТУ"ХПІ". – 2010. – №33. – С. 68-73.

Поступила в редколлегию 21.05.12