

**В.И. КОРОТКИН**, к.т.н., зав. лабораторией НИИМ и ПМ им. И.И. Воровича ЮФУ, Ростов-на-Дону, Россия;  
**Д.Ю. СУХОВ**, младший научный сотрудник НИИМ и ПМ ЮФУ;  
**А.А. ЕНГИБАРЯН**, к.ф.-м.н., доцент ДГТУ, Ростов-на-Дону, Россия

**КАЧЕСТВО ЗАЦЕПЛЕНИЯ ПЕРЕДАЧ НОВИКОВА СО СПРЯМЛЁННЫМИ ЗУБЬЯМИ**

Применительно к новым передачам Новикова со спрямлёнными зубьями рассмотрен один из важных ограничительных факторов – явление подрезания головки зуба. Решена обратная задача теории зацепления и показано, что при взаимном осевом смещении пары колёс, необходимом для регулировки высотного положения пятна контакта, постоянство передаточного числа сохраняется, поэтому дополнительных динамических усилий не возникает. Исследован вопрос о приведенных кривизнах поверхностей в точках контакта для различных фаз зацепления, доведенный до возможности несложных инженерных расчётов.

Стосовно до нових передач Новікова зі спрямленими зубцями розглянутий один з важливих обмежувальних факторів – явище підрізу головки зубця. Вирішена оборотна задача теорії зачеплення та показано, що при взаємному вісьовому зміщенні пари коліс, що необхідно для регулювання висотного положення плями контакти, постійність передавального числа зберігається, тому додаткових динамічних зусиль не виникає. Досліджено питання щодо приведених кривин поверхонь у точках контакту для різних фаз зачеплення, що доведено до можливості нескладних інженерних розрахунків.

For new Novikov gearing with straightened teeth considered one of the most important limiting factors – a addendum undercut. Solved inverse problem of the theory of gearing and it is shown that the mutual axial displacement of the pair of wheels required to adjust the altitude of the contact area, the gear ratio remains constant, and the additional dynamic forces not arise. Was investigate the problem of the reduced curvature of the surfaces at the points of contact for the different phases of gear meshing, it was finished to the possibility of simple engineering calculations.

В статье "Цилиндрическая зубчатая передача Новикова со сниженным осевым усилием", помещённой в предыдущем сборнике, описана новая зубчатая передача, синтезированная на базе идей Новикова, имеющая, в отличие от традиционных косозубых передач Новикова, резко сниженный (вплоть до нуля) осевой компонент усилия в зацеплении. Новая передача названа передачей Новикова со спрямлёнными зубьями (сокращённо ПНСЗ).

Для этой передачи, как и для любой другой, существуют факторы геометрического характера, накладывающие ограничения на параметры исходного контура и передачи. Определение этих факторов есть по существу проверка качества зацепления, которую необходимо проводить при проектировании передачи. Одним из основных параметров качества зацепления является отсутствие подрезания зуба, которое ниже рассматривается.

С математической точки зрения подрезание зубьев – это появление на их рабочей поверхности особых точек, геометрическое место которых образует так называемое ребро возврата, в которых нарушается регулярность (гладкость) поверхности. В особых точках положение плоскости, касательной к поверхности, не определено, так как происходит так называемое самопересечение поверхностей.

Подрезание отрицательно влияет как на изломную прочность зубьев, создавая концентраторы повышенных напряжений, так и на контактную, снижая высотную протяженность активных участков и резко увеличивая кривизну поверхности вблизи особых точек, в связи с чем следует стремиться исключить явление подрезания на рабочей поверхности зуба.

