

The method for determining the load-carrying capacity of the proprietary planetary transmission design is proposed. It is based on solving the compatibility equations of the displacement of gear teeth and the equation of the roller strain state. The results of the experimental research of the transmission efficiency are presented.

Keywords: planetary transmission, load-carrying capacity, strength, efficiency.

УДК 621.833

А.П. ПОПОВ, д.т.н., проф., заведующий каф. механики и конструирования машин НУК им. адм. Макарова, Николаев;
Ю.Н. КИПРЕЕВ, к.т.н., профессор НУК им. адм. Макарова;
О.И. САВЕНКОВ, ассистент НУК им. адм. Макарова

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ НА КОНТАКТНУЮ ПРОЧНОСТЬ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

*Памяти проф. А.И. Павлова
посвящается*

Впервые выполнено решение плоской задачи применительно к упруго сжатым круговым цилиндрам с учетом нелинейной зависимости между упругими деформациями и напряжениями, возникающими в цилиндрах. Решение подтверждено экспериментальными исследованиями в статике на моделях.

Ключевые слова: модель, цилиндр, передача, зубья, нагрузочная способность, нелинейность, контакт, напряжения.

Постановка проблемы. Совершенствование методов расчета зубчатых передач на контактную прочность является актуальной проблемой, успешное решение которой предопределяет развитие современного редукторостроения. Данная проблема является составной частью существующих научных программ и заданий практически во всех отраслях машиностроения, выпускающих зубчатые передачи общего и специального назначения.

Анализ последних исследований. Основой для решения рассматриваемой плоской задачи является новая теория контактной прочности упруго сжатых тел с начальным (до нагружения) линейным или точечным касанием [1, 2]. В связи с этим преобладающая часть последних исследований в области контактной прочности зубчатых передач, повышения их нагрузочной способности, снижения материалоемкости и уровня вибрации в той или иной степени связана с новой теорией контактной прочности и с созданными на ее основе новыми техническими решениями [2-5].

Цель работы. Установление влияния нелинейной зависимости между упругими деформациями зубьев и возникающими при этом напряжениями на контактную прочность зубчатых передач и, как следствие, на их нагрузочную способность по этим напряжениям.

Изложение основного материала. В настоящее время, как известно, расчет зубчатых передач на контактную прочность осуществляется по общеизвестной формуле Герца, полученной им применительно к модели контакта двух упруго сжатых круговых цилиндров бесконечной длины, исходя из линейной зависимости между упругими перемещениями (деформациями) зубьев и возникающими при этом напряжениями.

Однако путем экспериментальных исследований установлено, что между

© О.П. Попов, Ю.М. Кипреев, О.И. Савенков, 2013

упругими деформациями и напряжениями при нагружении зубьев существует нелинейная связь, причем показатель степени нелинейности $n = 0,7 \dots 0,8$ [6]. В связи с вышесказанным возникает необходимость в оценке влияния указанной нелинейности на нагрузочную способность зубчатых передач по контактным напряжениям.

А теперь перейдем к решению рассматриваемой плоской контактной задачи с учетом следующих основных допущений. Первое – контактные напряжения определяются по поверхностям сжатия зубьев, а имеющие место при этом силы трения не учитываются ввиду их малости. Второе – материалы зубьев принимаются однородными и изотропными. И, третье, сила, сжимающая зубья, создает в зоне контакта только упругие деформации. Кроме того, площадка контакта считается меньшей величиной по сравнению с общей площадью сопрягаемых зубьев.

Решение задачи предусматривает нахождение двух равнозначных функций контактных деформаций. Определение первой функции контактных деформаций основано на отыскании формы зазора между контактирующими по линии зубьями до их нагружения, а также на принятии или отыскании закона изменения деформаций после нагружения. Определение второй функции контактных деформаций осуществляется на основе гипотезы Винклера.

Рассмотрим нахождение первой функции контактных деформаций, обратившись к рисунку. Здесь на рисунке, а дана расчетная схема двух цилиндров 1 и 2 до нагружения, под которой подразумевается сопряженная пара зубьев, характеризуемая радиусами кривизны ρ_1 и ρ_2 эвольвентных боковых профилей в полосе зацепления. На рисунке, б приведено изображение нагруженных цилиндров с учетом эллиптического закона изменения контактных деформаций [1-5].

