

Ю.В. СТРЕЛЬНИКОВ, аспирант каф. машиноведения ВНУ им. В. Даля, Луганск

РАЗРАБОТКА МЕТОДА СИЛОВОГО РАСЧЕТА ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ

Разработан метод силового расчета зубчатого зацепления с промежуточными телами качения, выполненными в виде тонкостенных цилиндрических роликов, причем сопряжения зубьев с роликами образуют выпукло-вогнутые контакты поверхностей близкой по величине кривизны, что делает невозможным использование решения классической контактной задачи Герца.

Розроблено метод силового розрахунку зубчатого зацеплення із проміжними тілами кочення виконаними у вигляді тонкостінних циліндричних роликів, причому сполучення зубів з роликами утворюють опукло-увігнуті контакти поверхонь близької по величині кривизни, що унеможливило використання рішення класичного контактного завдання Герца.

The method of power calculation of a meshing with intermediate bodies of a rolling executed in the form of thin-walled cylindrical rollers is developed, and interfaces of teeth to rollers organize is convex-concave contacts of surfaces of close curvature on magnitude that does impossible use of the decision of a classical contact problem of Hertz.

Задача распределения усилий в зоне контакта упругих поверхностей с плоским или профильным штампом хорошо изучена и детально разработана выдающимися учёными Мусхелишвили Н.И. [1], Тимошенко С.П. [2], Лурье А.И. [3] и др. Она решается в общем виде интегрированием уравнения равновесия по границе контактирующих тел, в результате чего определяется распределение усилий в зоне контакта. Это решение пригодно для контактирующих поверхностей с различной по величине или противоположной по знаку кривизной.

Целью исследования является определение упругих деформаций промежуточных тел качения, выполненных в форме тонкостенных цилиндров, решение контактной задачи тел близкой по величине разноимённой кривизны, применительно к условиям зацепления передач с промежуточными телами качения.

Одной из основных задач зацепления высших кинематических пар является установление оптимальных условий контакта сопряжённых звеньев. В передачах с промежуточными телами качения эта задача решается подбором близких по величине радиусов роликов и вогнутых цилиндрических поверхностей зубьев.

Комплексные потенциалы Мусхелишвили при нагрузке полуплоскости или упругого цилиндра выражаются формулами:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{N(x) + iT(x)}{x - z} dx; \quad (1) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t_1}^{t_n} \frac{N(t) + iT(t)}{x - z} dt + B_0. \quad (2)$$

В уравнении (1) параметры a, b определяют линию контакта между точками A и B (рисунок 1), а в уравнении (2) комплексные переменные t_1, \dots, t_n определяют дугу контакта между точками A и B . Постоянная B_0 представляет величину $\Phi(z)$ в бесконечности и не зависит от переменной z . Функции $N(t)$ и $T(t)$ означают соответственно нормальные и касательные напряжения на линии контакта.

$$W = \lambda[z + C\Phi'(z)], \quad (3)$$

где $z = x + iy$ – комплексная переменная срединной плоскости образца; $\Phi(z)$ – комплексно сопряжённый потенциал Мусхелишвили; λ, C – постоянные.

Напряжения, действующие на упругий диск распределены по дуге, границы которой определены точками t_1, t_n (рисунок 2). Функцию

$$F(t) = N(t) + iT(t) \quad (4)$$

можно аппроксимировать полиномом

$$F(t) = a + b(t - t_1) + c(t - t_1)^2 + \sum_{i=1}^j d_i(t - t_i)^3. \quad (5)$$

Для $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, полином (5) непрерывен и дважды непрерывно дифференцируем на дуге t_1, \dots, t_n . Здесь коэффициенты $a, b, c, d, \dots, d_{n-1}$, а также параметры t_1, t_2, \dots, t_{n-1} , соответствующие дискретным точкам дуги ролика, лежащей между точками t_1 и t_n , являются комплексными. Из условий (2) и (5) составляем равенство

$$2\pi i \Phi(z) = a \int_{t_1}^{t_n} \frac{1}{t - z} dt + b \int_{t_1}^{t_n} \frac{t - t_1}{t - z} dt + c \int_{t_1}^{t_n} \frac{(t - t_1)^2}{t - z} dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_1}^{t_n} \frac{(t - t_1)^3}{t - z} dt. \quad (6)$$