В упомянутой выше статье получены следующие уравнения, которые нам понадобятся:

а) уравнение поверхности зуба исходной (производящей) рейки

$$\begin{cases} x_p = \rho_i \sin \vartheta_i - k_i + U_i \sin \theta; \\ y_p = -(\rho_i \cos \vartheta_i - c_i); \\ z_p = U_i \cos \theta; \end{cases} \quad (1)$$

б) уравнение зацепления

$$f(\vartheta_i, U_i, \varphi_i) = (r_i \varphi_i - c_i) \sin \vartheta_i - (U_i \sin \theta - k_i) \cos \vartheta_i = 0, \quad (i=1, 2). \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) обозначено:  $\rho$  – радиус дуги окружности торцового профиля зуба;  $k$  – расстояние центра окружности радиуса  $\rho$  от начальной прямой;  $c$  – расстояние центра окружности радиуса  $\rho$  от оси симметрии головки зуба;  $r$  – радиус начального цилиндра зубчатого колеса;  $\theta$  – угол наклона действующей линии зуба к начальной плоскости;  $\vartheta$  – текущий угол профиля зуба;  $U$  – параметр перемещения торцового профиля вдоль действующей линии;  $\varphi$  – параметр обкатки (угол поворота зубчатого колеса).

В работе [1] показано, что необходимым условием наличия подрезания зубьев является равенство нулю определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial \vartheta_i} & \frac{\partial f_i}{\partial U_i} & \frac{\partial f_i}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{d\varphi_i}{dt} \\ \frac{\partial x_p}{\partial \vartheta_i} & \frac{\partial x_p}{\partial U_i} & V_{xp}^{(pi)} \\ \frac{\partial y_p}{\partial \vartheta_i} & \frac{\partial y_p}{\partial U_i} & V_{yp}^{(pi)} \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $d\varphi_i/dt = \omega_i$  – угловая скорость поворота зубчатого колеса;  $V_{xp}^{(pi)}, V_{yp}^{(pi)}$  – проекции скорости  $\bar{V}_p^{(pi)}$  относительного движения рейки вокруг мгновенной оси с угловой скоростью  $\bar{\omega}_p^{(pi)}$ :

$$\bar{V}_p^{(pi)} = \bar{\omega}_p^{(pi)} \times (\bar{r}_p - \bar{R}_p), \quad (4)$$

где  $\bar{r}_p$  – радиус-вектор точки поверхности рейки;  $\bar{R}_p$  – радиус-вектор точки, принадлежащей линии действия вектора  $\bar{\omega}_p^{(pi)}$ .

Раскрывая определитель (3), выполняя дифференцирование и необходимые преобразования, получаем в результате кубическое уравнение подрезания:

$$\sin^3 \vartheta_i \mp \frac{U_i \sin \theta - k_i}{r_i} \sin \vartheta_i \mp \frac{(U_i \sin \theta - k_i)^2}{r_i \rho_i} = 0. \quad (5)$$

(Верхний знак – для  $i=1$ , нижний – для  $i=2$ ).

Решая уравнение (5), получаем максимальный угол  $\vartheta$  подрезания профиля зуба.

Анализ уравнения (5) показал, что подрезанию подлежит только выпуклый профиль зуба, т.е. головка, для которой  $\vartheta_1 \geq 0$ . Вогнутая ножка зуба не претерпевает подрезания, т.к. для неё всегда  $\vartheta_2 < 0$ . Снижению угла  $\vartheta_1$  способствует увеличение радиусов  $\rho_1$  и  $r_1$ . Наибольшие углы подрезания возникают в торцовых сечениях зуба, т.е. при  $U_1=0$  и при  $U_1 = b_w / \cos \theta$ , где  $b_w$  – длина зуба. В торцовом сечении, для которого  $U_1 = k_1 / \sin \theta$ , угол подрезания  $\vartheta_1=0$ .

Типичная картина расположения на поверхности головки зуба линии подрезания как геометрического места точек, соответствующих углам подрезания, показана на рисунке 1.

Следует стремиться к созданию одинаковых условий на торцах, т.е. добиваться  $\vartheta_1 = \vartheta_{III}$ , что легко достигается подбором параметра  $k_1$ .

Одним из важных достоинств ПНСЗ является возможность осевой регулировки, т.е. осевого смещения колёс пары друг относительно друга, компенсирующего неизбежные технологические, монтажные и эксплуатационные отклонения межосевого расстояния от номинала и обеспечивающего удовлетворительное высотное расположение пятна контакта на поверхностях зубьев.