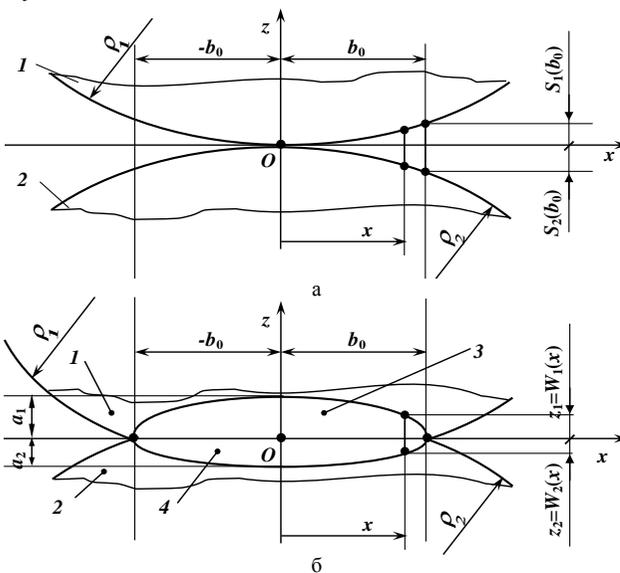


Рисунок – Расчетные модели контакта цилиндров 1 и 2:
а – до нагружения; б – после нагружения

В соответствии с рисунком, а для точки $x = b_0$ запишем выражения максимальных расстояний $s_1(b_0)$ и $s_2(b_0)$ между цилиндрами 1 и 2 и горизонтальной осью x , а именно:

$$s_1(b_0) = b_0^2 / 2\rho_1;$$

$$s_2(b_0) = b_0^2 / 2\rho_2,$$

где b_0 – полуширина площадки контакта, равная большей полуоси полуэллипсов 3 и 4 (рисунок, б).

Уравнения полуэллипсов деформаций 3 и 4, которые характерны для нагруженных цилиндров, соот-

ветственно 1 и 2, имеют вид

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{x^2}{b_0^2} = 1; \quad \frac{z_2^2}{a_2^2} + \frac{x^2}{b_0^2} = 1,$$

где $a_1 = s_1(b_0)$, $a_2 = s_2(b_0)$ – малые полуоси полуэллипсов 3 и 4; $z_1 = W_1(x)$, $z_2 = W_2(x)$ – ординаты контактных деформаций цилиндров 1 и 2 в точке x .

Преобразуем вышеприведенные уравнения полуэллипсов к виду

$$z_1 = a_1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_0^2}}; \quad z_2 = a_2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_0^2}},$$

исходя из которого при соответствующих выражениях переменных величин z_1 , z_2 , параметров a_1 , a_2 получим зависимость первой функции контактных напряжений:

$$W(x) = W_1(x) + W_2(x) = z_1 + z_2 = \frac{b_0^2}{2\rho_W} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_0^2}}, \quad (1)$$

где $\rho_W = \rho_1\rho_2/(\rho_1 + \rho_2)$ – приведенный радиус кривизны сопряженных тел.

Определив первую функцию контактных деформаций (1), перейдем к нахождению второй равнозначной функции $W(x)$, исходя из подчинения сближаемых цилиндров (зубьев) в пределах упругости гипотезе Винклера, в соответствии с которой запишем [1]

$$W(x) = A(x) \cdot w(x), \quad (2)$$

где $A(x)$ – коэффициент постели, $\text{мм}^2/\text{Н}$; $w(x)$ – удельная нагрузка на единицу ширины площадки контакта, $\text{Н}/\text{мм}^2$.