Введем обозначения

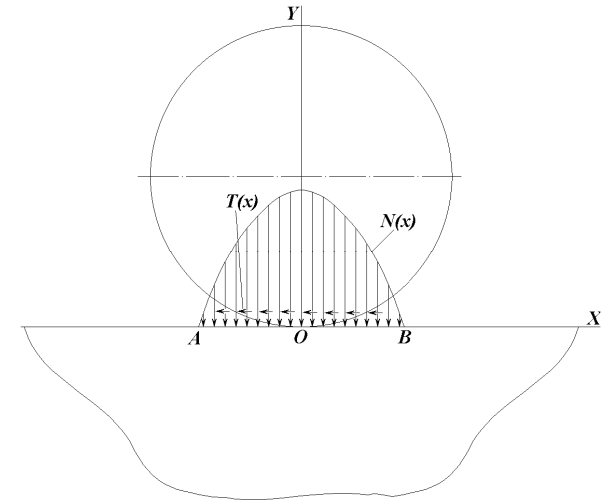


Рисунок 1 – Характер взаимодействия ролика с упругой полуплоскостью

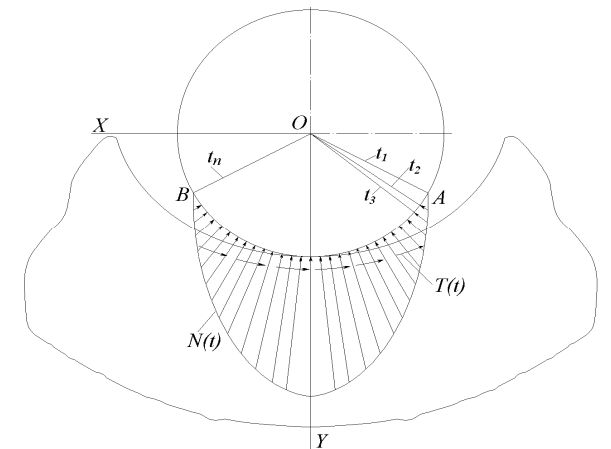


Рисунок 2 – Характер силового взаимодействия ролика с упругим цилиндрическим основанием

$$\left. \begin{aligned} H_a(r_1, r_2, z) &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{t-z} dt; \\ H_b(r_1, r_2, z) &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{t-r}{t-z} dt; \\ H_c(r_1, r_2, z) &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{(t-r)^2}{t-z} dt; \\ H_d(r_1, r_2, z) &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{(t-r)^3}{t-z} dt. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Обозначения (7) подставляются в выражения (6)

$$2\pi i \Phi(z) = aH_a(t_1, t_n, z) + bH_b(t_1, t_n, z) + cH_c(t_1, t_n, z) + \sum_{i=1}^{n-1} d_i H_d(t_1, t_n, z). \quad (8)$$

Продифференцируем соотношение (2)

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t_1}^{t_n} \frac{N(t) + iT(t)}{(t-z)^2} dt. \quad (9)$$

Из уравнений (3) и (9) составляется интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{t_1}^{t_n} \frac{N(t) + iT(t)}{(t-z)^2} dt = \frac{W - \lambda z}{\lambda c}, \quad (10)$$

решение которого позволяет определить нормальные и касательные напряжения в зоне контакта упругих тел.

Продифференцировав равенство (8) с учётом соотношения (10), получим уравнение

$$aH'_a(t_1, t_n, z) + bH'_b(t_1, t_n, z) + cH'_c(t_1, t_n, z) + \sum_{i=1}^{n-1} d_i H'_d(t_1, t_n, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{W - \lambda z}{\lambda z}. \quad (11)$$

Вводятся обозначения:

$$\frac{W - \lambda z}{\lambda c} = P_1 + iP_2; \quad a_1 \cdot b_1 \cdot c = \alpha; \quad \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2; \quad d_i = d_{i_1} + id_{i_2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