На рисунке 2 показан осевой сдвиг колёс на некоторую величину  $\Delta L$ .

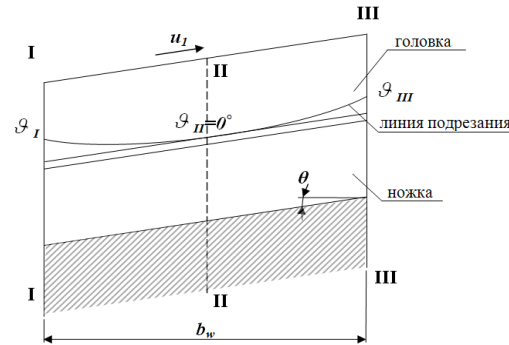


Рисунок 1 – Типичная картина расположения на зубе линии подрезания:

I-I – сечение  $U_1=0$ ; II-II – сечение  $U_1=k_1/\sin\theta$ ;  
III-III – сечение  $U_1=b_w \cos\theta$

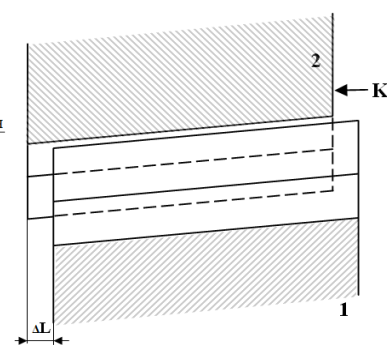


Рисунок 2 – Осевое смещение колеса 2 относительно колеса 1 на величину  $\Delta L$  от номинального положения

в настоящем сборнике), и требуется найти закон движения в виде функции, связывающей положения колёс.

Общий путь решения задачи следующий.

Пусть заданы уравнения поверхностей зубьев колёс:

$$\begin{cases} \bar{r}_i = \bar{r}_i(\vartheta_i, U_i, \varphi_i); \\ f_i(\vartheta_i, U_i, \varphi_i) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Сообщим колесу 1 при его зацеплении с колесом 2 некоторый угол  $\varphi'_1$  поворота вокруг своей оси, вследствие чего колесо 2 также повернется вокруг своей оси на некоторый угол  $\varphi'_2$ .

В неподвижной системе координат уравнения поверхностей зубьев запишутся в виде:

$$\begin{cases} \bar{r}^{(i)} = \bar{r}^{(i)}(\vartheta_i, U_i, \varphi_i, \varphi'_i); \\ f_i(\vartheta_i, U_i, \varphi_i) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

В точках контакта поверхности (7) должны иметь общую нормаль  $\bar{e}_i$ , т.е. должно соблюдаться условие

$$\begin{cases} \bar{r}^{(1)} = \bar{r}^{(2)}; \\ \bar{e}^{(1)} = \bar{e}^{(2)}; \\ f_1(\vartheta_1, U_1, \varphi_1) = 0; \\ f_2(\vartheta_2, U_2, \varphi_2) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Представляя (8) в координатной форме и проводя необходимые преобразования (которые здесь для краткости опущены), получаем следующую рабочую систему:

$$\begin{aligned} & [(\rho_1 \sin \vartheta_1 - k_1 + U_1 \sin \theta) \cos(\varphi'_1 - \varphi_1) - (\rho_1 \cos \vartheta_1 - c_1) \sin(\varphi'_1 - \varphi_1) + \\ & + r_1 [\cos(\varphi'_1 - \varphi_1) - \varphi_1 \sin(\varphi'_1 - \varphi_1) - 1] = \\ & = (\rho_2 \sin \vartheta_2 - k_2 + U_2 \sin \theta) \cos(\varphi'_2 - \varphi_2) + (\rho_2 \cos \vartheta_2 - c_2) \sin(\varphi'_2 - \varphi_2) - \\ & - r_2 [\cos(\varphi'_2 - \varphi_2) - \varphi_2 \sin(\varphi'_2 - \varphi_2) - 1]; \\ & - (\rho_1 \sin \vartheta_1 - k_1 + U_1 \sin \theta) \sin(\varphi'_1 - \varphi_1) - (\rho_1 \cos \vartheta_1 - c_1) \cos(\varphi'_1 - \varphi_1) - \\ & - r_1 [\sin(\varphi'_1 - \varphi_1) + \varphi_1 \cos(\varphi'_1 - \varphi_1)] = \\ & = (\rho_2 \sin \vartheta_2 - k_2 + U_2 \sin \theta) \sin(\varphi'_2 - \varphi_2) - (\rho_2 \cos \vartheta_2 - c_2) \cos(\varphi'_2 - \varphi_2) - \\ & - r_2 [\sin(\varphi'_2 - \varphi_2) + \varphi_2 \cos(\varphi'_2 - \varphi_2)]; \\ & U_1 \cos \theta = U_2 \cos \theta - \Delta L; \\ & (\cos^2 \theta + \sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \theta)^{-1/2} \sin(\vartheta_1 - \varphi'_1 + \varphi_1) = \\ & = (\cos^2 \theta + \sin^2 \vartheta_2 \sin^2 \theta)^{-1/2} \sin(\vartheta_2 + \varphi'_2 - \varphi_2); \\ & - \sin \vartheta_1 (\cos^2 \theta + \sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \theta)^{-1/2} = - \sin \vartheta_2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \vartheta_2 \sin^2 \theta)^{-1/2}; \\ & (r_1 \varphi_1 - c_1) \operatorname{tg} \vartheta_1 + k_1 - U_1 \sin \theta = 0; \\ & (r_2 \varphi_2 - c_2) \operatorname{tg} \vartheta_2 + k_2 - U_2 \sin \theta = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Следует учесть, что при  $\Delta L = 0$  имеют место соотношения

$$\rho_2 = \rho_1 + \Delta\rho; \quad k_2 = k_1 + \Delta\rho \sin \alpha_{kt}; \quad c_2 = c_1 + \Delta\rho \cos \alpha_{kt}, \quad (10)$$

где  $\alpha_{kt}$  – номинальный торцовый угол давления при  $\Delta L = 0$ .

С учётом (10) система (9) позволяет установить, что угол  $\vartheta$  давления при  $\Delta L \neq 0$

$$\vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_2, \quad (11)$$

и если положить

$$\sin \vartheta = \sin \alpha_{kt} - \Delta L \operatorname{tg} \theta / \Delta\rho, \quad (12)$$

то получим

$$\varphi'_1 = \varphi_1 \quad \text{и} \quad \varphi'_2 = \varphi_2. \quad (13)$$

Давая приращения углам поворота, на основании системы (9) убеждаемся, что передаточное отношение

$$u_{21} = \Delta\varphi'_2 / \Delta\varphi'_1 = \Delta\varphi_2 / \Delta\varphi_1 = r_1 / r_2 = \text{const}, \quad (14)$$

т.е. постоянство передаточного числа при  $\Delta L \neq 0$  сохраняется.

Как показал анализ, линия зацепления при осевом сдвиге колёс меняет своё положение в пространстве, оставаясь прямой, параллельной линии зацепления, существующей при  $\Delta L = 0$ .

Коэффициент осевого перекрытия также несколько изменяется. Если обозначить  $\varepsilon_\beta, \varepsilon'_\beta$  – коэффициент осевого перекрытия соответственно при  $\Delta L = 0$  и при  $\Delta L \neq 0$ ,  $p_t$  – торцовый шаг зубьев, то указанное изменение будет:

$$\Delta\varepsilon_\beta = \varepsilon'_\beta - \varepsilon_\beta = b_w \operatorname{tg} \theta (\operatorname{ctg} \vartheta - \operatorname{ctg} \alpha_{kt}) / p_t. \quad (15)$$

Рассмотрим вопрос о главных кривизнах поверхностей зубьев, знание которых важно при расчётах передачи на контактную прочность.