Из уравнения (2) очевидно, что коэффициент постели $A(x)$ является переменной величиной, зависящей от x . При переменной величине коэффициента постели решение рассматриваемой задачи становится невозможным. По этой причине необходимо от коэффициента постели $A(x)$ осуществить переход к постоянной величине коэффициента A . В данном случае необходимо площадь реальной эпюры напряжений $\sigma(x)$ заменить равновеликой прямоугольной площадью эпюры, характеризующейся по величине постоянными средними напряжениями σ_m , равными

$$\sigma_m = \frac{F_n}{2b_0b_W}, \quad (3)$$

где F_n – нормальная сила, сжимающая цилиндры; b_W – длина каждого из цилиндров.

Для определения функции (2), пригодной для решения задачи, необходимо, как уже указывалось, найти выражение коэффициента постели в виде константы. С этой целью сначала запишем зависимость, устанавливающую взаимосвязь между упругими перемещениями (деформациями) W цилиндров и возникающими при этом напряжениями [1]

$$W = c_m \sigma^n, \quad (4)$$

где c_m – размерный параметр; $n = 0,7$ – показатель степени нелинейности.

Решение задачи выполним при коэффициентах Пуассона $\nu_1 \neq \nu_2$ и модулях упругости $E_1 \neq E_2$. В связи с этим представим выражение (4) в развернутом виде,

$$W = W_1 + W_2 = c_{m1}\sigma_1^{0,7} + c_{m2}\sigma_2^{0,7}, \quad (5)$$

где W_1, W_2 – упругие перемещения 1 и 2 цилиндров; c_{m1}, c_{m2} – размерные параметры 1 и 2 цилиндров; σ_1, σ_2 – контактные напряжения, действующие на рабочих поверхностях каждого из цилиндров.

Размерные параметры c_{m1} и c_{m2} представляют собой величины деформаций 1 и 2 цилиндров, измеряемые в мм, при действии напряжений, равных одному мегапаскалю. Напряжения на рабочих поверхностях цилиндров характеризуются, как известно, действием одной и той же силы и одинаковой площадкой контакта. В связи с этим можно принять $c_{m1} = c_{m2}$. В действительности при неизменной по размерам площадке контакта размерные параметры c_{m1} и c_{m2} несколько отличаются друг от друга вследствие разных значений коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 и модулей упругости материалов E_1, E_2 .

Для того чтобы перемещение W в формуле (4) выражалось в мм, необходимо при $n = 0,7$ иметь размерность параметра c_m в мм/МПа^{0,7} или в мм^{2,4}/Н^{0,7}.

Применительно к каждому из двух упруго сжатых цилиндров напряжения, входящие в уравнение (5), представим в виде зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\varepsilon E_1}{1 - \nu_1^2} = \frac{E_1}{(1 - \nu_1^2)} \frac{\Delta L}{L}; \\ \sigma_2 &= \frac{\varepsilon E_2}{1 - \nu_2^2} = \frac{E_2}{(1 - \nu_2^2)} \frac{\Delta L}{L}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $\varepsilon = \Delta L/L$ – относительная деформация; ΔL – максимальная абсолютная деформация; L – некоторый линейный размер, принимаемый равным $2b_0$, то есть $L = 2b_0$.

Введя в формулу (4) вместо напряжения σ правые части зависимостей (6), представим указанное выражение в виде двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} W &= 2C_{m1}\sigma_1^{0,7} = 2C_{m1} \left[\frac{E_1}{(1 - \nu_1^2)L} \right]^{0,7} \Delta L^{0,7}; \\ W &= 2C_{m2}\sigma_2^{0,7} = 2C_{m2} \left[\frac{E_2}{(1 - \nu_2^2)L} \right]^{0,7} \Delta L^{0,7}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

С учетом соотношений $W = \Delta L$; $\Delta L = b_0^2/2\rho_w$ и $L = 2b_0$, найдем из (7) зависимости для расчета размерных параметров:

$$\left. \begin{aligned} C_{m1} &= \frac{1}{2} \left[\frac{2(1 - \nu_1^2)b_0}{E_1} \right]^{0,7} \cdot \frac{b_0^{0,6}}{(2\rho_w)^{0,3}}; \\ C_{m2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{2(1 - \nu_2^2)b_0}{E_2} \right]^{0,7} \cdot \frac{b_0^{0,6}}{(2\rho_w)^{0,3}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Контактные податливости $\delta_{к1}$ и $\delta_{к2}$ каждого из цилиндров определяются с учетом зависимостей (3) и (8):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{к1} &= \frac{W}{F_n} = \frac{C_{m1}\sigma_{m1}^{0,7}}{F_n} = 0,406 \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1 b_W} \right)^{0,7} \frac{b_0^{0,6}}{(\rho_W F_n)^{0,3}}; \\ \delta_{к2} &= \frac{W}{F_n} = \frac{C_{m2}\sigma_{m2}^{0,7}}{F_n} = 0,406 \left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2 b_W} \right)^{0,7} \frac{b_0^{0,6}}{(\rho_W F_n)^{0,3}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Постоянное значение коэффициента постели $A = 2b_0(\delta_{к1} + \delta_{к2})$ находится с помощью выражений (9),

$$A = 0,812 \left[\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1 b_W} \right)^{0,7} + \left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2 b_W} \right)^{0,7} \right] \frac{b_0^{1,6}}{(\rho_W F_n)^{0,3}}. \quad (10)$$

Вторую функцию контактных деформаций (2) представим в окончательном виде, используя зависимость (10):

$$W(x) = Aw(x) = \frac{0,812b_0^{1,6}}{(\rho_W F_n)^{0,3}} \left[\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1 b_W} \right)^{0,7} + \left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2 b_W} \right)^{0,7} \right] w(x). \quad (11)$$

Проинтегрируем зависимость (2) по площади контакта с учетом (11):

$$\int_{-b_0}^{b_0} W(x)dx = \frac{0,812b_0^{1,6}}{(\rho_W F_n)^{0,3}} \left[\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1 b_W} \right)^{0,7} + \left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2 b_W} \right)^{0,7} \right] \int_{-b_0}^{b_0} w(x)dx.$$

В этой зависимости интегральное выражение представляет нормальную нагрузку на площадь контакта,

$$\int_{-b_0}^{b_0} w(x)dx = F_n.$$

Повторно проинтегрируем функцию перемещений $W(x)$ с использованием зависимости (1),

$$\int_{-b_0}^{b_0} W(x)dx = \frac{b_0^2}{2\rho_W} \int_{-b_0}^{b_0} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_0^2}} dx = \frac{\pi b_0^3}{4\rho_W}.$$

Уравнение напряженно-деформированного состояния упруго сжатых цилиндров получим с помощью трех последних выражений:

$$\frac{0,812F_n b_0^{1,6}}{(\rho_W F_n)^{0,3}} \left[\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1 b_W} \right)^{0,7} + \left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2 b_W} \right)^{0,7} \right] = \frac{\pi b_0^3}{4\rho_W}. \quad (12)$$

Выполняя соответствующие преобразования уравнения (12), найдем зависимость для расчета полуширины площадки контакта,

$$b_0 = 1,0243 \left[\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1 b_w} \right)^{0,7} + \left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2 b_w} \right)^{0,7} \right]^{\frac{5}{7}} \sqrt{F_n \rho_w}. \quad (13)$$

Для определения максимальных контактных напряжений σ_H необходимо найти функцию контактных напряжений $\sigma(x)$. С этой целью, разделив и умножив правую часть выражения (2) на длину b_w , полагая $A(x) = A$, запишем:

$$W(x) = A \cdot w(x) = A b_w \frac{w(x)}{b_w},$$

где $w(x)/b_w = \sigma(x)$.

Из последней зависимости находим функцию контактных напряжений $\sigma(x)$ с учетом правой части выражения (1),

$$\sigma(x) = \frac{W(x)}{A b_w} = \frac{b_0^2}{2 \rho_w A b_w} \sqrt{1 - \frac{x^2}{b_0^2}}. \quad (14)$$

Приняв в уравнении (14) координату $x=0$, получим максимальное контактное напряжение

$$\sigma_H = \frac{b_0^2}{2 \rho_w A b_w}. \quad (15)$$

В результате преобразования выражения (15) с учетом зависимостей (10) и (13) получим

$$\sigma_H = 0,646 \sqrt{\frac{F_n}{b_w \rho_w \left[\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} \right)^{0,7} + \left(\frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{0,7} \right]^{\frac{10}{7}}}}. \quad (16)$$