С учётом принятых обозначений запишем уравнения (11) в следующем виде

$$\begin{aligned} & a_1 R_e [H'_a(t_1, t_n, z)] - a_2 I_m [H'_a(t_1, t_n, z)] + b_1 R_e [H'_b(t_1, t_n, z)] - \\ & - b_2 I_m [H'_b(t_1, t_n, z)] + c_1 R_e [H'_c(t_1, t_n, z)] - c_2 I_m [H'_c(t_1, t_n, z)] + \\ & + \dots + d_{n-1,1} R_e H'_d(t_{n-1}, t_n, z) - d_{n-1,2} I_m [H'_d(t_{n-1}, t_n, z)] = \frac{P_2}{2\pi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_1 I_m [H'_a(t_1, t_n, z)] + a_2 R_e [H'_a(t_1, t_n, z)] + b_1 I_m [H'_b(t_1, t_n, z)] + \\ & + b_2 R_e [H'_b(t_1, t_n, z)] + c_1 I_m [H'_c(t_1, t_n, z)] + c_2 R_e [H'_c(t_1, t_n, z)] + \\ & + \dots + d_{n-1,1} I_m [H'_d(t_{n-1}, t_n, z)] + d_{n-1,2} R_e [H'_d(t_{n-1}, t_n, z)] = -\frac{P_1}{2\pi}, \end{aligned} \quad (12)$$

где R_e и I_m соответственно действительная и мнимая части комплексной величины.

Для определения $2n+2$ неизвестных коэффициентов $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots, d_{n-1,1}, d_{n-1,2}$ необходимо составить $2n+2$ линейных алгебраических уравнений с $2n+2$ неизвестными. Решение этой системы уравнений позволяет вычислить коэффициенты $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots, d_{n-1,1}, d_{n-1,2}$ и по этим параметрам найти неизвестную функцию напряжений $F(t)$. Для построения системы $2n+2$ линейных алгебраических уравнений на практике пользуются экспериментальными данными.

Особенностью метода силового расчёта элементов зацепления с промежуточными телами качения является близость радиусов кривизны контактирующих тел. Определение характера силового взаимодействия в зацеплении с промежуточными телами качения связано с анализом напряжённо-деформированного состояния силовых звеньев в процессе их взаимодействия. В контакте находятся поверхности достаточно близкие по кривизне и противоположны по знаку, что делает решение Герца [4] непригодным для установления параметров их силового взаимодействия.

Воспользуемся общим решением задачи напряжённо-деформированного состояния тела вращения [1, 2]. Ролик в зацеплении рассматривается как достаточно длинный цилиндр, контактирующий с близким по диаметру отверстием бесконечной длины.

Под действием двух сил \vec{F} , равных по величине и противоположных по направлению, некоторая точка M внутри ролика получит смещение, составляющие которого u и v по соответствующим направлениям: параллельному и перпендикулярному относительно линии действия сил \vec{F} (рисунок 3), запишем в следующем виде

$$u = \frac{F}{4\pi G} \left\{ -\left(\frac{2\lambda + 4G}{\lambda + G} \right) \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + (\cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) + \frac{\gamma}{R_1} \left(\frac{2G}{\lambda + G} \right) \right\}; \quad (13)$$

$$v = \frac{F}{4\pi G} \left\{ -\frac{\pi}{2} \left(\frac{2G}{\lambda + G} \right) + (\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2) + \frac{\gamma}{R_1} \left(\frac{2G}{\lambda + G} \right) \right\}, \quad (14)$$

где G – модуль упругости материала для касательных напряжений; λ – постоянная Ляме для контактирующих тел.

Смещение точек на поверхности ролика в радиальном направлении

$$u_r = u(R_1, \beta) \cos \beta + v(R_1, \beta) \sin \beta. \quad (15)$$

С учетом выражений (13) и (14) смещение граничной точки ролика

$$u_{r_1} = F \left\{ -K_2 \left[1 + \cos \beta \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right) \right] + K_4 \sin \beta \right\}, \quad (16)$$

$$\text{где } K_2, K'_2 = \frac{\lambda_{1,2} + 2G_{1,2}}{2\pi G_{1,2}(\lambda_{1,2} + G_{1,2})}, \quad K_4, K'_4 = \frac{1}{4(\lambda_{1,2} + G_{1,2})}.$$