Кривизны поверхностей можно определить методом дифференциальной геометрии через квадратичные формы [2], однако данный метод сложен и громоздок, поскольку требует совершать необходимые операции с огибающими поверхностями (поверхностями зубьев зубчатого колеса), уравнения которых значительно сложнее уравнений огибаемых поверхностей зубьев производящей рейки. В работе [1] предложен т.н. кинематический метод, при котором несколько упрощается задача, т.к. достаточно иметь дело с поверхностью зубьев рейки и её относительным движением.

Исходной является следующая зависимость:

$$\rho^{(i)} = \frac{[\bar{V}_r^{(i)}]^2}{\bar{V}_r^{(i)} \bar{e}_r^{(i)}}, \quad (16)$$

при этом

$$\bar{V}_r^{(i)} = \bar{V}_r^{(p)} + \bar{V}_p^{(pi)}; \quad \bar{e}_r^{(i)} = \bar{e}_r^{(p)} + \bar{\omega}_p^{(pi)} \times \bar{e}^{(p)}.$$

Здесь  $\rho^{(i)}$  – радиус кривизны поверхности  $i$ -го колеса в нормальном сечении,

проведённом через вектор  $\bar{V}_r^{(i)}$ ;  $\bar{V}_r^{(i)}, \bar{e}_r^{(i)}$  – соответственно скорость точки и скорость конца орта нормали при движении точки по поверхности зуба зубчатого колеса;  $\bar{V}_r^{(p)}, \bar{e}_r^{(p)}$  – соответственно скорость точки и скорость конца орта нормали при движении точки по поверхности зуба рейки;  $\bar{e}^{(p)}$  – орт нормали к поверхности зуба рейки;  $\bar{V}_p^{(pi)}, \bar{\omega}_p^{(pi)}$  – см. выше (4).

Раскрывая (16) и проводя необходимые преобразования, приходим в конечном итоге к квадратному уравнению относительно профильного ( $\rho_\alpha$ ) и продольного ( $\rho_\beta$ ) главных радиусов кривизны поверхностей зубьев колёс в точках контакта ( $\vartheta_i = \alpha_{kt}$ ):

$$P^{(i)} \cdot (\rho_{\alpha,\beta}^{(i)})^2 + S^{(i)} \cdot \rho_{\alpha,\beta}^{(i)} + T^{(i)} = 0, \quad (17)$$

где:

$$P^{(1)} = \sin^2 \alpha_{kt} \cos^2 \alpha_{kt} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \alpha_{kt} \sin^2 \theta);$$

$$P^{(2)} = u_{21} \sin^2 \alpha_{kt} \cos^2 \alpha_{kt} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \alpha_{kt} \sin^2 \theta);$$

$$S^{(1)} = M \sin \alpha_{kt} \cos \theta \left[ r_1 \sin^2 \alpha_{kt} + (\rho_1 \sin \alpha_{kt} + U_1 \sin \theta - k_1) \sin^2 \theta \cos^2 \alpha_{kt} - \right. \\ \left. - (U_1 \sin \theta - k_1) (\cos^2 \theta + \sin^2 \alpha_{kt} \sin^2 \theta) \right];$$

$$S^{(2)} = M \sin \alpha_{kt} \cos \theta \left[ -r_1 \sin^2 \alpha_{kt} + u_{21} (\rho_2 \sin \alpha_{kt} + U_2 \sin \theta - k_2) \sin^2 \theta \cos^2 \alpha_{kt} - \right. \\ \left. - u_{21} (U_2 \sin \theta - k_2) (\cos^2 \theta + \sin^2 \alpha_{kt} \sin^2 \theta) \right];$$

$$T^{(1)} = M^2 \left[ r_1 \rho_1 \sin^3 \alpha_{kt} - (U_1 \sin \theta - k_1) (\rho_1 \sin \alpha_{kt} + U_1 \sin \theta - k_1) \right];$$

$$T^{(2)} = -M^2 \left[ r_1 \rho_2 \sin^3 \alpha_{kt} + u_{21} (U_2 \sin \theta - k_2) (\rho_2 \sin \alpha_{kt} + U_2 \sin \theta - k_2) \right];$$