В контакте стальных цилиндров с равными механическими характеристиками ($\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0,3$; $E_1 = E_2 = E$) формулы (13) и (16) приводятся к более упрощенному виду:

$$b_0 = 1,606 \sqrt{\frac{F_n \rho_w}{E b_w}}, \quad (17) \quad \sigma_H = 0,394 \sqrt{\frac{E F_n}{\rho_w b_w}}. \quad (18)$$

Если решение указанной задачи выполнить, исходя из показания степени не линейности $n=1$, то выражения примут вид:

$$b_0 = 1,129 \sqrt{\frac{\rho_w F_n}{b_w} \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}, \quad (19) \quad \delta_n = 0,564 \sqrt{\frac{F_n}{\rho_w b_w \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)}}, \quad (20)$$

Если в уравнениях (19) и (20) принять $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0,3$ и $E_1 = E_2 = E$, то в этом случае указанные уравнения будут выглядеть следующим образом:

$$b_0 = 1,522 \sqrt{\frac{\rho_w F_n}{E b_w}}, \quad (21)$$

$$\delta_n = 0,418 \sqrt{\frac{E F_n}{\rho_w b_w}}. \quad (22)$$

Из рассмотрения уравнений (19-22) нетрудно установить, что они абсолютно совпадают с решениями Герца при $n = 1$. Такое совпадение указывает на достоверность полученных в работе уравнений (13), (16-18).

В результате сравнения между собой числовых коэффициентов при b_0 и δ_n в формулах (17), (18) и (21), (22) отмечаем, что при учете нелинейной зависимости между деформациями и напряжениями полуширина площадки контакта при $n = 0,7$ возрастает в $1,606/1,522 = 1,055$ раза, а максимальные напряжения при этом, как следствие, уменьшаются в $0,418/0,396 = 1,55$ раза. На основании изложенного, нагрузочная способность эвольвентного зубчатого зацепления по контактным напряжениям при учете указанной не линейности возрастает в $1,055^2 = 1,113$ раза, т.е. примерно на 11,3%.

С учетом изложенного нагрузочная способность эвольвентных зубчатых передач с начальным (до нагружения) линейным касанием зубьев по контактными напряжениям, определяемая по формуле Герца, является заниженной при $n = 0,7$ примерно на 11,3%. Данное обстоятельство указывает на необходимость при расчетах зубчатых передач исходить не из формулы (22), совпадающей с формулой Герца, а из формулы (18).

Для подтверждения достоверности полученных в работе решений были проведены экспериментальные исследования в статике на стальном цилиндрическом ролике, который под действием силы прижимался к плоской плите. Эксперименты проводились с использованием специально спроектированного для этих целей устройства, описание которого дано в [3]. Стальной ролик имел длину $b_w = 100$ мм и радиус $\rho = 60$ мм. Прижатие ролика к плите осуществлялось силами $F_n = (0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0)10^4$ Н. При этом измерялась ширина площадки контакта $2b_0$. Расчетное определение указанных величин $2b_0$ осуществлялось по формуле (17).

Таблица – Опытные и расчетные величины ширины площадки контакта

Определяемые и заданные величины		Величины силы $F_n \cdot 10^{-4}$, Н					
		0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Расчет	$2b_0$, мм	0,384	0,541	0,664	0,763	0,856	0,939
Опыт		0,395	0,550	0,650	0,770	0,860	0,950
Коэффициент χ		1,0286	1,0166	0,9790	1,0092	1,0047	1,0117

Опытные и расчетные величины ширины площадки контакта даны в таблице с учетом коэффициента χ , характеризующего различия между расчетными и опытными величинами $2b_0$.

Выводы:

1. Впервые выполнено решение плоской задачи применительно к модели контакта упруго сжатых круговых цилиндров, которая имитирует взаимодействие эвольвентных зубьев в полюсе зацепления, с учетом нелинейной зависимости между упругими деформациями и напряжениями при показателе степени нелинейности $n = 0,7$.