Функция напряжений для действующей на зуб распределённой нагрузки

$$\Phi = -\frac{F}{\pi} \left[\psi r \sin \beta - \frac{1}{4}(1-\nu)r \ln r \cos \beta - \frac{1}{2}r\beta \sin \beta + \frac{1}{4} \ln r - \frac{R_2^2}{8} \left(\frac{3-\nu}{r} \right) \cos \beta \right], \quad (17)$$

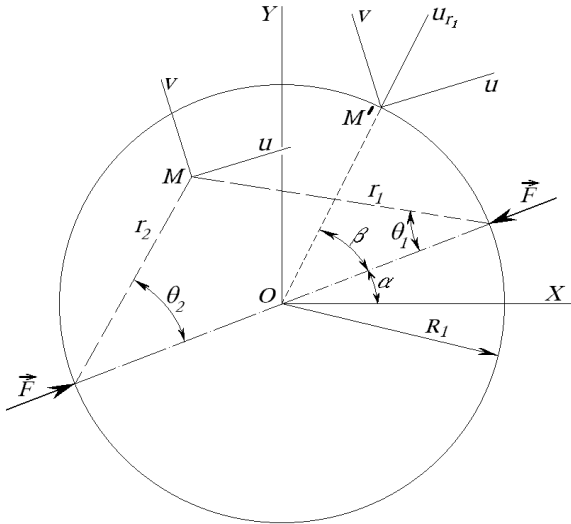


Рисунок 3 – Силовая схема нагрузки и деформации ролика

Деформация в радиальном направлении

$$u_{r_2} = \frac{2F}{\pi E_2} (1-\nu_2^2) \left\{ \frac{\sin \beta}{2} \left[\frac{\beta}{2} + \frac{2 \cos^2 \beta - \cos \beta - 1}{4 \sin \beta (1 - \cos \beta)} + \frac{\beta}{4 \sin^2 \beta} \right] + \frac{\nu_2 + 1}{8(\nu_2 - 1)} \times \left(1 + \frac{\beta}{\sin \beta} \right) - \frac{\cos \beta}{2} \left[\ln(2(1 - \cos \beta)) + \frac{\beta}{\operatorname{tg} \beta} \right] + \frac{\beta \cos^2 \beta}{2 \sin \beta} + \frac{1}{4(1 - \nu_2)} + \frac{\cos \beta}{16(1 - \nu_2)^2} \times \left(2\nu_2 - \nu_2^2 + 3 \right) + \frac{\nu_2 \cos \beta}{2(1 - \nu_2)} \left(\frac{\beta}{2 \operatorname{tg} \beta} - \frac{1}{2} \right) + f_1(\beta) \right\}. \quad (20)$$

Постоянная интегрирования: $f_1(\beta) = c \cos \beta$.

Перемещения центра ролика в процессе взаимодействия с зубом

$$u_{r_1} + u_{r_2} = d \cos \beta - (R_2 - R_1)(1 - \cos \beta), \quad (21)$$

где d – величина совместной деформации точки контакта ролика с зубом; R_2 – радиус образующей окружности зуба.

Радиальное смещение ролика

$$d_1 = \int_{-\beta'_0}^{\beta'_0} P(\beta') R_1 \left\{ -K_2 \left[1 + \cos(\beta - \beta') \ln \operatorname{tg} \frac{\beta - \beta'}{2} \right] + K_4 \sin(\beta - \beta') \right\} d\beta', \quad (22)$$

где β' – текущий угол точки на контактной площадке ролика с поверхностью зуба; β'_i – максимальное значение угла точки на контактной площадке ролика с поверхностью зуба; P – давление.

Радиальные смещения контактной поверхности зуба

$$d_2 = K'_2 R_2 \int_{-\beta'_0}^{\beta'_0} P(\beta') f_2(\beta - \beta') d\beta'. \quad (23)$$

Интегрируя уравнения (22) и (23) в интервале $\pm \beta'_m$, получим радиальное смещение для всех точек β_i относительно общего центра.

Усилие, передаваемое элементарным участком дуги контакта

$$P = P_m \left[1 - \frac{\beta'}{\beta'_m} \right], \quad (24)$$

где β'_m – угол, соответствующий элементарной дуге контакта поверхностей.