$$M = (\cos^2 \theta + \sin^2 \alpha_{kt} \sin^2 \theta)^{3/2}.$$

Чтобы перейти к приведенным главным радиусам кривизны, необходимо знать угол между главными направлениями сопрягаемых первой и второй поверхностями. Вычисления показали, что этот угол чрезвычайно мал (порядка долей градуса), что даёт основания без заметного ущерба для точности считать его равным нулю. Тогда вычисления упрощаются, и для расчёта контактных напряжений можно полагать, что приведенный профильный радиус  $\rho_\alpha$  кривизны поверхностей в контактной точке равен

$$\rho_\alpha = \frac{|\rho_\alpha^{(1)}| \cdot |\rho_\alpha^{(2)}|}{|\rho_\alpha^{(2)}| + |\rho_\alpha^{(1)}|}, \quad (18)$$

а приведенный продольный радиус  $\rho_\beta$  кривизны поверхностей в контактной точке равен

$$\rho_\beta = \frac{|\rho_\beta^{(1)}| \cdot |\rho_\beta^{(2)}|}{|\rho_\beta^{(2)}| + |\rho_\beta^{(1)}|}. \quad (19)$$

Исследования показали, что для инженерных расчётов профильных радиусов кривизны без ощутимой потери точности можно использовать уравнения Эйлера-Савари для плоских зацеплений [3]. Так, если отрезок контактной нормали от точки контакта  $K$  до полюса  $P$  обозначить:  $l_{k1}$  в начале зацепления (при  $U=0$ ) и  $l_{k2}$  в конце зацепления (при  $U=b_w/\cos\theta$ ), то для контакта головки колеса 1 с ножкой колеса 2 можно записать:

а) для начальной стадии зацепления

$$\rho_\alpha^{(1)} = l_{k1} + \frac{1}{\frac{1}{\rho_1 - l_{k1}} + \frac{1}{r_1 \sin \alpha_{kt}}}; \quad \rho_\alpha^{(2)} = l_{k1} + \frac{1}{\frac{1}{\rho_2 - l_{k1}} - \frac{1}{r_2 \sin \alpha_{kt}}}; \quad (20)$$

б) для конечной стадии зацепления

$$\rho_\alpha^{(1)} = l_{k2} - \frac{1}{\frac{1}{l_{k2} - \rho_1} - \frac{1}{r_1 \sin \alpha_{kt}}}; \quad \rho_\alpha^{(2)} = l_{k2} - \frac{1}{\frac{1}{l_{k2} - \rho_2} + \frac{1}{r_2 \sin \alpha_{kt}}}. \quad (21)$$

Для контакта головки колеса 2 с ножкой колеса 1 в формулах (20) и (21) следует поменять местами  $r_1$  и  $r_2$ .

Получив по формуле (18) четыре значения профильного приведенного радиуса  $\rho_\alpha$  кривизны, следует в контактных расчётах принять наименьшее значение.

Наглядной иллюстрацией формул (20), (21) является построения Бобилье [3], показанные на рисунках 3, 4. В соответствии с рисунками 3 и 4 можно записать:

$$\rho_\alpha^{(1)} = \rho_1 - \Delta\rho_\alpha^{(1)}; \quad \rho_\alpha^{(2)} = \rho_2 + \Delta\rho_\alpha^{(2)}; \quad \Delta\rho = \rho_2 - \rho_1; \\ \rho_\alpha^{(2)} = \rho_\alpha^{(1)} + \Delta\rho_\Sigma; \quad \Delta\rho_\Sigma = \Delta\rho_\alpha^{(1)} + \Delta\rho + \Delta\rho_\alpha^{(2)}. \quad (22)$$

Как показали расчёты, изменение продольного приведенного радиуса  $\rho_\beta$  кривизны даже в пределах 10% слабо влияет на контактные напряжения, поэтому в инженерной практике для всех фаз зацепления можно принимать постоянное значение этого радиуса, равное при контакте головки колеса 1 с ножкой колеса 2:

$$\rho_\beta = r_2 / [2(r_2 / r_1 + 1) \sin \alpha_{kt} \sin^2 \beta_l \cos \beta_l], \quad (23)$$

где  $\beta_l = \arctg(\tg \theta \cdot \ctg \alpha_{kt})$ .