2. Получены выражения максимальных контактных напряжений и полуширины площадки контакта для случаев неравенства и равенства между собой соответственно коэффициентов Пуассона и модулей упругости материалов взаимодействующих тел.

3. Установлено, что существующая нелинейность между деформациями и напряжениями в упруго сжатых телах приводит к повышению их нагрузочной способности по контактными напряжениями в 1,113 раза по сравнению с таковой, которая имеет место без учета указанной нелинейности.

Список литературы: 1. *Попов А.П.* Контактная прочность зубчатых механизмов [Текст] / *А.П. Попов*. – Николаев: Изд-во НУК, 2008. – 580с. 2. *Попов А.П.* Зубчатые механизмы с точечным контактом зубьев [Текст] / *А.П. Попов*. – Николаев: Изд-во Атолл, 2010. – 774с. 3. *Попов А.П.* Повышение нагрузочной способности зубчатых передач по контактными напряжениями [Текст] / *А.П. Попов, Ю.Н. Кипреев* // *Вісник Національного технічного університету "ХПИ"*. – Харків, 2009. – №26. – С.108-117. 4. *Попов О.П.* Підвищення навантажувальної здатності зубчастих передач [Текст] / *О.П. Попов, Ю.М. Кипреєв, О.М. Медведовський* // *Машинознавство*. – Львів, 2009. – №4. – С.34-39. 5. *Попов О.П.* Зубчаста передача з рівномірним зацепленням зубів за контактними напруженнями [Текст] / *О.П. Попов, Ю.М. Кипреєв, О.І. Савенков* // *Машинознавство*. – Львів, 2009. – №7. – С.32-36. 6. *Левина З.М.* Контактная жесткость машин [Текст] / *З.М. Левина, Д.Н. Реуштов*. – М.: Машиностроение, 1971. – 264с.

Поступила в редколлегію 09.04.2013

УДК 621.833

Влияние нелинейной зависимости между деформациями и напряжениями на контактную прочность зубчатых передач / *А.П. Попов, Ю.Н. Кипреєв, О.И. Савенков* // *Вісник НТУ "ХП"*. Серія: Проблеми механічного приводу. – Х.: НТУ "ХП". – 2013. – №40(1013). – С.101-108 – Бібліогр.: 6 назв.

Вперше виконано рішення плоскої задачі стосовно до пружно стиснених кругових циліндрів з урахуванням нелінійної залежності між пружними деформаціями та напруженнями, що виникають в циліндрах. Рішення підтверджено експериментальними дослідженнями у статичі на моделях.

Ключові слова: модель, циліндр, передача, зуби, навантажувальна здатність, нелінійність, контакт, напруження.

The solution of the plane problem as applied to elastically-compressed circular cylinders with regard of non-linear dependence between elastic displacements and stresses arising in the cylinders under the load has been carried out for the first time. The solution has been confirmed by experimental researches in static's on the models.

Keywords: model, cylinder, gear, teeth, load capacity, nonlinearity, contact, stress.

УДК 621.833

А.П. ПОПОВ, д.т.н., проф., заведуючий каф. механіки і конструювання машин НУК ім. адм. Макарова, Николаев;
М.Г. МОЗГОВОЙ, старший преподаватель каф. механіки і конструювання машин НУК ім. адм. Макарова

КОНТАКТНАЯ ПРОЧНОСТЬ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ С ТОЧЕЧНЫМ ЗАЦЕПЛЕНИЕМ ЗУБЬЕВ

*Памяти проф. А.И. Павлова
посвящается*

Впервые на основе новой теории контактной прочности упруго сжатых тел, разработанной А.П. Поповым, создан метод расчета на контактную прочность зубчатых передач с точечным зацеплением зубьев.

Ключевые слова: передачи, зубья, контакт, точка, напряжения.

Актуальность задачи. Разработка методов расчета зубчатых передач с точечным зацеплением зубьев на контактную прочность, к которым относятся, например, гиперболоидные передачи, конические передачи со спиральными зубьями, передачи Новикова, цилиндрические передачи с прямыми

© О.П. Попов, М.Г. Мозговой, 2013