Из уравнений (22), (23) получим безразмерные радиальные перемещения

$$(d_{ij})_m = \int_{-\beta'_m}^{\beta'_m} \left(1 - \frac{\beta'}{\beta'_m} \right) \left\{ -1 - \cos(\beta_i - \beta') \ln \operatorname{tg} \frac{\beta_i - \beta'}{2} + \bar{K} \sin(\beta_i - \beta') \right\} d\beta', \quad (25)$$

$$(d_{ij})_f = \int_{-\beta'_m}^{\beta'_m} \left(1 - \frac{\beta'}{\beta'_m} \right) \{ f_2(\beta_i - \beta') \} d\beta'. \quad (26)$$

Применяя метод суперпозиции сил и перемещений теории упругости, представим общее радиальное смещение точки i на дуге контакта поверхностей

$$\bar{u}_{1_{ri}} = \sum_{j=1}^n \{ (\bar{d}_{ij})_m \bar{P}_{mj} \}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (27)$$

где $(\bar{d}_{ij})_m = \frac{(d_{ij})_m}{R_2 \bar{P}_{mj}}$, $\bar{u}_{1_r} = \frac{u_{1_{ri}}}{R_2}$.

$$\bar{u}_{2_{ri}} = \sum_{j=1}^n \{ (\bar{d}_{ij})_f \bar{P}_{mj} \}, \quad j = 1, \dots, n \quad (28)$$

где $\bar{u}_{2_{ri}} = u_{2_{ri}} / R_2$.

Совместное решение уравнений (25)-(28) и предполагая соответствие i -х точек контактных поверхностей ролика и зуба, получаем алгебраическое уравнение совместных перемещений ролика и зуба

$$\left\{ (d_{ij})_m + (d_{ij})_f \right\} \bar{P}_{mj} = \bar{d} \cos \beta_i + (R-1)(1 - \cos \beta_i), \quad (29)$$

где $\bar{d} = d/R_2$; β_i – угол между центром i -го элемента и общей линией действия нагрузки.

Разработан метод силового расчета зубчатого зацепления с упругими промежуточными телами качения, причем сопряженные поверхности образуют выпукло-вогнутые контакты близкой по величине кривизны. Получено общее решение задачи теории упругости для силового взаимодействия элементов зацепления с негерцевским контактом, что необходимо для расчёта передач с промежуточными телами качения на контактную прочность. Полученные результаты позволяют уточнить расчёт напряжённого состояния элементов зацепления, повысить эксплуатационную надёжность и нагрузочную способность редукторов в тяжёлом машиностроении.

Список литературы: 1. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 365с. 2. *Тимошенко С.П., Гудьер Д.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560с. 3. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940с. 4. *Hertz H.* Über Die Berührung fester Elastischer Körper, I. E. Math. (Zelle), vol. 92, 1882. 5. *Стрельников В. Н.* Контактная задача зубчатого зацепления с промежуточными телами качения // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Международный сборник научных трудов. – Донецк: ДГТУ, 2004. – Вып.27. – С.238-254.

Поступила в редколлегию 04.05.12

УДК 539.375

Г.П. ТАРИКОВ, д.т.н., проф., зав. каф. "Детали машин" ГГТУ им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь;

В.В. КОМРАКОВ, к.т.н., доцент каф. "Детали машин" ГГТУ им. П.О. Сухого;

А.Т. БЕЛЬСКИЙ, к.т.н., доцент каф. "Детали машин" ГГТУ им. П.О. Сухого;

В.Н. ПАРХОМЕНКО, ст. преп. каф. "Сельскохозяйственные машины" ГГТУ им. П.О. Сухого

ОБ ОДНОМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрены сущность электростатической аналогии, существующей между уравнениями электростатики и теории упругости и способ решения задачи о контакте двух упругих тел с помощью электрического моделирования. Дается описание электро моделирующего устройства и предложена методика решения задачи с его использованием. Дана оценка погрешности результатов эксперимента. Показано, что предлагаемый способ позволяет решать пространственные контактные задачи с точностью достаточной для инженерных приложений.