При контакте головки колеса 2 с ножкой колеса 1 в формуле (23) следует поменять местами  $r_1$  и  $r_2$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 10-08-00031.

**Список литературы:** 1. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1968 – 584с. 2. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей. Т.1,2. – М.: Гостехиздат, 1948 – 385с. 3. Колчин Н.И. Механика машин. Т.1 – М.-Л.: Машгиз, 1962 – 620с.

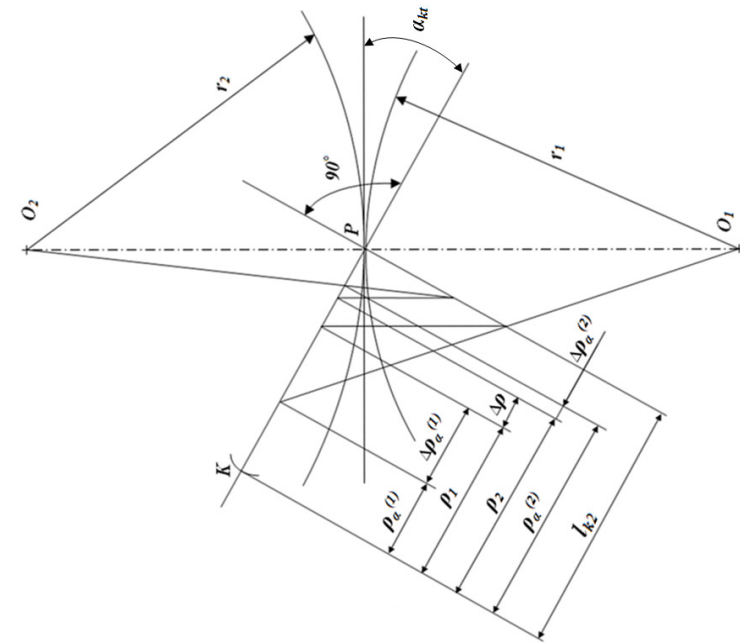


Рисунок 4 – Построение Бобилье для определения профильных радиусов кривизны в конечной фазе зацепления ( $U=b_w/\cos\theta$ )

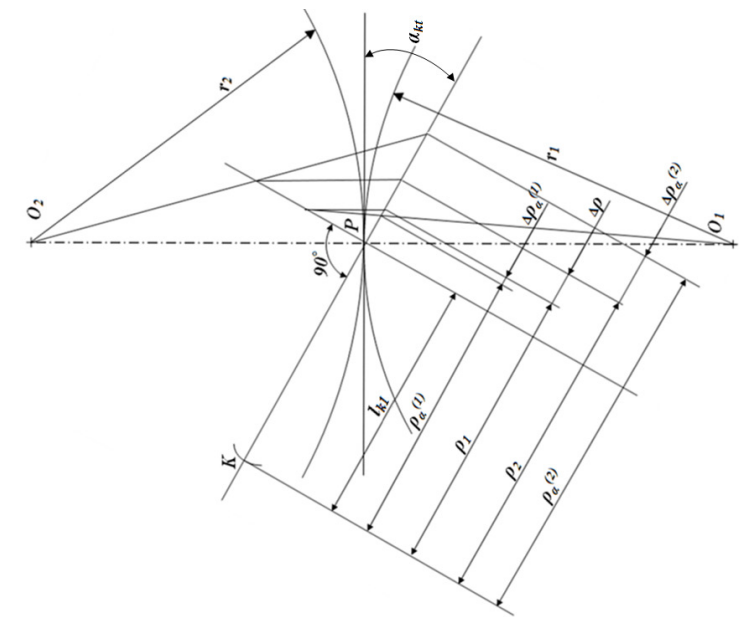


Рисунок 3 – Построение Бобилье для определения профильных радиусов кривизны в начальной фазе зацепления ( $U=0$ )